

Wochenprogramm **7** mit Lösungsweg: Loopshaping 2

Bestehensniveau

Aufgabe 1

Gegeben sei das System

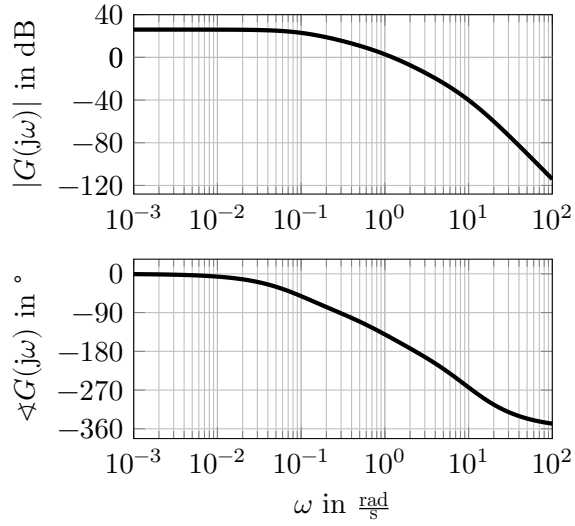
$$G(s) = \frac{200}{(s + 0.1)(s + 1)(s + 10)(s + 10)}.$$

Abbildung 1a) stellt das Bode Diagramm dieses Systems dar.

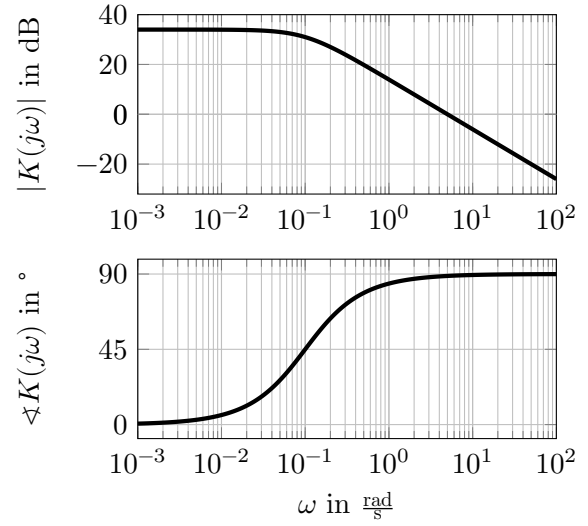
Um die Phasenreserve zu erhöhen, schlägt Ihre Kollegin Frau R. Egler die Verwendung des Reglers K , der die Phase für hohe Frequenzen anhebt, in einem Standardregelkreis vor. Abbildung 1b) zeigt das Bode Diagramm des von Frau R. Egler vorgeschlagenen Reglers K , Abbildung 1c) zeigt das Bode Diagramm von G_0 . Frau R. Egler behauptet, Sie habe dadurch die Phasenreserve (und auch Amplitudenreserve) erhöht und damit die Regelgüte verbessert.

Abbildung 1d) zeigt die Sprungantwort des geschlossenen Kreises mit Regler. Offensichtlich ist das Gesamtsystem instabil. Erklären Sie Frau R. Egler die Ursache des Problems.

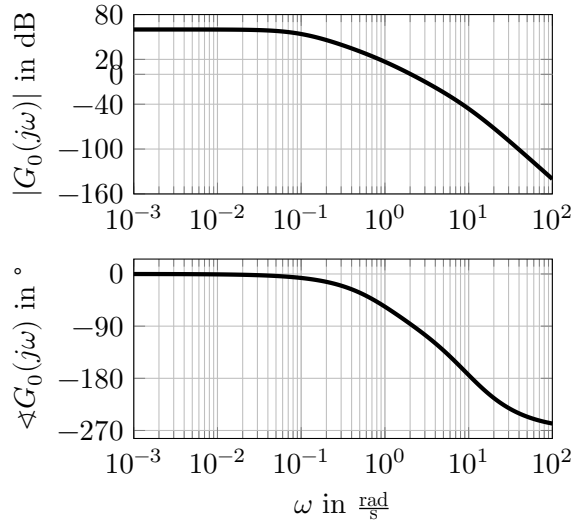
Lösung: Aus den beiden Bode Diagrammen von G und G_0 kann man rekonstruieren, dass die Ortskurven von G und G_0 beide eine Phasendrehung von 0° bezüglich des kritischen Punktes $(-1, 0)$ haben. Zur besseren Veranschaulichung sind in Abbildung 2 die Ortskurven von G und G_0 abgebildet. Da G nur Pole in der linken offenen Halbebene hat, erfüllt die Ortskurve von G das Nyquist Kriterium und der geschlossene Kreis mit der Strecke G wäre daher stabil. Weiterhin kann man aus dem Bode Diagramm des Reglers ablesen, dass K einen instabilen Pol besitzt, wodurch auch G_0 einen instabilen Pol besitzt. Die Phasendrehung von G_0 müsste laut Nyquist Kriterium also 180° betragen damit der geschlossene Kreis stabil ist, was aber nicht der Fall ist. Daher ist der geschlossene Kreis instabil.



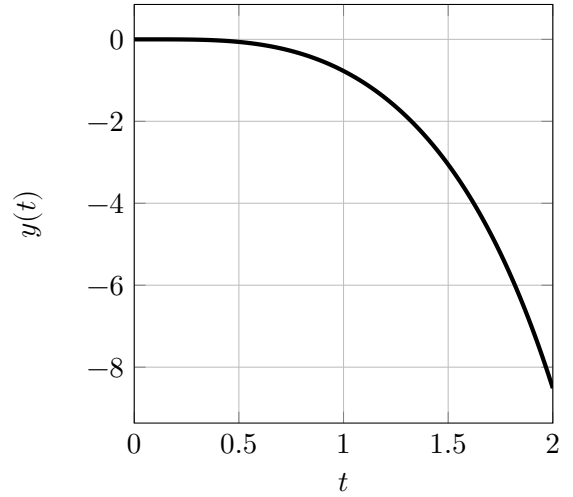
(a) Bode Diagramm von G .



(b) Bode Diagramm des von Frau R. Egler vorgeschlagenen Reglers K .

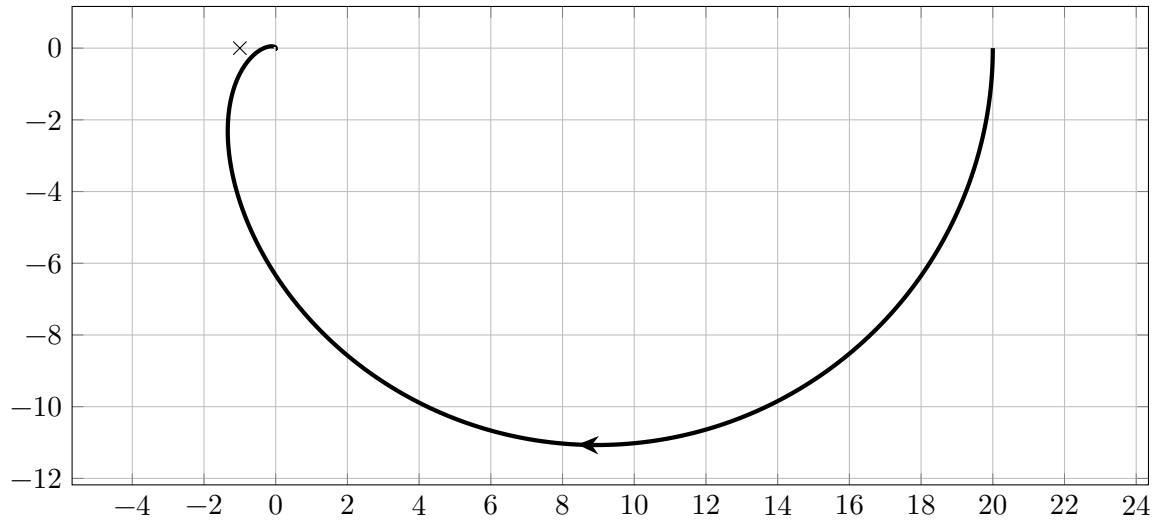


(c) Bode Diagramm von G_0 .

