

Wochenprogramm **6** mit Lösungsweg: Loopshaping 1

Bestehensniveau

Aufgabe 1

Wir betrachten den Standardregelkreis in Abbildung 1. Das gewünschte Bode Diagramm des offenen Kreises $G_0 = GK$ und die sich daraus ergebende komplementäre Sensitivität sind in Abbildung 2 gezeigt.

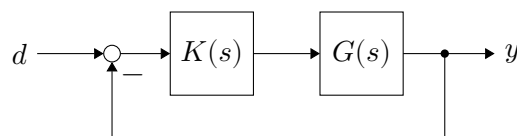


Abbildung 1: Standardregelkreis.

- a) Bestimmen Sie die gewünschte Phasenreserve und Durchtrittsfrequenz.

Lösung: Die Durchtrittsfrequenz ist $\omega_D = 7 \text{ rad/s}$. Die Phasenreserve kann bei $\omega_D = 7 \text{ rad/s}$ zu $\Phi_r = -125^\circ + 180^\circ = 55^\circ$ abgelesen werden.

- b) Wie verhält sich der gewünschte geschlossene Kreis hinsichtlich der bleibenden Regelabweichung für den Fall, dass der Regelkreis mit einer Sprungfunktion angeregt wird?

Lösung: Es gibt keine bleibende Regelabweichung.

Lösungsweg: Der gewünschte Regler besitzt einen Integrator-Anteil. Man kann dies auch daran erkennen, dass die stationäre Verstärkung des geschlossenen Kreises $T(0)$ gleich eins ist, oder alternativ, dass $|G_0(j\omega)|$ für kleine ω gegen unendlich geht.

- c) Zeichnen Sie die folgende Strecke G in das Bode Diagramm (Abbildung 2) ein:

$$G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+1)}.$$

Lösung: Siehe Abbildung 3.

- d) Entwerfen Sie für diese Strecke einen PI-Regler $K = K_1 K_2$ mit

$$K_1(s) = (T_I s + 1),$$

$$K_2(s) = \frac{K_P}{T_I s},$$

so dass der offene Kreis die Vorgaben aus Abbildung 2 erfüllt.

Hinweis: Überlegen Sie zunächst wie Sie K_1 wählen müssen, damit die Steigungsänderungen des offenen Kreises mit dem Wunschverlauf übereinstimmen.

Lösung: $T_I = 1$, $K_P = 100$.

