

Wochenprogramm 5 mit Lösungsweg: Regelgüte 3

Bestehensniveau

Aufgabe 1

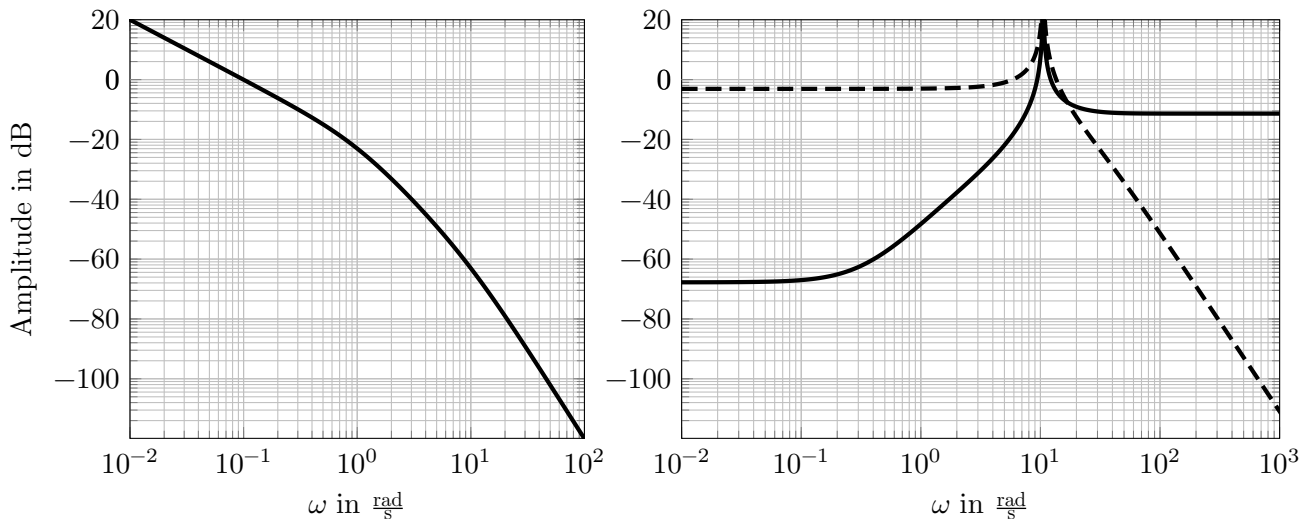


Abbildung 1: Amplitudengang von G_0 (links), X (—) und Y (---). Alle Eckfrequenzen der Pol-/Nullstellen befinden sich im abgebildeten Frequenzbereich.

Gegeben sei der Amplitudengang des offenen Kreises G_0 (Abbildung 1 links). Im Folgenden wird der stabile geschlossene Kreis gemäß Abbildung 2 betrachtet.

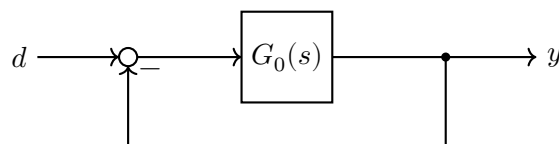


Abbildung 2: Regelkreis.

- a) Lesen Sie die bleibende Regelabweichung ab.

Lösung: Man liest ab $|G_0(0)| = \infty$, damit ergibt sich eine bleibende Regelabweichung von 0.

- b) Lesen Sie die Bandbreite ω_B des geschlossenen Kreises approximativ anhand des offenen Kreises G_0 ab.

Lösung: Die Bandbreite des geschlossenen Kreises lässt sich approximativ anhand der Durchtrittsfrequenz des offenen Kreises ablesen. Damit gilt $\omega_B \approx \omega_D = 0.1 = 10^{-1}$.

Herr R. Egler behauptet, dass in Abbildung 1 rechts die Sensitivität S von G_0 als X und die komplementäre Sensitivität T von G_0 als Y dargestellt ist.

- c) Geben Sie mindestens zwei unterschiedliche Gründe an, warum X nicht die Sensitivität S von G_0 und Y nicht die komplementäre Sensitivität T von G_0 sein kann.