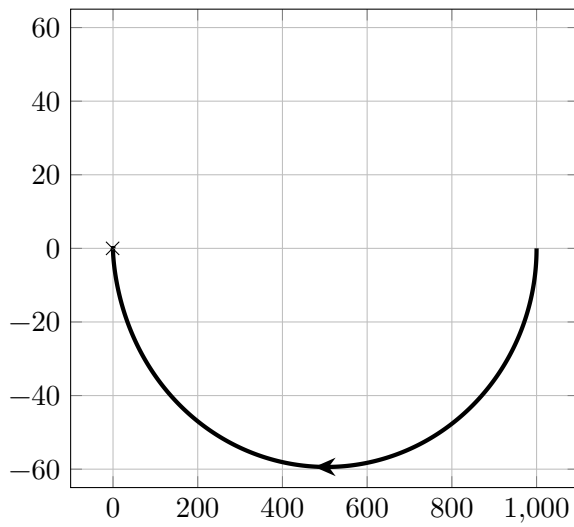


(d) Sprungantwort des geschlossenen Kreises mit Regler.

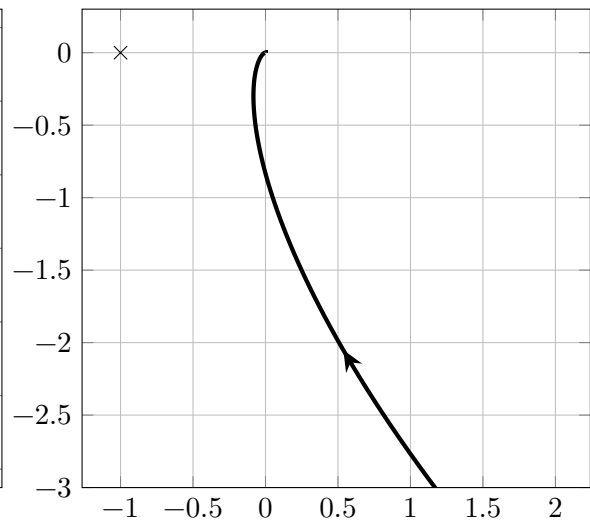
Abbildung 1: Frau R. Egler's Problem.



(a) Ortskurve von G .



(b) Ortskurve von G_0 .



(c) Ortskurve von G_0 am Ursprung.

Abbildung 2: Ortskurven zu Frau R. Egler's Problem.

Matlab-Aufgaben

Aufgabe 2

Entwerfen Sie für die Regelstrecke

$$G(s) = \frac{1}{(0.1s + 1)(2s + 1)}$$

mithilfe von Matlab einen PI-Regler mittels Loopshaping.

a) Bestimmen Sie die Parameter des PI-Reglers $K(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$ mittels Loopshaping, so dass die folgenden Spezifikationen erfüllt sind:

- Stabilität des geschlossenen Regelkreises,
- Durchtrittsfrequenz $\omega_D \approx 1$ rad/s,
- Phasenreserve $\varphi_r \geq 30^\circ$,
- keine bleibende Regelabweichung.

Lösung: Beim Reglerentwurf mittels Loopshaping werden die Spezifikationen an den geschlossenen Regelkreis näherungsweise in Bedingungen für einen Wunschverlauf $G_{W0}(j\omega)$ des offenen Regelkreises übersetzt. Dieser Wunschverlauf kann im Frequenzbereich in das Bode Diagramm der realen Strecke eingezeichnet werden. Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises wird dann so geformt, dass sie möglichst genau dem Wunschverlauf entspricht.

In Abbildung 3 ist das Bode Diagramm der Regelstrecke

$$G(s) = \frac{1}{(0.1s + 1)(2s + 1)},$$

zusammen mit einem möglichen Wunschverlauf für die offene Strecke $G_{W0} = GK_W$ dargestellt. Der abgebildete Wunschverlauf ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

- Durchtrittsfrequenz $\omega_D \approx 1$ rad/s: wird direkt in den Amplitudengang übernommen.
- Phasenreserve $\phi_r \geq 30^\circ$: die Phase muss bei der Durchtrittsfrequenz mehr als -150° betragen.
- Keine bleibende Regelabweichung: wird strukturell erreicht durch Integratoranteil in der offenen Strecke.

Für den Loopshaping-Entwurf wird der PI-Regler umgeformt zu

$$K(s) = (T_I s + 1) \frac{K_P}{T_I s} = K_1(s) K_2(s).$$

In einem ersten Schritt wird der Anteil $K_1(s) = T_I s + 1$ so festgelegt, dass die Amplitude von GK_1 im Bereich der Durchtrittsfrequenz $\omega_D = 1$ rad/s den Wert 1 annimmt. Dies kann erreicht werden, indem durch die Wahl von $T_I = 2$ der Pol in G bei $s_1 = -0.5$ gekürzt wird. Damit erhält man den offenen Regelkreis

$$G_{01}(s) = G(s) K_1(s) = \frac{1}{0.1s + 1},$$

mit dem in Abbildung 4 dargestellten Bode Diagramm. Das Regelziel der verschwindenden

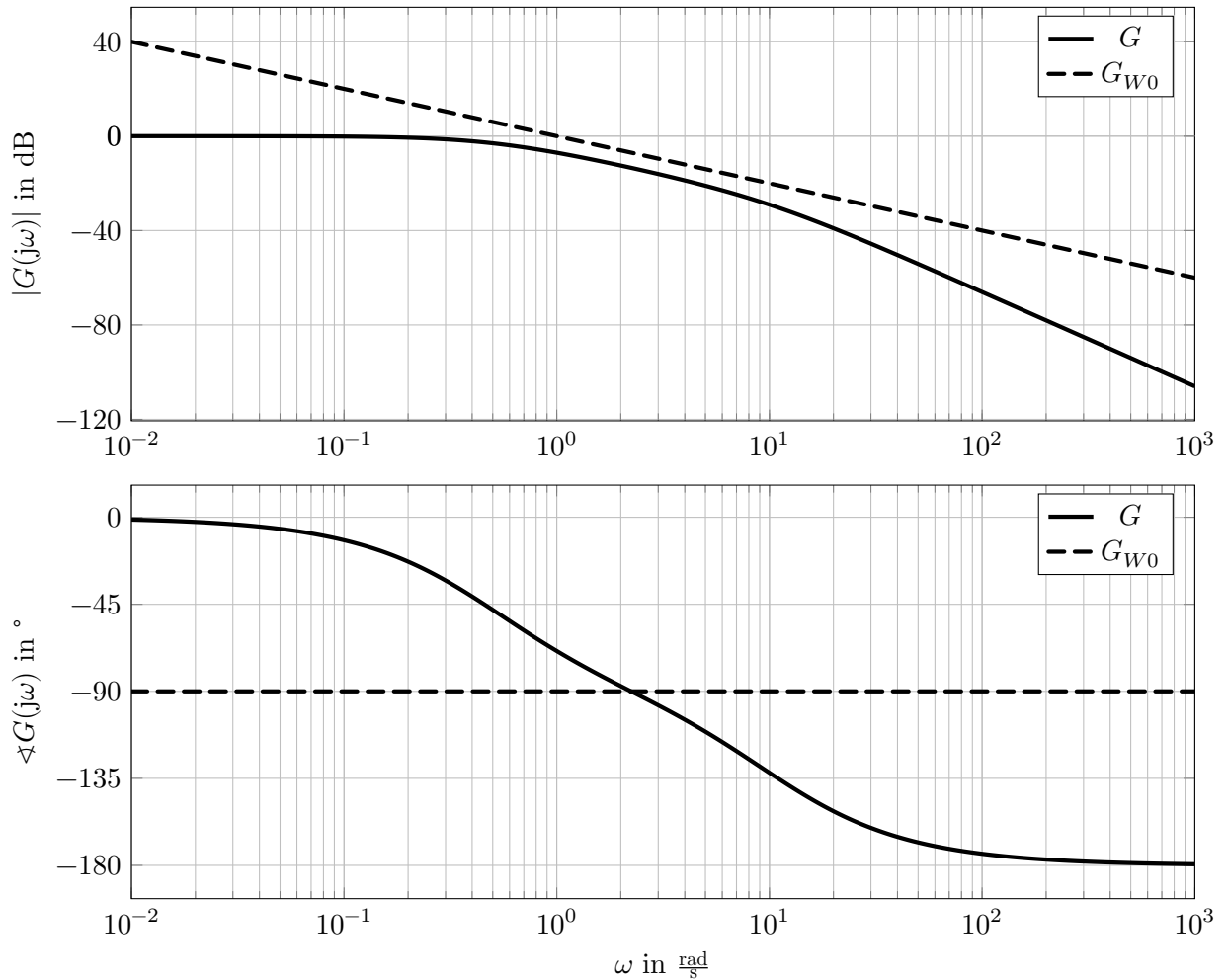


Abbildung 3: Amplitudengang von G und G_{W0} .

bleibenden Regelabweichung wird in dem zweiten Schritt durch die Hinzunahme von $K_2(s) = K_P/T_I s$ erreicht. Um die Durchtrittsfrequenz $\omega_D = 1$ rad/s zu erzielen, wird der Verstärkungsfaktor zu $K_P = 2$ gewählt. Damit erhält man für den offenen Regelkreis die Übertragungsfunktion

$$G_0(s) = G(s)K_1(s)K_2(s) = \frac{1}{0.1s + 1} \frac{1}{s}.$$

Abbildung 5 zeigt das Bode Diagramm von G_0 zusammen mit dem Wunschverlauf G_{W0} . Durch die gewählten Reglerparameter stimmt der Verlauf von G_0 gut mit dem Wunschverlauf überein.