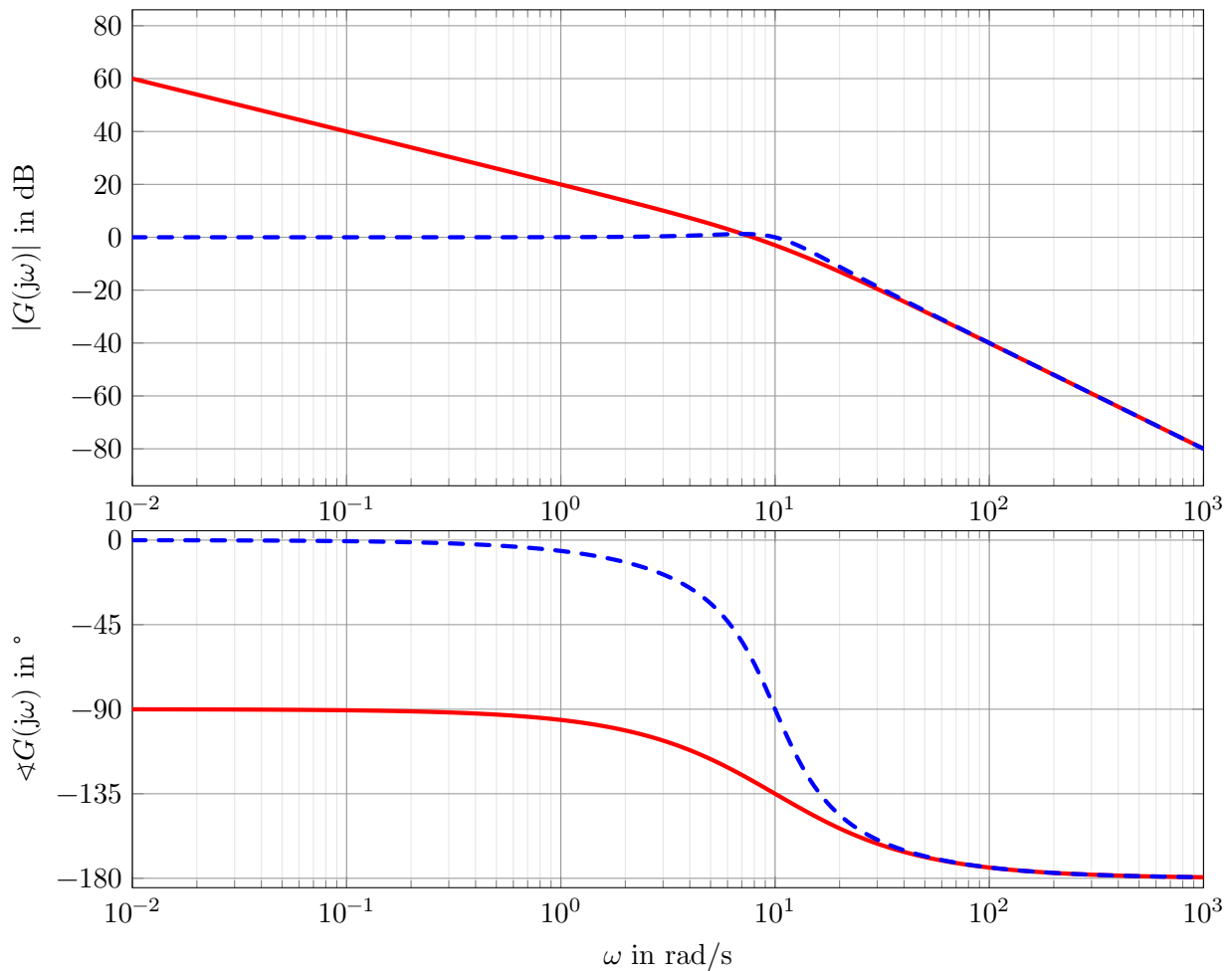


Abbildung 2: Wunschverlauf offener Kreis (—). Wunschverlauf geschlossener Kreis (---).

Lösungsweg: Der folgende Rechenweg ist nur eine Möglichkeit.

Zunächst wird über $K_1(s) = (T_I s + 1)$ mit $T_I = 1$ der Pol bei $s_1 = -1$ kompensiert. Die Strecke $\tilde{G} = GK_1$ besitzt nun nur noch einen -20dB Knick bei $\omega = 10$. Als Nächstes nehmen wir den Integrator $\frac{1}{s}$ zur Strecke $\tilde{G}$ hinzu. Die Strecke $\tilde{G}(s)\frac{1}{s}$ hat dann eine Anfangssteigung von $-20\frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ und bei $\omega = 1$ die gleiche Amplitude wie $\tilde{G}$, also -20 dB . Nun wird noch der Faktor $\frac{K_P}{T_I}$ hinzugenommen. Dieser Faktor wird so bestimmt, dass die Kurve von $\tilde{G}(s)\frac{1}{s}$ um 40 dB nach oben geschoben wird. Dies wird durch $K_p = 100$ erreicht.

- e) Zeichnen Sie das Bode Diagramm des entworfenen Reglers K in Abbildung 2 ein.

Lösung: Siehe Abbildung 3.

- f) Bestimmen Sie für die neue Strecke $G_0 = GK$ die Übertragungsfunktionen der Sensitivität S und der komplementären Sensitivität T .

