

Wochenprogramm **8** mit Lösungsweg: Polvorgabe

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

- a) Transformieren Sie das System auf Diagonalform. Geben Sie die dazugehörige Transformationsmatrix T an.

Lösung: Wir betrachten die transformierten Koordinaten $\mathbf{z}$, wobei $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ gilt. Damit das System in $\mathbf{z}$ -Koordinaten in Diagonalform vorliegt, müssen die Spalten der Transformationsmatrix T als die Eigenvektoren von A gewählt werden. Hier gilt für die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A

$$\lambda_1 = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit für das transformierte System in Diagonalform

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{T^{-1}AT}_{=\tilde{A}} \mathbf{z} + \underbrace{T^{-1}\mathbf{b}u}_{=\tilde{\mathbf{b}}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=\tilde{\mathbf{c}}^T} \mathbf{z}.$$

- b) Besitzen das Originalsystem und das transformierte System dieselben Stabilitätseigenschaften? Muss man zur Beantwortung dieser Frage die transformierte Dynamikmatrix berechnen?

Lösung: Die Eigenwerte des Originalsystems wurden bereits in a) zu 2 und 1 berechnet. Die Eigenwerte des transformierten Systems lassen sich von den Diagonalelementen der transformierten Dynamikmatrix ablesen und liegen ebenfalls bei 2 und 1. Somit sind die Stabilitätseigenschaften gleich.

Für eine beliebige Matrix T mit vollem Rang ist $\tilde{A} = T^{-1}AT$ eine Ähnlichkeitstransformation. Die Eigenwerte sind invariant unter einer Ähnlichkeitstransformation, daher ändern sich die Stabilitätseigenschaften nicht.

Bestehensniveau

Aufgabe 2

Gegeben sei das steuerbare System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.\end{aligned}$$

- a) Ist das System stabil?

Lösung: Das System ist nicht stabil.

Lösungsweg: Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ (Eigenwerte: 2 und 1).

- b) Im Folgenden soll eine Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ entworfen werden. Der Regler $\mathbf{k}^T$ soll dabei so berechnet werden, dass sich für den geschlossenen Kreis ein doppelter Pol bei -3 ergibt. Dafür sollen die folgenden Ansätze verfolgt werden:

- i) Berechnen Sie die Zustandsrückführung direkt durch Vergleich des charakteristischen Polynoms mit dem Sollpolynom.

Lösung: Das Wunschpolynom lautet $\lambda^2 + 6\lambda + 9$.

Das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises wird wie folgt berechnet:

$$\det(\lambda I - (A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 6 + k_1 & \lambda - 4 + k_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + (k_2 - 3)\lambda + k_2 + k_1 + 2.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $k_1 = -2$, $k_2 = 9$.

- ii) Transformieren Sie das System zunächst auf Regelungsnormalform und berechnen Sie hierfür die entsprechende Zustandsrückführung. Transformieren Sie diese anschließend zurück in die Originalkoordinaten.

Hinweis: Die Transformationsmatrix zur Transformation in Regelungsnormalform lautet für zweidimensionale Systeme $T = (\mathbf{A}\mathbf{b} + a_1\mathbf{b} \quad \mathbf{b})$.

Lösung: Die Transformationsmatrix $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$, so dass das System in den neuen $\mathbf{z}$ -Koordinaten in Regelungsnormalform vorliegt, lautet gemäß dem Hinweis

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das System in Regelungsnormalform lautet dann also

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= A^* \mathbf{z} + \mathbf{b}^* u \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.\end{aligned}$$

Für den geschlossenen Kreis in Regelungsnormalform erhält man durch Einsetzen der Zustandsrückführung $u = -(\mathbf{k}^*)^T \mathbf{z}$

$$\dot{\mathbf{z}} = A^* \mathbf{z} - \mathbf{b}^* (\mathbf{k}^*)^T \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - k_1^* & 3 - k_2^* \end{pmatrix} \mathbf{z}.$$