- b) Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf von $|S(j\omega)|$ und $|T(j\omega)|$.

Lösung: Mit dem PI-Regler $K(s) = 2(1 + 1/2s)$ aus Aufgabenteil a) erhält man die Sensitivität

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{s(0.1s + 1)}{0.1s^2 + s + 1},$$

und die komplementäre Sensitivität

$$T(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{0.1s^2 + s + 1}.$$

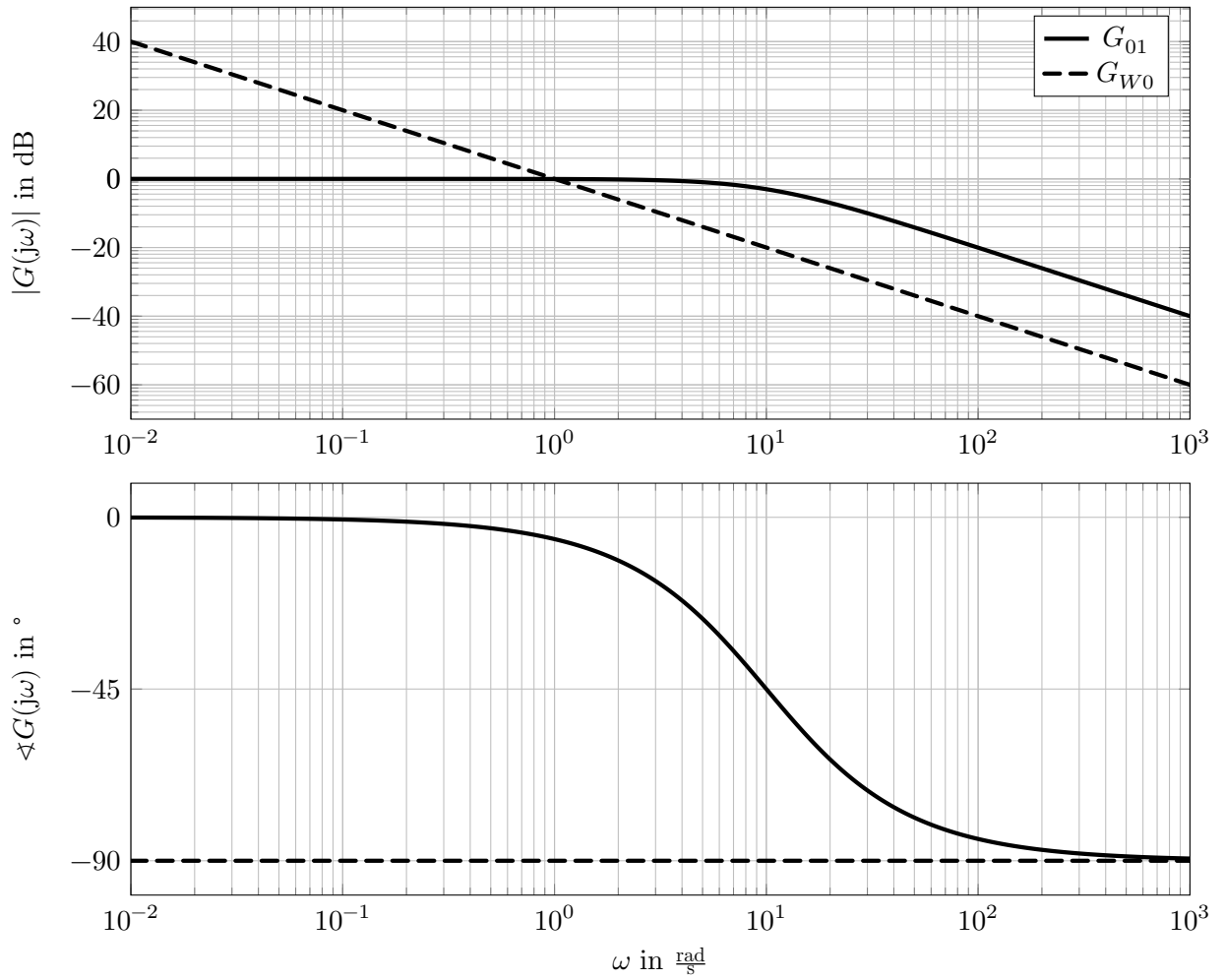


Abbildung 4: Amplitudengang von G_{01} und G_{W0} .

Die Amplitudenverläufe der Sensitivität und der komplementären Sensitivität sind in Abbildung 6 dargestellt. Der geschlossene Regelkreis mit dem entworfenen PI-Regler hat ein gutes Regelverhalten.

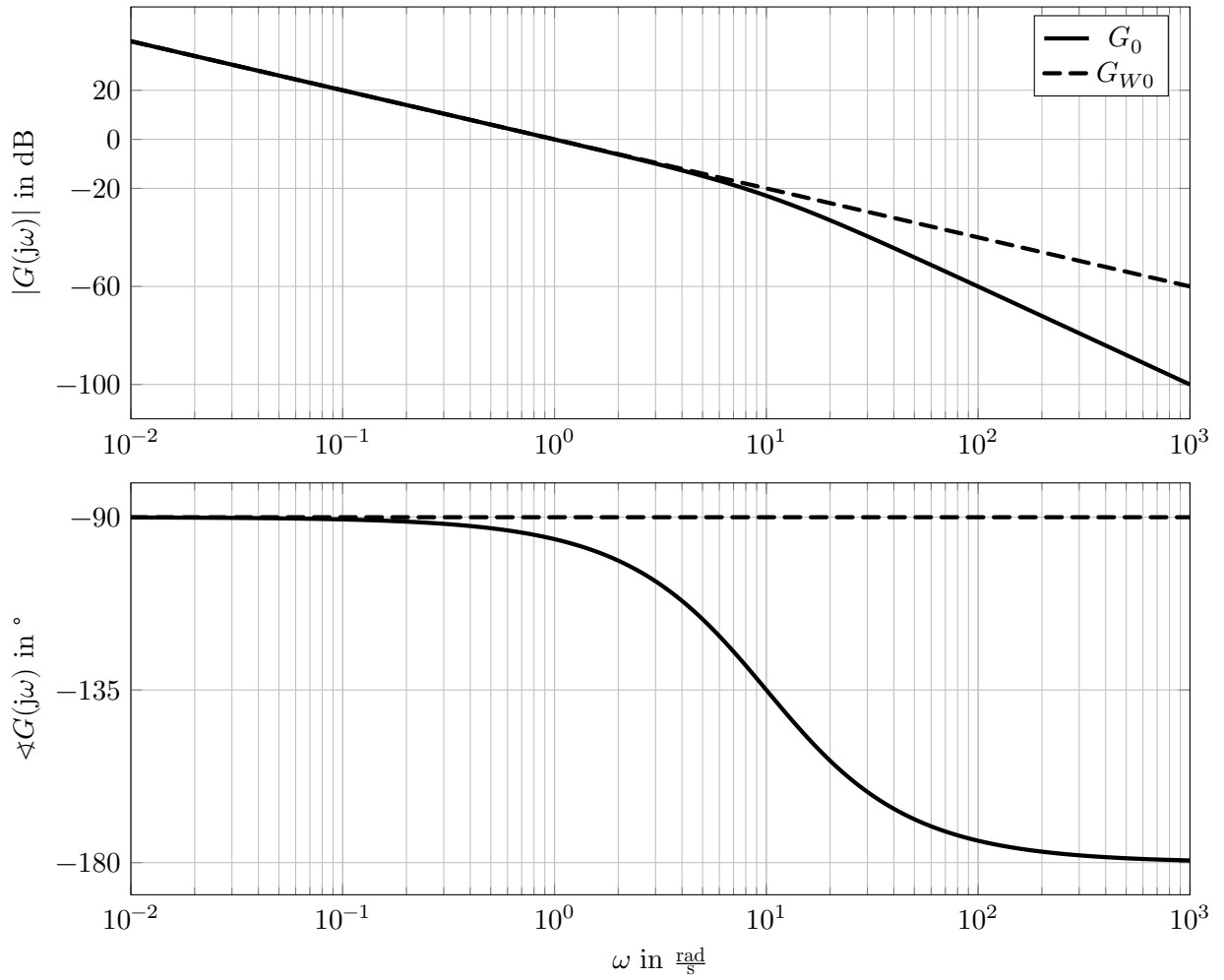


Abbildung 5: Amplitudengang von G_0 und G_{W0} .