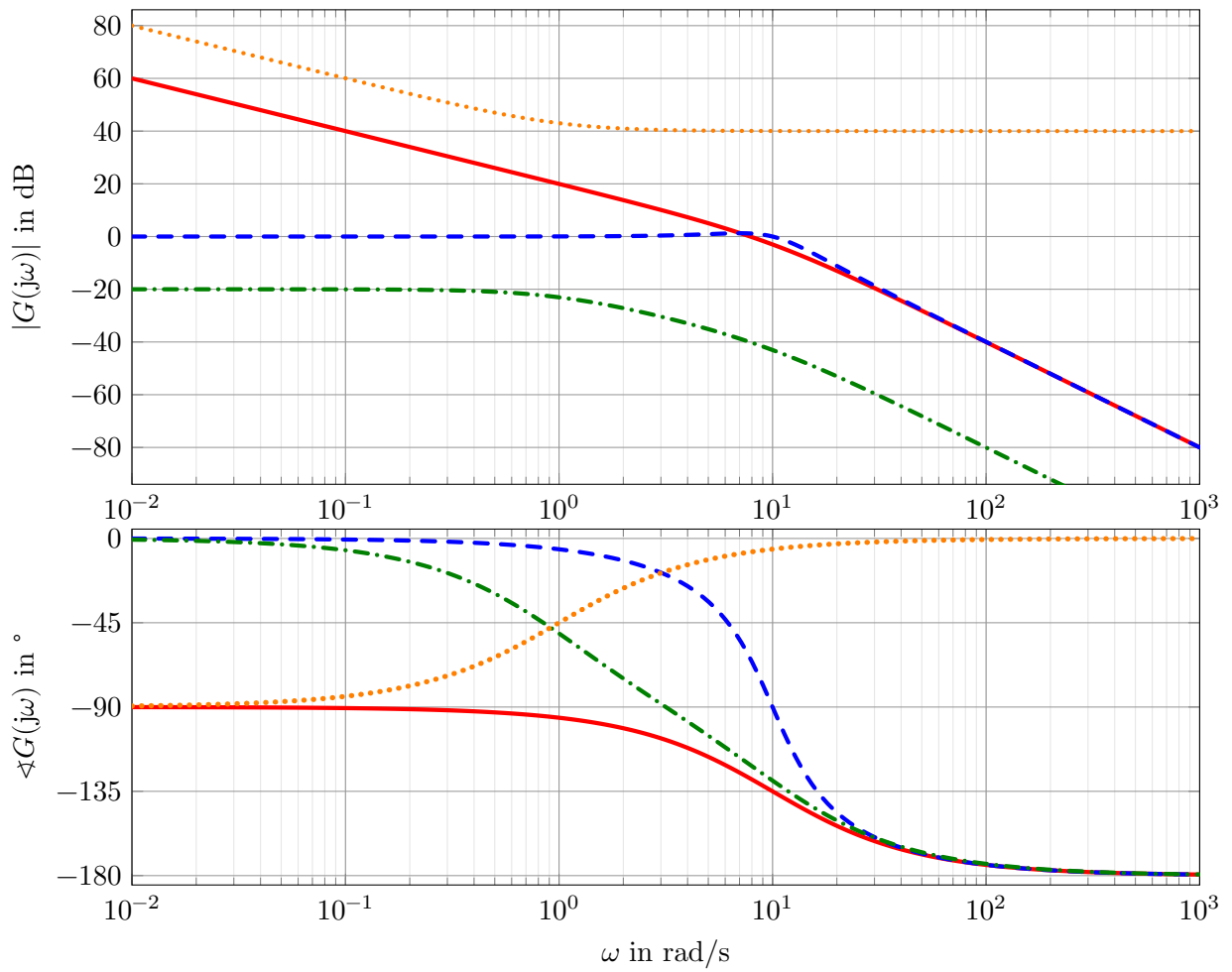


Abbildung 3: Wunschverlauf offener Kreis (—). Wunschverlauf geschlossener Kreis (---). Strecke G (-·-). Kompensator K (···).

Lösung:

$$G_0(s) = \frac{1}{(s+10)(s+1)} \frac{100}{s} (s+1) = \frac{100}{s(s+10)},$$

$$S(s) = \frac{s(s+10)}{s^2 + 10s + 100},$$

$$T(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}.$$

Standardniveau

Aufgabe 2

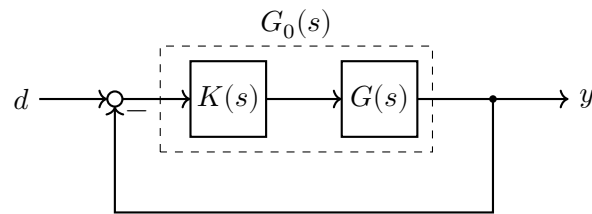


Abbildung 4: Standardregelkreis.