Mit dem gewünschten charakteristischen Polynom des geschlossenen Kreises muss gelten

$$(A^* - \mathbf{b}^* (\mathbf{k}^*)^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich erhält man die Rückführung in Regelungsnormalform $(\mathbf{k}^*)^T = (7 \ 9)$. Diese muss noch in die Originalkoordinaten zurücktransformiert werden. Wegen $u = -(\mathbf{k}^*)^T \mathbf{z} = -(\mathbf{k}^*)^T T^{-1} \mathbf{x} = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ folgt

$$\mathbf{k}^T = (\mathbf{k}^*)^T T^{-1} = (7 \ 9) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-2 \ 9).$$

iii) Verwenden Sie die Ackermann-Formel.

Lösung: Mit der Ackermann-Formal erhält man

$$\mathbf{k}^T = (0 \ 1) (\mathbf{b} \ A\mathbf{b})^{-1} (A^2 + 6A + 9I) = (-2 \ 9).$$

- c) Nachdem Sie das System stabilisiert haben, soll der Regler nun in geeigneter Weise erweitert werden, damit der Ausgang y einem vorgegebenen Referenzsignal d möglichst gut folgt, d.h., im stationären Zustand soll $y_s = d_s$ gelten. Berechnen Sie dazu für den Eingang $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + vd$ das Vorfilter v und zeichnen Sie das Blockschaltbild der resultierenden Folgeregelung.

Lösungsweg: Im stationären Zustand gilt $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Mit $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + vd$ ergibt sich

$$0 = \dot{\mathbf{x}} = (A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x}_s + \mathbf{b}vd_s$$

und damit für den stationären Zustand

$$\mathbf{x}_s = -(A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}vd_s.$$

Für den stationären Ausgang $y_s = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_s$ ergibt sich dann

$$y_s = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_s = -\mathbf{c}^T (A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}vd_s.$$

Aus der Forderung $y_s = d_s$ erhält man also

Lösung:

$$v = -\frac{1}{\mathbf{c}^T (A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}},$$

für die Werte aus Aufgabenteil b) ist $v = 9$. Abbildung 1 zeigt das Blockschaltbild.

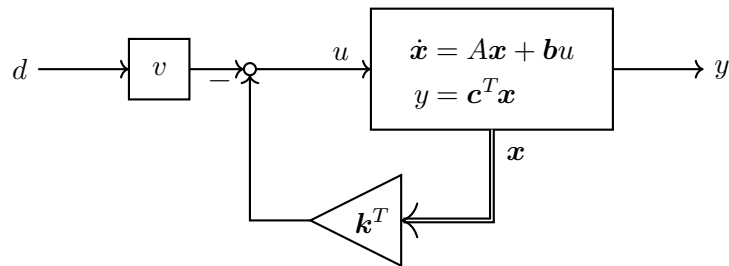


Abbildung 1: Zustandsrückführung mit Vorfilter.

Aufgabe 3

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \quad 0 \quad 0) \mathbf{x}.\end{aligned}$$

- a) Der Regelkreis wird durch eine Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ geschlossen. Können für den geschlossenen Kreis beliebige Pole vorgegeben werden?

Lösung: Ja, da das System steuerbar ist.

Lösungsweg: Die Pole des geschlossenen Kreises können genau dann beliebig vorgegeben werden, wenn das System steuerbar ist.

Die Steuerbarkeitsmatrix ist hier

$$S_0 = (\mathbf{b} \quad A\mathbf{b} \quad A^2\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und hat vollen Rang, d.h., das System ist steuerbar.

- b) Bestimmen Sie die Einträge des Vektors $\mathbf{k}^T = (k_1 \quad k_2 \quad k_3)$, so dass das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises die Form $s^3 + 6s^2 + 11s + 6$ hat.

Lösung: Der geschlossene Kreis lautet

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x} \\ &= \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises lautet

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + k_1 & k_2 & k_3 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + k_1 \lambda^2 + (2k_2 - 1) \lambda + 2k_3 - k_1.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit dem Wunschkpolynom erhält man $\mathbf{k}^T = (6 \quad 6 \quad 6)$.