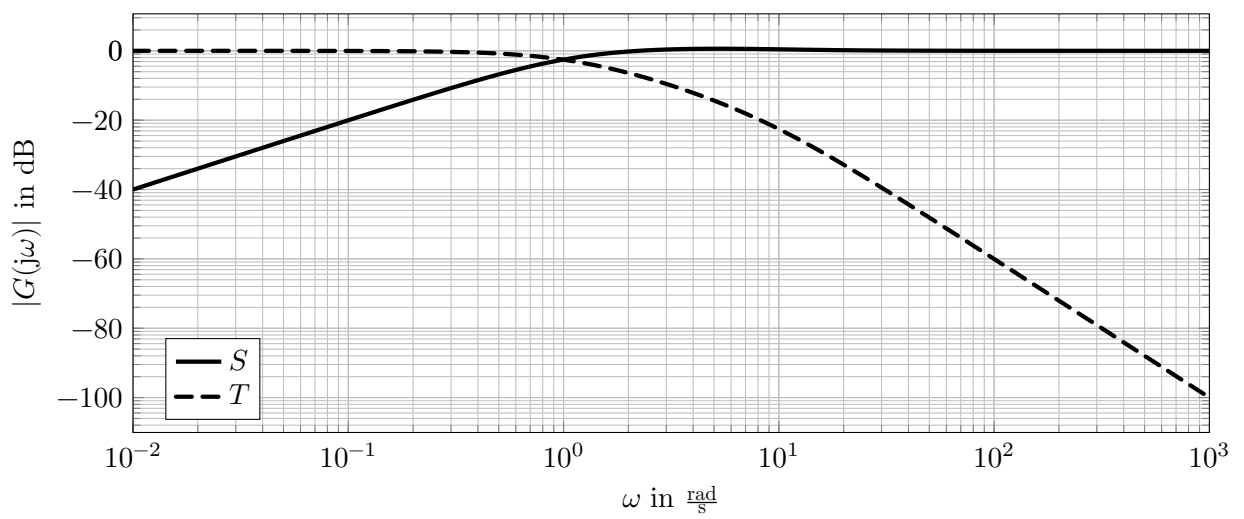


Abbildung 6: Amplitudengang von S und T .

Standardniveau

Aufgabe 3

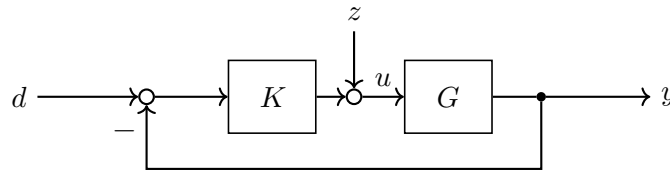


Abbildung 7: Regelkreis.

Betrachtet wird der Regelkreis mit Eingangsstörung z in Abbildung 7. Es soll ein Regler für die Strecke G mit Dynamik

$$\ddot{y} = u$$

mittels Loopshaping entworfen werden.

- a) Bestimmen Sie einen geeigneten P-Regler $K(s) = k_p$, sodass die Durchtrittsfrequenz des offenen Kreises etwa 10 rad/s beträgt. Ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil?

Hinweis: Zeichnen Sie zunächst das Bode Diagramm und die Ortskurve von G .

Lösungsweg: Bei der Strecke handelt es sich um einen Doppelintegrator mit Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s^2}$, deren Bode Diagramm in Abbildung 8 dargestellt ist. Die Durchtrittsfrequenz von G liegt bei 1 rad/s und die Steigung beträgt -40 dB/dec, also beträgt die Amplitude bei 10 rad/s -40 dB. Durch Multiplikation mit einem P-Regler $k_p = 100$ wird die Durchtrittsfrequenz auf die geforderten 10 rad/s gehoben.

Jedoch ist der geschlossene Kreis gemäß des Nyquist Kriteriums instabil, da der offene Kreis $k_p G$ 2 Pole auf der imaginären Achse besitzt, die Phasendrehung bzgl. des kritischen Punktes aber nicht 180° beträgt, da die Phase von $k_p G$ bei -180° für alle Frequenzen liegt.

- b) Erweitern Sie den Regler K auf geeignete Weise, sodass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist. Achten Sie darauf, dass die Anforderung an die Durchtrittsfrequenz weiterhin eingehalten wird.

Lösungsweg: Um das Nyquist Kriterium zu erfüllen, müsste dem Regler ein stabiles, phasenhebendes Element hinzugefügt werden, da dann weiterhin GK 2 Pole auf der imaginären Achse hätte und die Phasendrehung 180° betragen würde. Dies kann durch ein Lead-Element erreicht werden.

Gleichzeitig muss darauf geachtet werden, dass die Eckfrequenzen des Lead-Elements weit genug nach rechts gelegt werden, um die Durchtrittsfrequenz nicht zu verändern. Beispielsweise kann

$$K(s) = 100v \frac{s + w}{s + vw}$$

mit $v = w = 10$ gewählt werden. Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 9 die Ortskurven von G und GK dargestellt.