Gegeben sei eine Regelstrecke G mit einem Pol auf der imaginären Achse und einem Pol in der offenen rechten Halbebene, deren Bodediagramm in Abbildung 5 dargestellt ist. Die Strecke wird mit einem Regler K im Standardregelkreis gemäß Abbildung 4 geschlossen.

Der Regler K soll so ausgelegt werden, dass folgende Anforderungen erfüllt sind:

- i) asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises,
- ii) Durchtrittsfrequenz > 1 rad/s,
- iii) keine bleibende Regelabweichung bei einer sprungförmigen Sollwertänderung,
- iv) Phasenreserve $> 45^\circ$.

- a) Geben Sie alle Werte für $k_p > 0$ an, mit denen ein P-Regler $K(s) = k_p$ den geschlossenen Kreis asymptotisch stabilisiert, also Anforderung i) erfüllt.

Lösung: $k_p > 50$

Lösungsweg: Da die Regelstrecke einen Pol auf der imaginären Achse und einen Pol in der offenen rechten Halbebene hat, ist der geschlossene Kreis nach dem Nyquist Kriterium genau dann asymptotisch stabil, wenn die Phasendrehung des offenen Kreises bezüglich des kritischen Punktes $(-1, 0)$

$$\Delta\phi\{G_0(j\omega)\} = 270^\circ \quad (1)$$

beträgt, wenn ω den Wertebereich von 0 bis ∞ durchläuft. Die Ortskurve von G ist in Abbildung 6 dargestellt. Aus dem Bode Diagramm kann man ablesen, dass der "letzte" Schnittpunkt von G mit der reellen Achse bei $(-\frac{1}{50}, 0)$ liegt.