- c) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Ackermann-Formel die Einträge des Vektors $\mathbf{k}^T = (k_1 \ k_2 \ k_3)$, so dass die Polstellen des charakteristischen Polynoms bei $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = -5$ liegen.

Lösung: Das Wunschpolynom berechnet sich zu

$p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda + 5) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 47\lambda + 60$. Dann folgt

$$p(A) = A^3 + 12A^2 + 47A + 60I = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 96 & 72 & 48 \\ 24 & 48 & 72 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$S_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

erhält man:

$$\mathbf{k}^T = (0 \ 0 \ 1) S_0^{-1} p(A) = (12 \ 24 \ 36).$$

Standardniveau

Aufgabe 4

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 0) \mathbf{x}, \end{aligned}$$

für das eine Zustandsrückführung

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + d$$

gemäß Abbildung 2 entworfen werden soll.

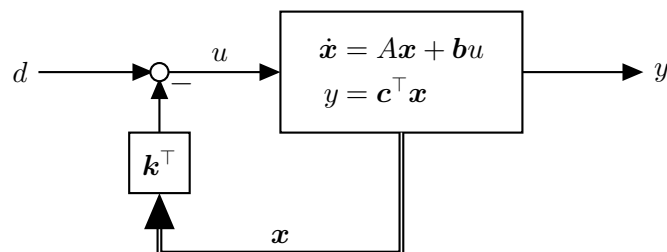


Abbildung 2: Geschlossener Kreis mit Zustandsrückführung.

Bestimmen Sie alle stabilisierenden $\mathbf{k}^T = (k_1 \ k_2)$, die bei einem Einheitssprung in d zu einer verschwindenden bleibenden Regelabweichung führen. Wie müsste der geschlossene Kreis aus Abbildung 2 modifiziert werden, um für beliebige stabilisierende $\mathbf{k}^T$ eine verschwindende bleibende Regelabweichung sicherzustellen?

Lösung: Die Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises ergibt sich zu

$$A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top = \begin{pmatrix} 2 - k_1 & -1 - k_2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Da sie in Dreiecksform vorliegt, lassen sich die Eigenwerte zu $2 - k_1$ und -3 ablesen. Der geschlossene Kreis ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte einen negativen Realteil haben. Daher ist jeder Regler mit $k_1 > 2$, $k_2 \in \mathbb{R}$ stabilisierend (alternativ: Argumentation mit Hurwitz-Kriterium $(s + k_1 - 2)(s + 3) = s^2 + s(k_1 + 1) + 3k_1 - 6$). Für alle solchen $\mathbf{k}^\top$ ist also $A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ invertierbar.

Mit der Formel aus der Vorlesung muss für eine verschwindende bleibende Regelabweichung gelten: $y^\infty = -c^\top(A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top)^{-1}\mathbf{b}d^\infty \stackrel{!}{=} d^\infty$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} -c^\top(A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top)^{-1}\mathbf{b} &= -(1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 - k_1 & -1 - k_2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3(2 - k_1)} (1 \ 0) \begin{pmatrix} -3 & 1 + k_2 \\ 0 & 2 - k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3(2 - k_1)} (1 \ 0) \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-3}{3(2 - k_1)} = \frac{1}{k_1 - 2} \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist für $k_1 = 3$ erfüllt, was mit der Stabilitätsbedingung $k_1 = 3 > 2$ konsistent ist. Daher sind alle Regler mit $k_1 = 3$ und $k_2 \in \mathbb{R}$ stabilisierend und führen zu einer verschwindenden bleibenden Regelabweichung.

Dies ließe sich für beliebige stabilisierende Regler auch durch Hinzufügen eines Vorfilters mit $v = -\frac{1}{c^\top(A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top)^{-1}\mathbf{b}}$ erreichen.