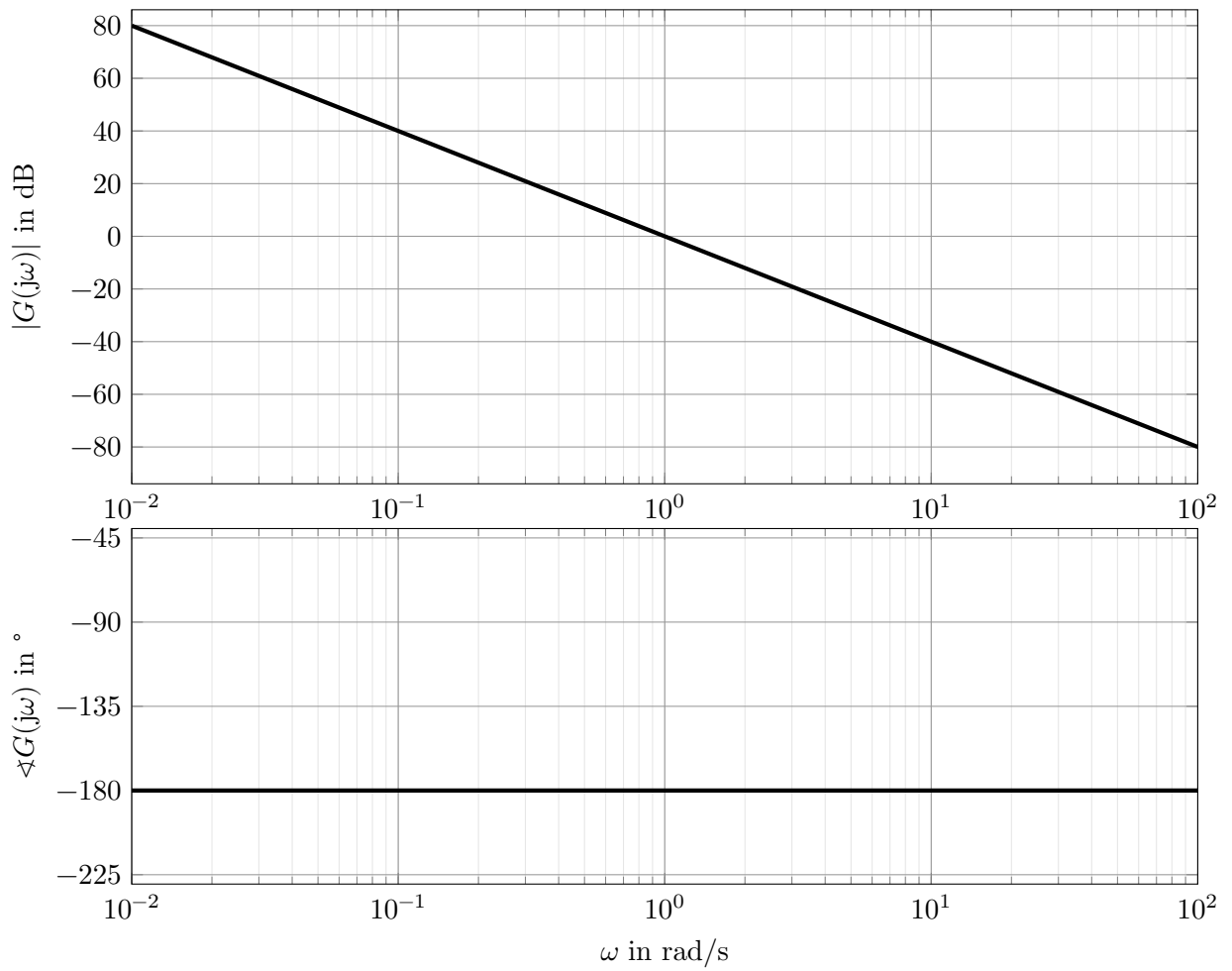


Abbildung 8: Bode Diagramm von G .

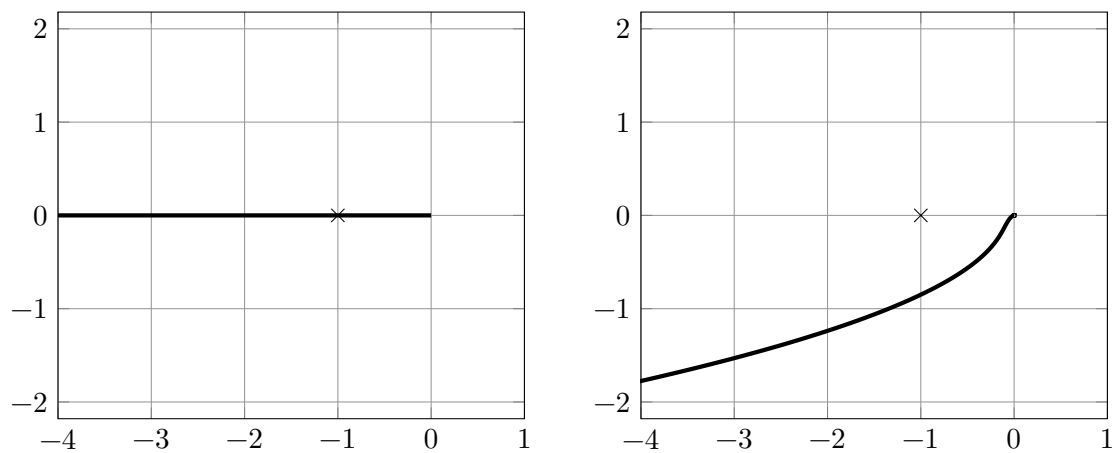


Abbildung 9: Ortskurven von G (links) und GK (rechts).

- c) Es wird ein rampenförmiger Verlauf der Führungsgröße $D(s) = \frac{d_0}{s^2}$ auf das System gegeben. Kommt es mit dem von Ihnen gewählten Regler K zu einer bleibenden Regelabweichung?

Lösungsweg: Wir bestimmen die Sensitivität mit dem gewählten Regler zu

$$S(s) = \frac{1}{1 + GK} = \frac{1}{1 + k_p v \frac{s+w}{s^2(s+vw)}} = \frac{s^2(s+vw)}{s^2(s+vw) + k_p v(s+w)}.$$

Mit dem Laplace-Grenzwertsatz erhalten wir für die rampenförmige Führungsgröße

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2(s+vw)}{s^2(s+vw) + k_p v(s+w)} \frac{r_0}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{r_0(s+vw)}{s^2(s+vw) + k_p v(s+w)} = 0, \end{aligned}$$

also keine bleibende Regelabweichung.

- d) Nun wirkt eine sprungförmige Eingangsstörung $Z(s) = \frac{z_0}{s}$ auf das System. Erweitern Sie Ihren Regler K , sodass er die Störung im stationären Zustand ausregelt. Stellen Sie sicher, dass die Phase bei der Durchtrittsfrequenz durch Ihre Modifikation nicht zu sehr abgesenkt wird.

Lösungsweg: Das Übertragungsverhalten von z nach e wird durch $-SG$ beschrieben. Mit dem Laplace-Grenzwertsatz und dem bisherigen Regler erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= - \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)G(s)Z(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2(s+vw)}{s^2(s+vw) + k_p v(s+w)} \frac{1}{s^2} \frac{z_0}{s} \\ &= - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{z_0(s+vw)}{s^2(s+vw) + k_p v(s+w)} = - \frac{z_0}{k_p} \neq 0, \end{aligned}$$

also besteht eine bleibende Regelabweichung.

Daher fügen wir einen Integratoranteil zum Regler hinzu:

$$K(s) = 100(1 + \frac{1}{T_I s})v \frac{s+w}{s+vw}.$$

Wir wählen $T_I = 10$, um die Phase bei der Durchtrittsfrequenz nicht negativ zu beeinflussen. Jetzt beträgt die bleibende Regelabweichung 0:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= - \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)G(s)Z(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^3(s+vw)T_I}{s^3(s+vw)T_I + k_p v(s+w)(1+T_I s)} \frac{1}{s^2} \frac{z_0}{s} \\ &= - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{z_0 s(s+vw)T_I}{s^3(s+vw)T_I + k_p v(s+w)(1+T_I s)} = 0. \end{aligned}$$

Der geschlossene Kreis ist gemäß des Nyquist Kriteriums weiterhin stabil.

1er-Niveau

Aufgabe 4

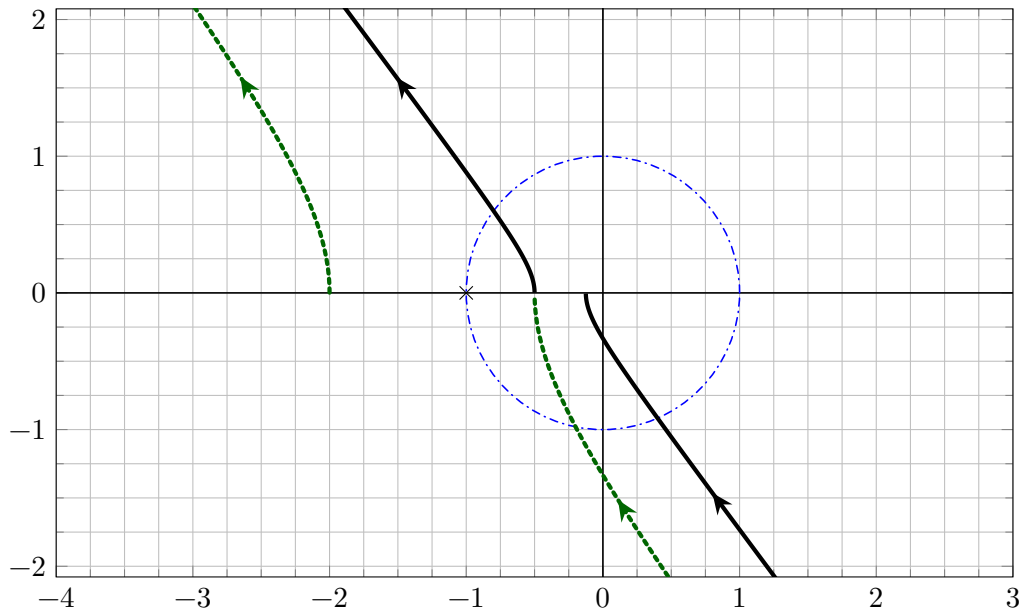


Abbildung 10: Ortskurve von G_0 mit P-Regler $K_1 = k_p$ für $k_p = \frac{1}{2}$ (—) und $k_p = 2$ (---) mit Einheitskreis (---).

Wir betrachten erneut die Ortskurve des offenen Kreises G_0 mit Strecke G und P-Regler $K_1 = k_p$ in Abbildung 10. Im letzten Wochenprogramm wurde ein einfacher P-Regler untersucht, der aber nicht alle der folgenden Anforderungen erfüllen konnte:

- Für stationäre Eingänge soll der geschlossene Kreis keine bleibende Regelabweichung aufweisen.
- Die Amplitudenreserve a_r erfüllt mindestens $a_r \geq (\frac{1}{2}, 2)$.
- Hochfrequente Störungen wie Messrauschen sollen durch den Regler unterdrückt werden.