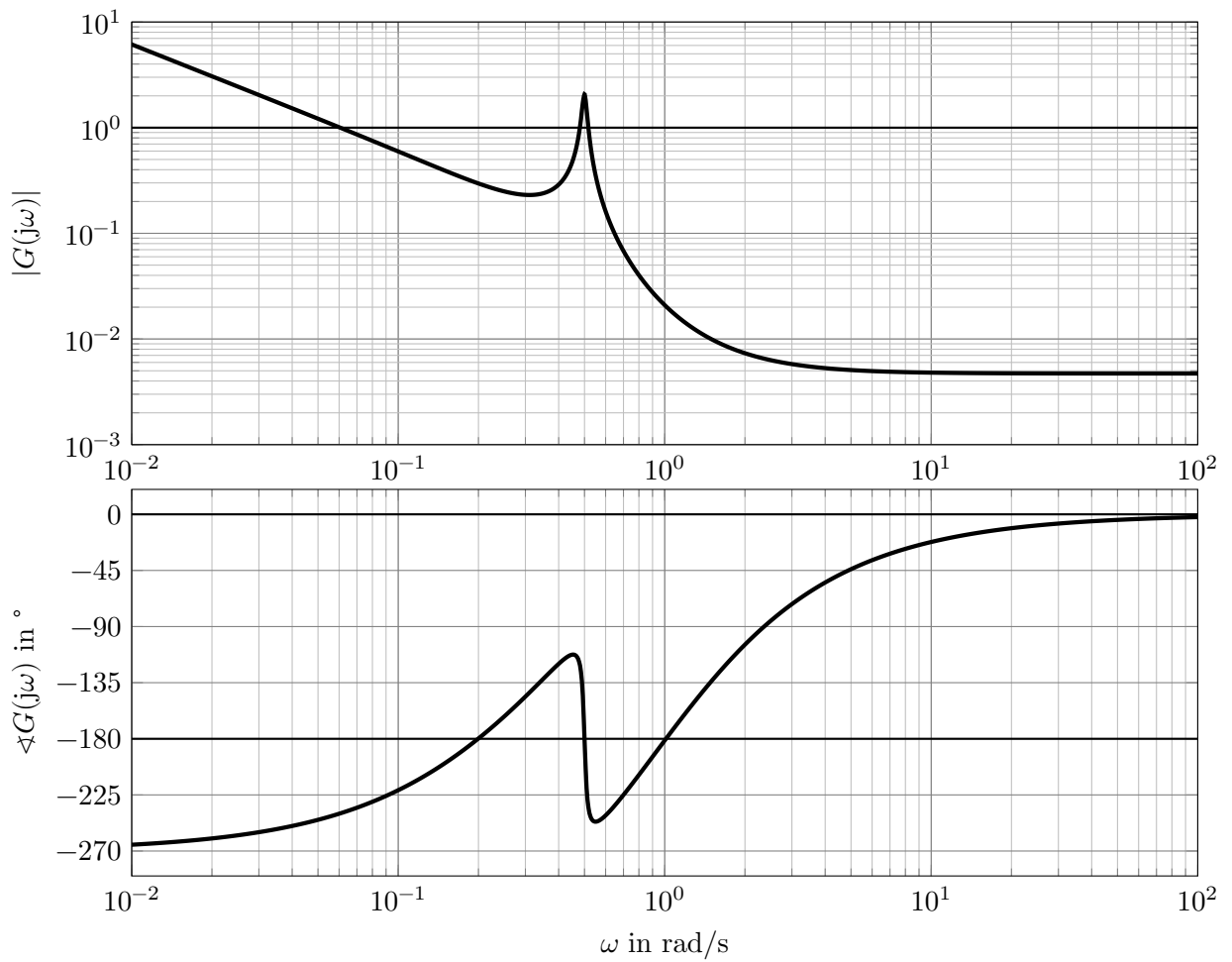


Abbildung 5: Bode Diagramm der Regelstrecke G . Die Eckfrequenzen der Pol- und Nullstellen befinden sich im abgebildeten Frequenzbereich.

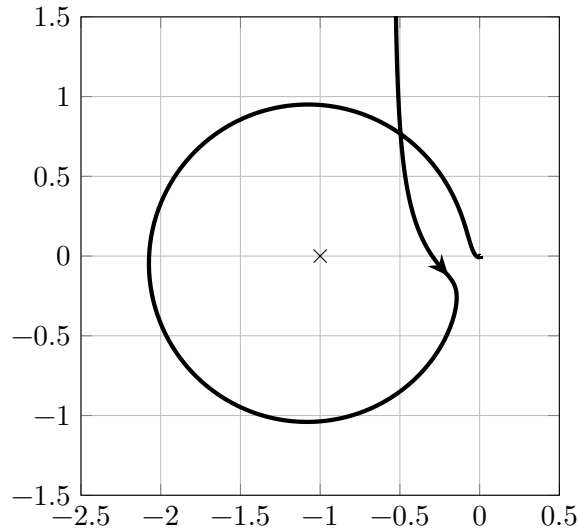


Abbildung 6: Ortskurve von G .

Da ein P-Regler die Ortskurve lediglich skaliert, wird ersichtlich, dass der “letzte” Schnittpunkt von G_0 mit der reellen Achse einen Betrag > 1 haben muss, damit die Ortskurve des offenen Kreises die benötigte Phasendrehung bezüglich des kritischen Punktes $(-1, 0)$ hat. Dies wird folglich durch $k_p > \frac{1}{0.02} = 50$ erreicht.

- b) Welche der weiteren Anforderungen werden für alle in Aufgabenteil a) bestimmten stabilisierenden P-Regler erfüllt?

Lösungsweg:

- ii) Für $k_p = 50$ liegt die Durchtrittsfrequenz genau bei 1 rad/s. Da höhere k_p die Durchtrittsfrequenz weiter erhöhen würden, ist die Anforderung erfüllt.
- iii) Ist bereits durch das integrierende Verhalten der Regelstrecke G sichergestellt.
- iv) Wir betrachten $k_p = 50 + \epsilon$, wobei $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt wird. Mit diesem Regler beträgt die Phasenreserve 0° . Daher ist diese Anforderung nicht für alle stabilisierenden Regler aus Aufgabenteil a) erfüllt.

- c) Wie muss der Parameter $k_p > 0$ des P-Reglers gewählt werden, damit alle Anforderungen i) - iv) erfüllt sind?