Lösung:

- Die bleibende Regelabweichung, die aus $S = X$ folgt ist $\neq 0$.
- Die Bandbreite für $T = Y$ liegt bei etwa 10 rad/s, was weit entfernt von der Durchtrittsfrequenz von G_0 ($= 0.1$ rad/s) ist.
- Wegen dem fundamentalen Dilemma der Regelungstechnik muss gelten $S + T = 1$, jedoch $|X(\infty) + Y(\infty)| \leq |X(\infty)| + |Y(\infty)| = 0.3 + 0 < 1$. Des Weiteren gilt $|X(0) + Y(0)| \leq |X(0)| + |Y(0)| = 0.0004 + 0.7 < 1$. Daher können X und Y nicht die Sensitivität und komplementäre Sensitivität desselben Systems sein.
- $|G_0(\infty)| = 0$, daher $S(\infty) = \frac{1}{1+G_0(\infty)} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq X(\infty) = 0.3$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Strecke G sowie zwei Regler K_1 und K_2 , die im Standardregelkreis gemäß Abbildung 3 geschlossen werden. Abbildung 4 zeigt die Bode Diagramme der beiden *offenen* Kreise $G_{1,0}$ und $G_{2,0}$.

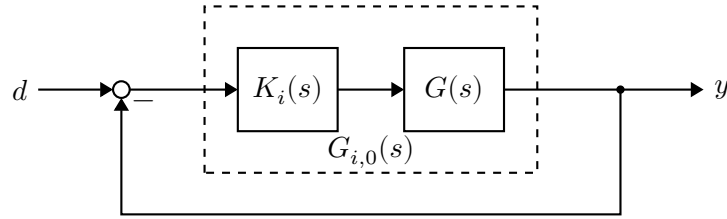


Abbildung 3: Standardregelkreis.

- a) Der *geschlossene* Kreis werde mit einem sinusförmigen Referenzsignal mit einer Amplitude von 1 und einer Frequenz von 10 rad/s angeregt. Abbildung 5 zeigt drei mögliche Ausgänge. Ordnen Sie dem mit Regler K_1 bzw. K_2 geschlossenen Kreis das entsprechende Ausgangssignal zu.

Lösung:

- $K_1 \rightarrow$ Abbildung (c).
- $K_2 \rightarrow$ Abbildung (b).

Lösungsweg:

- K_1 : Aus Abbildung 4 lässt sich die Durchtrittsfrequenz des offenen Kreises ablesen: $\omega_D = 3$ rad/s. Daraus folgt dann $\omega_B \approx 3$ rad/s. Die Bandbreite des geschlossenen Kreises ist also *kleiner* als die Frequenz des Referenzsignals. D.h., das Referenzsignal wird abgeschwächt. $\Rightarrow$ Abbildung (c).
 - K_2 : Aus Abbildung 4 lässt sich die Durchtrittsfrequenz des offenen Kreises ablesen: $\omega_D = 30$ rad/s. Daraus folgt dann $\omega_B \approx 30$ rad/s. Die Bandbreite des geschlossenen Kreises ist also *größer* als die Frequenz des Referenzsignals. D.h., die Amplitude des Referenzsignals wird kaum verändert (Verstärkung ≈ 1). $\Rightarrow$ Abbildung (b).
- b) Der *geschlossene* Kreis werde mit einem Einheitssprung als Referenzsignal angeregt. Abbildung 6 zeigt drei mögliche Ausgänge. Ordnen Sie dem mit Regler K_1 bzw. K_2 geschlossenen Kreis das entsprechende Ausgangssignal zu.

Lösung:

- $K_1 \rightarrow$ Abbildung (a).
- $K_2 \rightarrow$ Abbildung (c).

Lösungsweg:

- Beide offene Kreise besitzen einen Integratoranteil, d.h. die bleibende Regelabweichung muss null sein. Deshalb scheidet Abbildung (b) aus.
- $G_{2,0}$ hat eine höhere Durchtrittsfrequenz und damit auch höhere Bandbreite als $G_{1,0}$. D.h. $G_{2,0}$ reagiert schneller. In Abbildung (a) wird langsamer auf den Sprung reagiert als in Abbildung (b) und (c). Somit kann K_1 Abbildung (a) und K_2 Abbildung (c) zugeordnet werden.