Hinweis: Betrachtet man die gezeigte Ortskurve auf der Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dann durchläuft diese den Punkt ∞ . D. h. wenn die Kurve hier das Bild verlässt geht diese in „gerader“ Linie zu ∞ . Das Hilfsblatt zum Beweis des Nyquist Kriteriums kann in diesem Zusammenhang zur Lösung von Teilen dieser Aufgabe hilfreich sein.

Hinweis: Zur Lösung und zum selbst Nachrechnen: $G(s) = \frac{-(s-2)^2}{(4s^2+4)}$.

- Ein erfahrener Kollege Herr R. Egler schlägt vor den P-Regler mit einem Integrator in Reihe zu schalten, da es immer sinnvoll sei einen Integrator in den Regler einzubauen (Stichwort Internal Model Principle). Hilft das hier weiter, um die Anforderungen zu erfüllen?

Lösung: Ja, durch den Regler könnten jetzt die Anforderung i) und iii) erfüllt werden, da jetzt $G_0(j0) = \infty$ und $G_0(j\infty) = 0$ gilt. Die Anforderung ii) war ja bereits mit dem P-Regler erfüllbar. **Achtung**, es gibt jedoch noch ein Problem mit der Stabilität (siehe nächste Teilaufgabe). Ohne Stabilität ist natürlich keine der Anforderung erfüllt.

Lösungsweg: Aus $G_0(j\omega) = \frac{k_p}{s} G(s)$ folgt, da keine Nullstelle von G bei 0 liegt, dass $G_0(j0) = \infty$ und $G_0(j\infty) = 0$.

Im letzten Wochenprogramm haben wir gesehen, dass für Anforderung i)

$$\lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} = 0 \quad (1)$$

erfüllt sein muss. Da $G_0(j0) = \infty$ gilt, ist das hier der Fall.

Für Anforderung iii) hingegen soll $T(j\omega)$ für große ω klein sein, da Messrauschen hochfrequent ist und mit $T(j\omega)$ verstärkt wird. Mit $G_0(j\infty) = 0$ erhalten wir zumindest asymptotisch für $\omega \rightarrow \infty$, dass $T(j\omega) = 0$.

- b) Skizzieren Sie die Ortskurve des offenen Kreises mit dem Regler $K_2(s) = \frac{1}{2s}$. Ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil? Begründen Sie!

Lösung: Siehe Ortskurve in Abbildung 11. Das Nyquist Kriterium ist nicht mehr erfüllt, daher ist der geschlossene Kreis mit diesem Regler K_2 nicht mehr stabil und damit sind auch die Anforderungen nicht erfüllt.

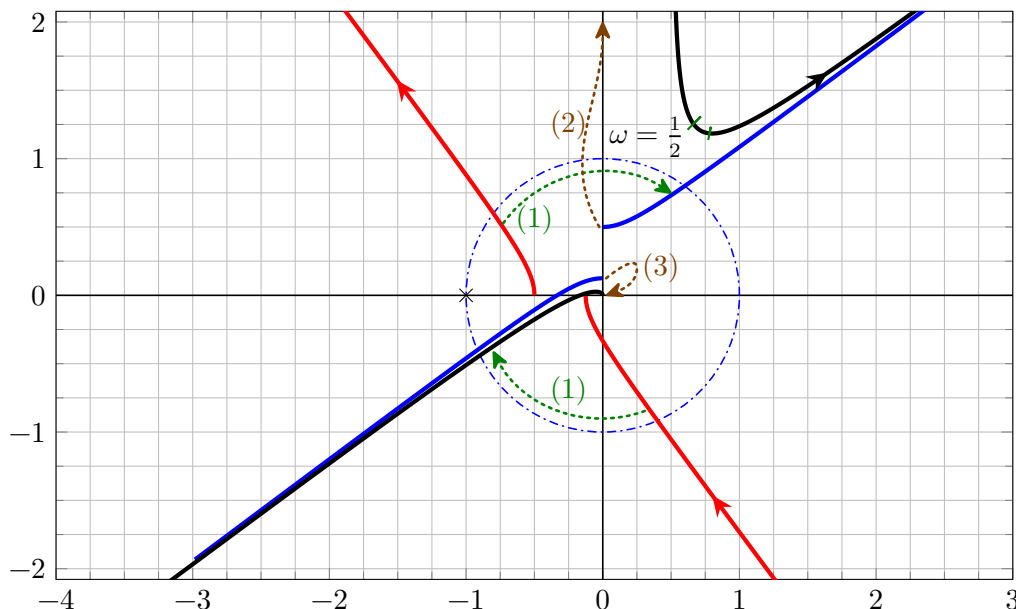


Abbildung 11: Ortskurve von $\frac{1}{2s} G$ (—) und dessen Konstruktion ausgehend von $\frac{1}{2} G$ (—)

Lösungsweg: Die Konstruktion der neuen Ortskurve (vgl. Abbildung 11) beginnen wir bei der ursprünglichen Kurve für $\frac{1}{2} G$ (—).

Zunächst verursacht der Integrator eine zusätzliche Phasendrehung von $-\frac{\pi}{2}$ für alle Frequenzen. Daher drehen wir die Ortskurve um -90° , vgl. Schritt (1) in der Abbildung, und erhalten die neue Kurve (—) als Zwischenergebnis.

Weiterhin müssen wir nur die Amplitude noch anpassen, dabei kann die Phase unverändert bleiben. In Aufgabenteil a) haben wir bereits festgestellt, dass $G_0(j0) = \infty$ und $G_0(j\infty) = 0$. Abgesehen davon wissen wir, dass in der Nähe eines Pols auf der imaginären Achse die Amplitude hauptsächlich vom dem Pol bestimmt wird.

Betrachten wir zunächst den Anfang der Ortskurve, vgl. Schritt (2). Am Anfangspunkt bei $\omega = 0$ haben wir mit dem Integrator einen Pol hinzugefügt. Daher müssen wir die Amplitude

des Anfangspunkts anpassen zu $(0, \infty)$ auf der komplexen Ebene, da die Phase gleich bleibt. Darüber hinaus wissen wir, dass die Ortskurve beim Integrator immer asymptotisch zu einer der Koordinatenachsen anfängt. Das Verhalten der komplex-konjugierten Pole kennen wir ja bereits, die Ortskurve geht asymptotisch entlang einer Diagonalen gegen ∞ . Verbinden wir die zwei Asymptoten mit einer Kurve, erhalten wir den Anfangsteil der gesuchten Ortskurve. Da der Pol bei $\pm j$ ein doppelter ist, während nur ein einfacher Pole bei 0 liegt, können wir darauf schließen, dass die Asymptote des Pols bei 0 langsamer ist. Also wird der Wendepunkt, an dem wir von der einen auf die andere Asymptote wechseln, näher an der Diagonalen liegen.

Wollten wir den Wendepunkt genauer bestimmen, müssten wir noch eine weitere Abschätzung treffen. Dazu erinnern wir uns, dass der Einfluss auf die Amplitude und Phase eines Pols bzw. einer Nullstelle circa eine Dekade vorher einsetzt. (Daher sind die Asymptoten zu $\pm j$ in Wirklichkeit ein Zusammenspiel der Pole bei $\pm j$ und Nullstellen bei -2 , da diese im Bode relative nah beieinander liegen, d.h. der Abstand kleiner als eine Dekade ist. Insbesondere verursacht dies die ungewöhnliche Phase der Asymptoten.) Dieses Wissen können wir nun nutzen um eine geeignete Frequenz ω auszuwählen, um den Wendepunkt zu finden. Zunächst muss sich dieser irgendwo in der *Mitte* der Dekade von 0.1 bis 1 befinden. Ferner erwarten wir ihn irgendwo zwischen 0° (Phase: -270°) und 45° (Phase: -315°) Phasenänderung, da das grob die Phasen der Asymptoten sind. Nun müssen wir abschätzen, nach der vorhergehenden Diskussion nehmen wir das gewichtete Mittel $(1 \cdot 0^\circ + 2 \cdot 45^\circ)/3 = 30^\circ$. Wenn wir im Phasengang einen linearen Verlauf annehmen, erhalten wir $\omega \approx 0.1 \cdot 10^{30^\circ/45^\circ} \approx 0.5$. Wie wir in Abbildung 11 sehen, passt die doch recht grobe Abschätzung hier ganz gut. Aber zur Sicherheit bestätigen wir die Abschätzung mit einem zweiten Punkt bei 0.6. Aber da nur nach einer Skizze gefragt war, braucht wir diese Abschätzung eigentlich auch nicht machen. Hier geht es mehr darum ein Verständnis für die Kurven zu bekommen.