Lösungsweg: Die letzte Anforderung, die nach Aufgabenteil c) noch erfüllt werden muss, ist das Erreichen der geforderten Phasenreserve iv). Da diese mehr als 45° betragen soll, und $k_p > 50$ erfüllen muss, muss am letzten Schnittpunkt der Phase mit der 135° -Linie $|G_0(j\omega)| = 1$ gelten. Da man am dafür zu betrachtenden Schnittpunkt mit der 135° -Linie $|G(j\omega)| = 0.01$ ablesen kann, folgt daraus, dass $k_p > \frac{1}{0.01} = 100$ sein muss, um Anforderung iv) zu erfüllen.

Aufgabe 3

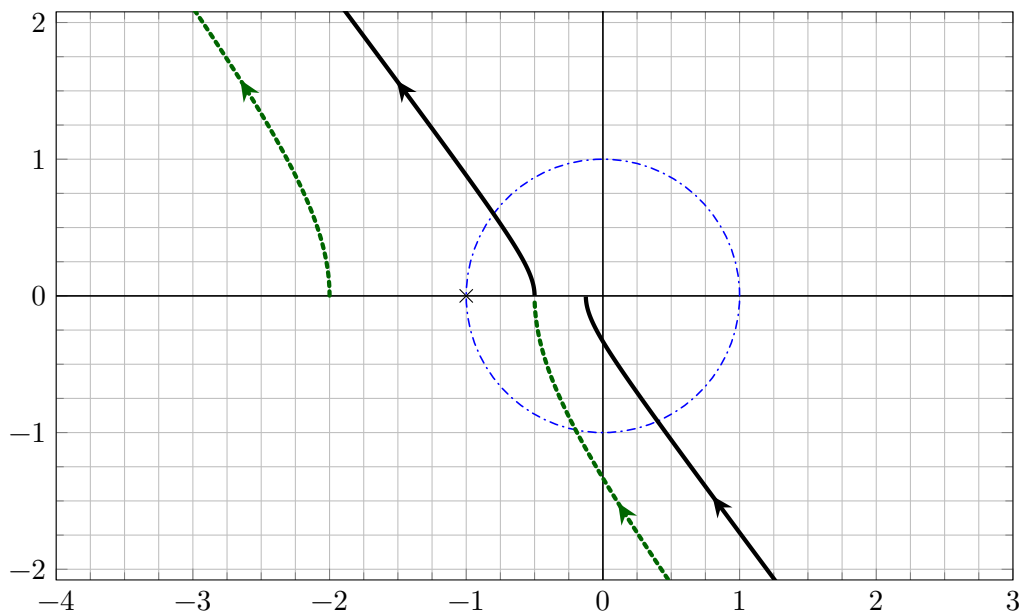


Abbildung 7: Ortskurve von G_0 mit P-Regler $K_1 = k_p$ für $k_p = \frac{1}{2}$ (—) und $k_p = 2$ (---) mit Einheitskreis (-.-.-).

Gegeben sei die Ortskurve des offenen Kreises G_0 mit Strecke G und P-Regler $K_1 = k_p$ in Abbildung 7. Zunächst soll der offene Kreis mit einem einfachen P-Regler untersucht werden.

Hinweis: Betrachtet man die gezeigte Ortskurve auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dann durchläuft diese den Punkt ∞ . D.h. wenn die Kurve hier das Bild verlässt geht diese in „gerader“ Linie zu ∞ . Das Hilfsblatt zum Beweis des Nyquist Kriteriums kann in diesem Zusammenhang zur Lösung von Teilen dieser Aufgabe hilfreich sein.

Hinweis: Zur Lösung und zum selbst Nachrechnen: $G(s) = \frac{-(s-2)^2}{(4s^2+4)}$.

- a) Bestimmen Sie den relativen Grad von G .

Lösung: Der relative Grad ist 0.

Lösungsweg: Da $G(j\infty) \neq 0$, muss der relative Grad 0 sein.

- b) G hat eine doppelte Nullstelle bei 2, und besitzt sonst keine Nullstellen. Welche Aussage können Sie über die Pole von G treffen?