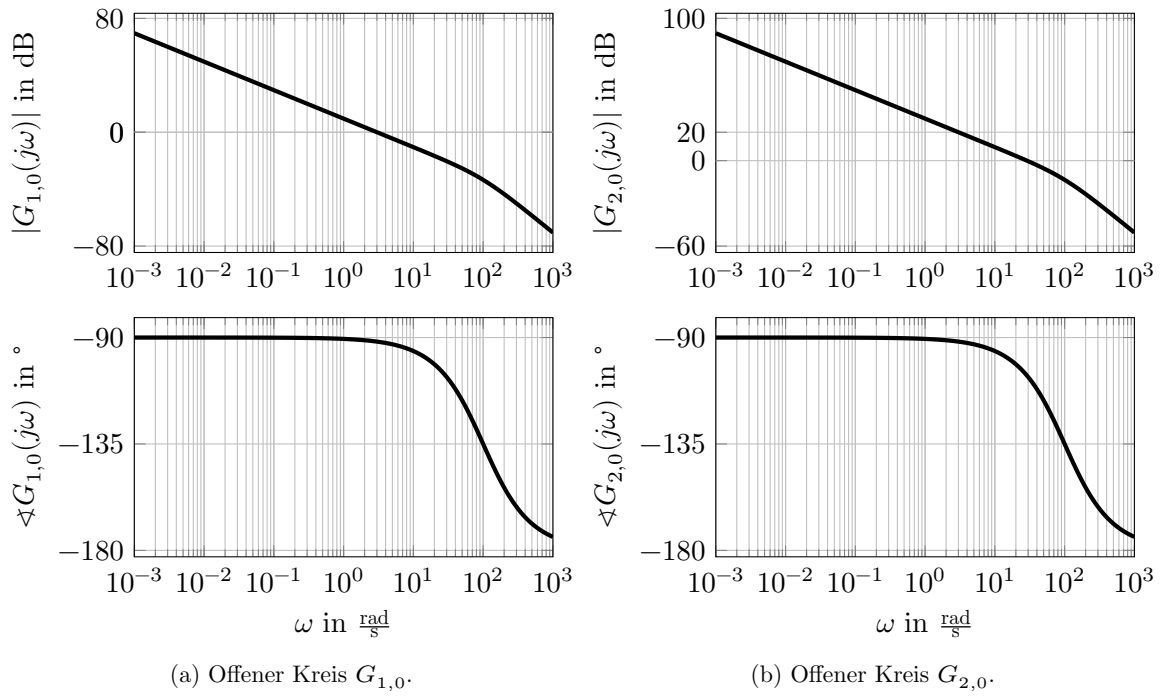


Abbildung 4: Bode Diagramme der *offenen* Kreise.

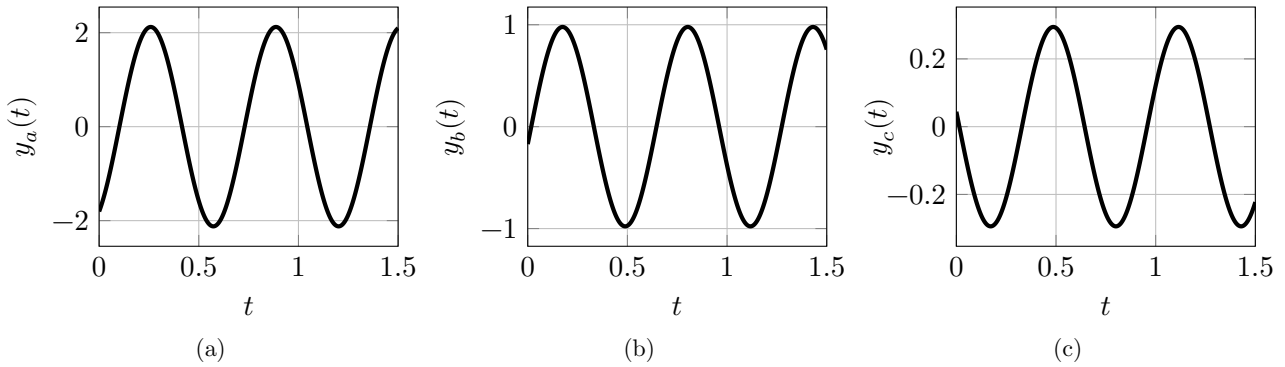


Abbildung 5: Mögliche Ausgänge des *geschlossenen* Kreises bei Anregung mit einem sinusförmigem Referenzsignal.