Nun müssen wir noch den zweiten Teil der Ortskurve anpassen, vgl. Schritt (3). Da der relative Grad jetzt größer als 1 ist, geht die Kurve in den Ursprung. Dazu verkleinern wir einfach die Amplitude gegen Ende der Kurve (radial), ohne dabei die Phase zu ändern. D.h. insbesondere wir laufen weiterhin von oben in den Ursprung.

Damit erhalten wir dann die gewünschte Skizze (—), wobei die hier abgebildete Ortskurve natürlich exakt mit Matlab geplottet ist.

Mit der neuen Ortskurve können wir das Nyquist Kriterium erneut überprüfen, was nötig ist, da wir einen Pol auf der imaginären Achse hinzugefügt haben und die Ortskurve grundlegend verändert haben. Die neue Phasendrehung ist $\frac{\pi}{2}$, jedoch benötigen wir in Folge der drei Pole auf der imaginären Achse $\frac{3}{2}\pi$. Deshalb ist der geschlossene Kreis nicht asymptotisch stabil. Daher sind Anforderungen i)-iii) nicht erfüllt, da diese alle Stabilität voraussetzen.

- c) Finden Sie einen passenden Term (z.B. kann ein Term 1er Ordnung reichen) um einen Regler zu erhalten, der alle Anforderungen erfüllt. Dazu werden Sie auch einen passenden neuen Wert für die Verstärkung des Reglers wählen müssen.

Herr R. Egler schlägt vor zunächst zu untersuchen, welcher Teil der Ortskurve problematisch ist. Danach kann man durch Ergänzung eines weiteren Glieds im Regler erreichen, dass nur dieser Teil entsprechend rotiert wird.

Hinweis: Wie Sie beim Skizzieren des Nyquistdiagramm mit Integrator festgestellt haben, ergibt sich durch einen Integrator eine Drehung von 90° der gesamten Kurve, entsprechendes gilt für mehrere Integratoren. Eine Multiplikation mit -1 hingegen verursacht eine Drehung

von 180° . Drüber hinaus kennen Sie auch Elemente, die nur einen gewissen Frequenzbereich in der Phase verändern. Letztere können hilfreich sein.

Lösung: Der Regler kann zum Beispiel als $K_3 = \frac{(s-\frac{1}{2})}{14s(s+\frac{1}{2})}$ gewählt werden, dies ergibt die Ortskurve in Abbildung 12. Statt $\frac{1}{2}$ können auch viele andere Werte gewählt werden, dann muss eventuell auch ein entsprechend anderer Faktor für die Verstärkung verwendet werden als $\frac{1}{14}$.

Dieser Regler erfüllt alle Anforderungen, dies muss natürlich überprüft werden. Hier ergibt sich ein stabiler geschlossener Kreis nach Nyquist Kriterium mit den passenden Eigenschaften $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, $a_r = (0, 2.9843)$, $\omega_B = 0.2449 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $T(j\omega) \ll 1$ für $\omega \gg 2$.

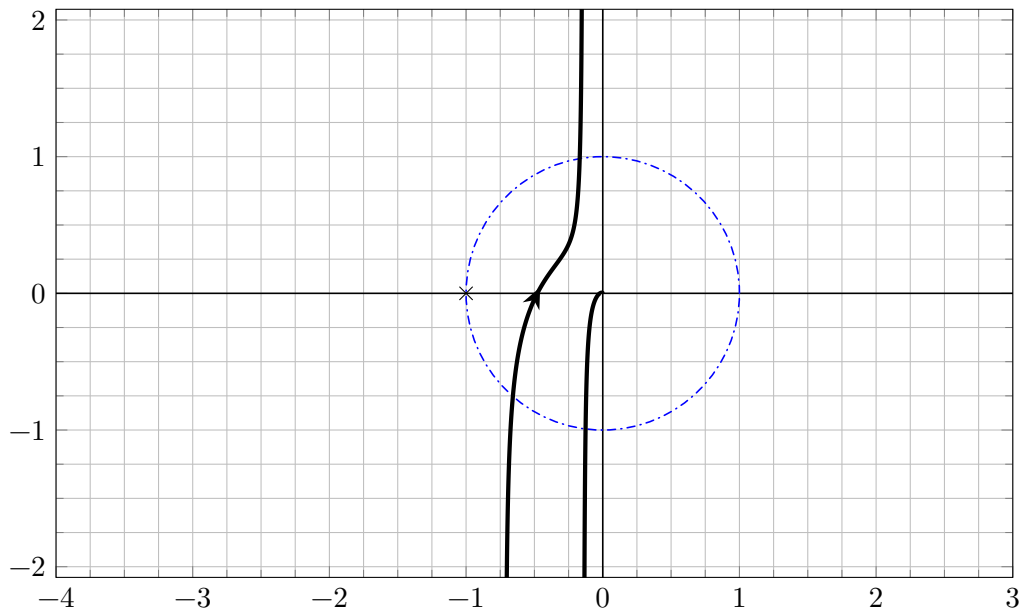


Abbildung 12: Ortskurve von GK_3

Lösungsweg: Zunächst einmal gibt es natürlich auch verschiedene andere Ansätze, die wir verfolgen könnten. Im Prinzip fangen alle damit an, dass wir das Nyquist Kriterium betrachten und schauen was fehlt um es zu erfüllen. Wir stellen fest, dass wir nur $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ anstatt der nötigen $\Delta\phi \stackrel{!}{=} \frac{3}{2}\pi$ vorliegen haben, wenn wir das System mit Integrator als Regler betrachten. Daher müssen wir eine zusätzliche Drehung von π erreichen. Denn die Anzahl imaginärer Pole können bzw. wollen wir nicht verändern, da diese nur mit einer Pol-/Nullstellen-Kürzung möglich wäre. (Eine Regler sollte niemals Pol-/Nullstellen-Kürzung ausnutzen, da dies bereits bei infinitesimal kleinen Modellungenauigkeiten fehlschlägt.) Um die Phasendrehung zu erhöhen, muss ein Teil der Ortskurve auf die andere Seite des kritischen Punkts wechseln.

Der Weg den wir hier einschlagen wollen beginnt mit der Beobachtung, dass der zweite Teil der Ortskurve $1 < \omega < \infty$ bereits einen positiven Beitrag von circa $\frac{3}{4}\pi$ leistet. Das Problem ist, dass der erste Teil $0 \leq \omega < 1$ einen Beitrag von $-\frac{1}{4}\pi$ hat. Das ist nicht überraschend. Die Asymptote des Polpaars bei $\pm j$ ist stets eine Gerade, somit kann die darauffolgende Drehung nur $-\pi$, 0 oder π sein. Die verbleibenden π stammen vom Integrator, der die Kurve bei 90° starten lässt. Wir wollen nun den ersten Teil der Ortskurve so verändern, dass der Beitrag positiv ist. Dazu muss die Ortskurve die Seite des kritischen Punkts wechseln.

Da dieser Teil der Kurve komplett im 1. Quadranten verläuft, kann dies nicht mit einem Verstärkungsfaktor gelingen. Als nächstes gibt es die Möglichkeit, die Kurve mit Hilfe von Lag-/Lead-Elementen zu verschieben. Da wir die Kurve um über 90° drehen müssten und gleichzeitig die Amplitude absenken müssten um z. B. mit dem Punkt $\omega = \frac{1}{2}$ in den Einheitskreis zu kommen, wären dazu mehrere dieser Elemente nötig. Dann würde der erste Teil der Ortskurve bei 90° anfangen, den kritischen Punkt einmal umrunden und bei ca. 45° gegen ∞ gehen. Das wäre aber insgesamt $\Delta\phi = \frac{5}{2}\pi$, also genau 180° zu viel.

Wenn wir uns das genauer anschauen, passt der Anfangspunkt der Ortskurve nicht. Ein einzelner Integrator führt in Normalfall zu einer Ortskurve, die bei -90° anfängt. Wenn wir den Anfangspunkt um 180° drehen würden, wären das genau die π weniger die wir brauchten bei der vorherigen Idee. Ferner würden wir mit dem Verlegen des Anfangspunkts keine Lag-/Lead-Elementen mehr brauchen, da dann die Kurve durch die negative reelle Achse geht und eine Anpassung der Verstärkung reicht um die Ortskurve auf die richtige Seite des kritischen Punkte zubekommen.