Lösung: Es gibt zwei Polstellen, genauer gesagt eine komplex-konjugierte Polstelle auf der imaginären Achse. Um ganz genau zu sein sind die Pole ablesbar: $s_{1|2} = \pm j$.

Lösungsweg: Da der relative Grad 0 ist, gibt es gleich viele Polstellen wie Nullstellen, d. h. es gibt zwei Polstellen. Weiterhin geht die Ortskurve durch ∞ , damit muss mindestens eine der Polstellen auf der imaginären Achse liegen. Da wir nur Übertragungsfunktionen mit reellen Koeffizienten betrachten, gibt es zu jedem Pol auch einen komplex-konjugierten Pol. Sprich wenn ein Pol bei $j\omega_p$ mit der Frequenz $0 < \omega_p < \infty$ liegt, muss dazu auch eine komplex-konjugierte Polstelle bei $-j\omega_p$ existieren.

Betrachten wir nun $k_p = \frac{1}{2}$ (—) oder $k_p = 2$ (-----). Da $G(s)$ aufgrund unseres bisherigen Wissens die Form $G(s) = \alpha \frac{(s-2)^2}{(s^2 + \omega_p^2)}$ haben muss, kann man bei $\omega = 0$ ablesen, dass $k_p G(0) = k_p \alpha \frac{4}{\omega_p^2} = -k_p$. Weiterhin, da der relative Grad 0 ist und zugleich $k_p G(j\infty) = k_p \alpha$ gilt, folgt, dass $k_p G(j\infty) = -\frac{k_p}{4}$. Daher ist $\alpha = -\frac{1}{4}$ und $\omega_p = 1$. Damit sind die Pole exakt bestimmt zu $s_{1|2} = \pm j$.

- c) Bestimmen Sie alle $k_p > 0$, für die der P-Regler den geschlossenen Kreis stabilisiert. Für welche der beiden in Abbildung 1 abgebildeten Ortskurven stabilisiert der verwendete P-Regler den geschlossenen Kreis ($k_p = \frac{1}{2}$ oder $k_p = 2$)?

Lösung: $k_p \in (0, 1)$

Lösungsweg: Da wir aus b) wissen, dass G zwei Pole auf der imaginären Achse besitzt, können wir das Nyquist-Kriterium anwenden. Demgemäß ist der geschlossene Kreis genau dann asymptotisch stabil, wenn die Drehung um den kritischen Punkt $(-1, 0)$ gleich π bzw. 180° ist. Die Phasendrehung der Ortskurve zu $k_p = 2$ beträgt 0, während die Ortskurve zu $k_p = \frac{1}{2}$ eine Drehung von π durchläuft. Daher ist der Regler $k_p = \frac{1}{2}$ asymptotisch stabilisierend. Berechnen wir die Amplitudenreserve für diesen Regler, erhalten wir $a_r = (0, 2)$. Daher erhalten wir, dass der P-Regler für $k_p = (0, 1)$ stabilisiert.

- d) Bestimmen Sie die Phasenreserve für G_0 mit dem stabilisierenden P-Regler aus Aufgabenteil c).

Lösung: $\gamma_r \approx 114^\circ$

Im Folgenden soll ein Regler entworfen werden, der die folgenden Anforderungen erfüllt:

- i) Für stationäre Eingänge soll der geschlossene Kreis keine bleibende Regelabweichung aufweisen.
- ii) Die Amplitudenreserve a_r erfüllt mindestens $a_r \supseteq (\frac{1}{2}, 2)$.
- iii) Hochfrequente Störungen wie Messrauschen sollen durch den Regler unterdrückt werden.

Als Ausgangspunkt für einen Reglerentwurf mittels Loopshaping wird zunächst ein P-Regler vorgeschlagen.

- e) Welche Anforderung kann mit einem reinen P-Regler nicht erfüllt werden? Begründen Sie!

Lösung: Da die Ortskurve bei einem endlichen Wert beginnt, ist die bleibende Regelabweichung für stationäre Eingänge nicht 0. Denn es gilt für die Regelabweichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 + (-\frac{1}{2})} = 2 > 0.$$

Damit ist Anforderung i) nicht erfüllt.