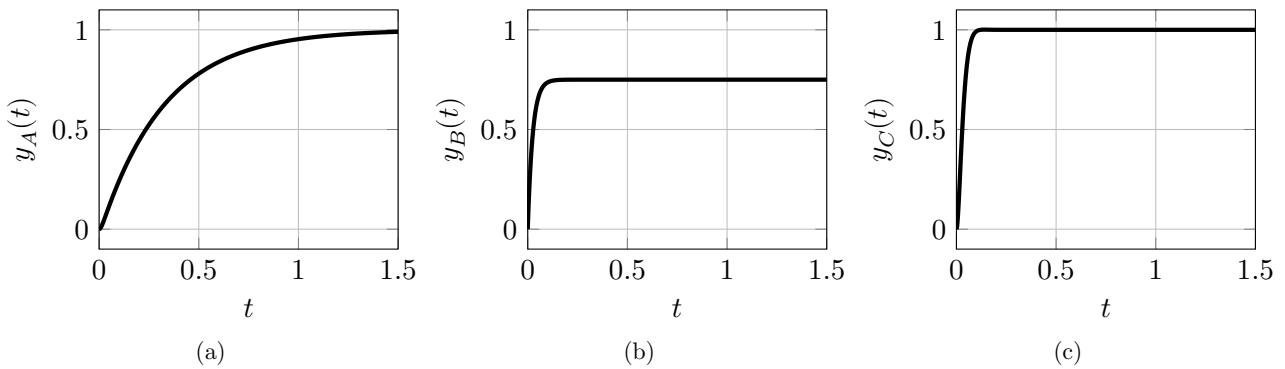


Abbildung 6: Mögliche Ausgänge des *geschlossenen* Kreises bei einem Einheitssprung als Referenzsignal.

Standardniveau

Aufgabe 3

Gegeben sei der in Abbildung 7 dargestellte Regelkreis mit Strecke G und Regler K . Die Strecke G besitzt weder einen Pol noch eine Nullstelle bei 0. Aufgrund einer fehlerhaften Kalibrierung weicht der gemessene Ausgang von dem tatsächlichen Ausgang $y(t)$ um einen unbekannten, konstanten Wert $\bar{\eta}$ ab.

Der Fehler e lässt sich dabei als Summe aus dem Regelfehler $e_d = G_{d \rightarrow e} d$, verursacht durch das sprungförmige Referenzsignal d , und dem Fehler $e_{\bar{\eta}} = G_{\bar{\eta} \rightarrow e} \bar{\eta}$, verursacht durch den Sensorfehler $\bar{\eta}$, schreiben: $e = e_d + e_{\bar{\eta}}$.

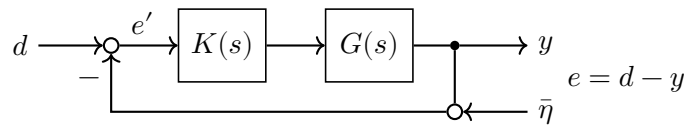


Abbildung 7: Regelkreis.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist.

- a) Zeigen Sie, dass der Effekt der fehlerhaften Messung mit einem Regler mit integrierendem Verhalten nicht kompensiert wird, d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\bar{\eta}}(t) \neq 0$.

Lösung: Die Übertragungsfunktion $G_{\bar{\eta} \rightarrow e}$ lässt sich bestimmen zu

$$G_{\bar{\eta} \rightarrow e}(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}.$$

Aus dem Grenzwertsatz ergibt sich, dass mit dem konstanten Sensorfehler $\bar{\eta}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\bar{\eta}}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{\bar{\eta} \rightarrow e}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{\bar{\eta} \rightarrow e}(s)$$

gilt.

Da bei einem Regler mit integrierendem Verhalten $\lim_{s \rightarrow 0} K(s) = \infty$ gilt, und G weder einen Pol noch eine Nullstelle bei 0 besitzt, ergibt sich $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\bar{\eta}}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = 1$. Das heißt die konstante Abweichung wird nicht kompensiert.

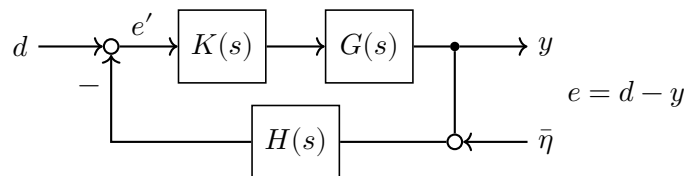


Abbildung 8: Alternativer Regelkreis.