Wie erreichen wir also diese Drehung? Wir wissen, dass eine 180° -Drehung durch eine Multiplikation mit -1 erreicht wird. Jedoch würde das natürlich den ganzen Frequenzbereich beeinflussen.

Ein Allpass erster Ordnung $(\pm \frac{s-\omega_a}{s+\omega_a})$ wechselt bei einer wählbaren Frequenz das Vorzeichen (d. h. eine Phasenänderung von 180°) und besitzt eine konstante Amplitude von 1. Damit können wir also nur einen ausgewählten Teil des Frequenzbereich mit „ -1 multiplizieren“. Da wir mit der -1 beginnen möchten, wählen wir als zusätzliches Element

$$\frac{s-\omega_a}{s+\omega_a}, \quad \omega_a > 0.$$

Nun müssen wir die Frequenz ω_a wählen. Dabei ist zu beachten, dass die Phase nicht springt, sondern circa im Verlauf von zwei Dekaden von 180° auf 0° fällt. Daher, desto näher wir ω_a an dem Polpaar und dem darauf folgenden Nullstellenpaar wählen, um größer die Änderung (Drehung) der Asymptote des Polpaars, was wir ja vermeiden wollten. Auf der anderen Seite, um so näher wir ω_a an dem Integratorpol bei Null wählen, um so größer die Amplitude, bei der die Drehung aufhört zu wirken, da wir im Regime von $\frac{1}{s}$ sind. Also darf ω_a weder zu klein noch zu groß gewählt werden.

Abbildung 13 zeigt die Ortskurve für verschiedene ω_a , beginnend eine Dekade vor dem Polpaar bis zu der Grenzfrequenz $\omega_a \asymp 3$, bei der die Asymptote des Polpaars die Seite des kritischen Punkt wechselt.

Zunächst sehen wir, dass wie erwartet für kleine ω die Asymptote des Polpaars die Richtung nur wenig verändert. Dafür ist die Amplitude, bei der die reelle Achse geschnitten wird, auch entsprechend größer.

Durch die Wahl eines passenden Verstärkungsfaktors kann der geschlossene Kreis nun stabilisiert werden, vgl. Abbildung 14.

Damit ergibt sich der Regler zu

$$K(s) = \frac{k_i}{s} \frac{s-\omega_a}{s+\omega_a}. \quad (2)$$

Die Eigenschaften des geschlossene Kreises für verschiedene Wahlen von k_i und ω_a sind in Tabelle 1 zu sehen. Alle diese Regler bis einschließlich $\omega_a = 2.75$ erfüllen die Anforderungen.

Die Regler zwischen $\omega_a = 0.5$ und $\omega_a = 0.75$ scheinen dabei am besten geeignet, da der Verstärkungsfaktor k_i am größten gewählt werden kann und zugleich die Phasenreserve am größten ist. Für die Lösung wählen wir $\omega_a = 0.5$, da dieser bei vernünftigen Eigenschaften zugleich einen guten Abstand zum Pol bei $\omega = 1$ hat. Ferner lässt sich dieser Wert auch händisch einfacher finden.

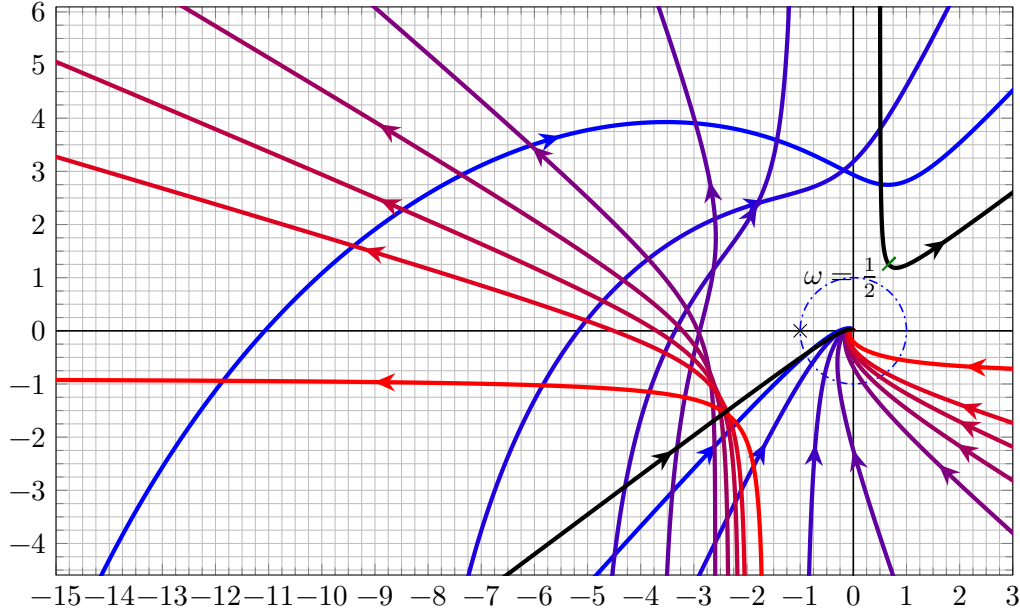


Abbildung 13: Ortskurve von $\frac{1}{2s} \frac{s-\omega_a}{s+\omega_a} G$ für $\omega_a = \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 3\}$ in blau bis rot und die Ortskurve zu $\frac{1}{2s} G$ als Vergleich.

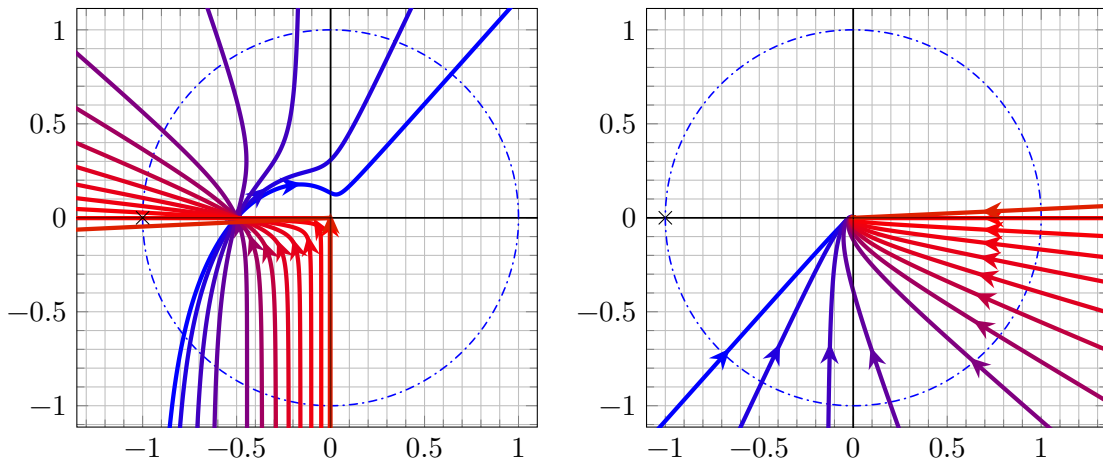


Abbildung 14: Ortskurven von $\frac{k_i}{s} \frac{s-\omega_a}{s+\omega_a} G$ für $\omega_a = \{0.1\} \cup \{0.25, 0.5, \dots, 3.25\} \setminus \{1\}$ und α_f , so dass die Kurve -0.5 schneidet, in blau bis rot. Links für $0 < \omega < 1$ und rechts für $1 < \omega < \infty$.

ω_a	k_i	a_r	γ_r	$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$
0.1	0.022580	0.5	39°	0
0.25	0.048325	0.5	42°	0
0.5	0.074608	0.5	47°	0
0.75	0.086524	0.5	53°	0
1.25	0.085512	0.5	−27°	0
1.5	0.077865	0.5	−19°	0
1.75	0.067547	0.5	−13°	0
2	0.055492	0.5	−9°	0
2.25	0.042348	0.5	−6°	0
2.5	0.028481	0.5	−3.5°	0
2.75	0.014359	0.5	−1.5°	0
3.0	0.001108	instabil		
3.25	0.000086	instabil		

Tabelle 1: Eigenschaften verschiedener Regler $K(s) = \frac{k_i}{s} \frac{s - \omega_a}{s + \omega_a}$