Nun wird der in Abbildung 8 dargestellte alternative Regelkreis mit Kompensator H in der dynamischen Rückführung betrachtet. Gehen Sie davon aus, dass K keinen Integratoranteil besitzt.

- b) Geben Sie eine Bedingung für H an, sodass $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\bar{\eta}}(t) = 0$ erreicht wird.

Lösung: Nun gilt für die Übertragungsfunktion $G_{\bar{\eta} \rightarrow e}$

$$G_{\bar{\eta} \rightarrow e} = \frac{GKH}{1 + GKH}.$$

Mit $H(0) = 0$ und da weder G noch K einen Pol bei der 0 haben, ergibt sich $G_{\bar{\eta} \rightarrow e}(0) = 0$ und somit $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\bar{\eta}}(t) = 0$.

- c) Zeigen sie, dass sich mit einer ähnlichen Bedingung an K dasselbe Ziel erreichen ließe. Warum wäre diese Vorgehensweise dennoch nicht sinnvoll?

Lösung: Offensichtlich gilt auch mit $K(0) = 0$, dass $G_{\bar{\eta} \rightarrow e}(0) = 0$ und somit $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\bar{\eta}}(t) = 0$. Dies wäre nicht sinnvoll, da dann keine Übertragung $d \rightarrow y$ von konstanten Referenzen vorhanden wäre, was man auch an der Übertragungsfunktion

$$G_{d \rightarrow y} = \frac{GK}{1 + GKH}$$

ablesen kann. Dagegen bleibt die Übertragung von konstanten Referenzen vorhanden, wenn stattdessen $H(0) = 0$ gewählt wird.

1er-Niveau

Aufgabe 4

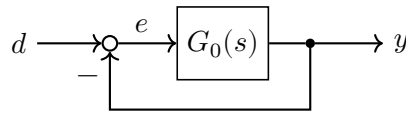


Abbildung 9: Regelkreis.

Wir betrachten den Regelkreis gemäß Abbildung 9. Der geschlossene Kreis soll die folgenden Anforderungen erfüllen:

- i) asymptotisch stabil,
 - ii) nicht sprungfähig (kein Durchgriff),
 - iii) keine bleibende Regelabweichung für $d(t) = t$, $\forall t \geq 0$ (Rampe),
 - iv) Sprungantwort schwingt nicht über ($e(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$).
- a) Zeigen Sie mithilfe des Endwertsatzes der Laplace Transformation, dass Anforderung iii) nur dann erfüllt sein kann, wenn folgende Bedingung an die Sensitivität gilt:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(s)}{s} = 0.$$

Was folgt daraus für $S(0)$?

Lösung: Mithilfe des Endwertsatzes der Laplace Transformation leiten wir her, dass

$$0 \stackrel{!}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

gelten muss, um eine verschwindende bleibende Regelabweichung der Rampe zu erreichen. Mit $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ erhalten wir weiter

$$0 \stackrel{!}{=} \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(s)}{s},$$

was der gesuchten Bedingung entspricht. Daraus folgt außerdem, dass $S(0) = 0$ gelten muss, da sonst $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(s)}{s} = \infty$.

- b) Zeigen Sie mithilfe der Definition der Laplace Transformation, dass die Bedingung aus a) impliziert, dass für die Sprungantwort

$$\int_0^\infty e(t) dt = 0$$

gelten muss.

Lösung: Die gesuchte Beziehung folgt mit der Bedingung aus a), der Laplace-Transformation der Sprungfunktion $\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}$ und der Definition der Laplace-Transformation (*):

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) \stackrel{(*)}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} e(t) dt = \int_0^\infty e(t) dt.$$

c) Zeigen Sie, dass sich die Anforderungen i)-iv) nicht alle gleichzeitig erfüllen lassen.

Lösung: Um Anforderung ii) zu erfüllen, darf das System nicht sprungfähig sein. Das bedeutet aber, dass bei einer Sprungantwort, die nicht überschwingen darf (Anforderung iv)), $e(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gelten muss. Dies bedeutet insbesondere auch, dass $\int_0^\infty e(t) dt > 0$ gelten müsste. Dies steht nun aber im Widerspruch zu der Bedingung aus b), welche aus Anforderung iii) folgt. Daher lassen sich die Anforderungen i)-iv) nicht alle gleichzeitig erfüllen.