

Wochenprogramm 4 mit Lösungsweg: Regelgüte 2

Bestehensniveau

Aufgabe 1

Gegeben sei der in Abbildung 1 dargestellte Regelkreis.

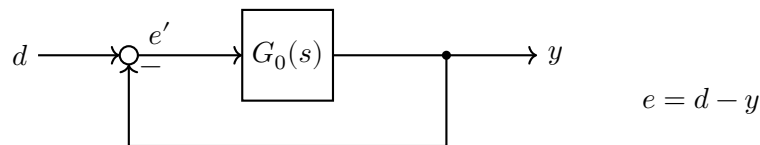


Abbildung 1: Regelkreis.

Bestimmen Sie den stationären Wert von e für einen Einheitssprung in $d(t) = h(t)$ und

$$G_0(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 0.4s + 1}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} = S(0) \\ &= \frac{1}{1 + G_0(0)} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei der in Abbildung 2 dargestellte Regelkreis mit Messrauschen η .

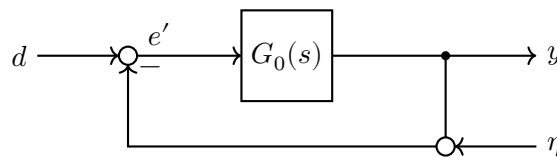


Abbildung 2: Regelkreis.

Für die Regelstrecke G werden zwei unterschiedliche Regler entworfen, die in dieser Aufgabe miteinander verglichen werden sollen. Abbildung 3 zeigt die Bode Diagramme der zu den unterschiedlichen Reglern gehörenden komplementären Sensitivitäten T_1 und T_2 .

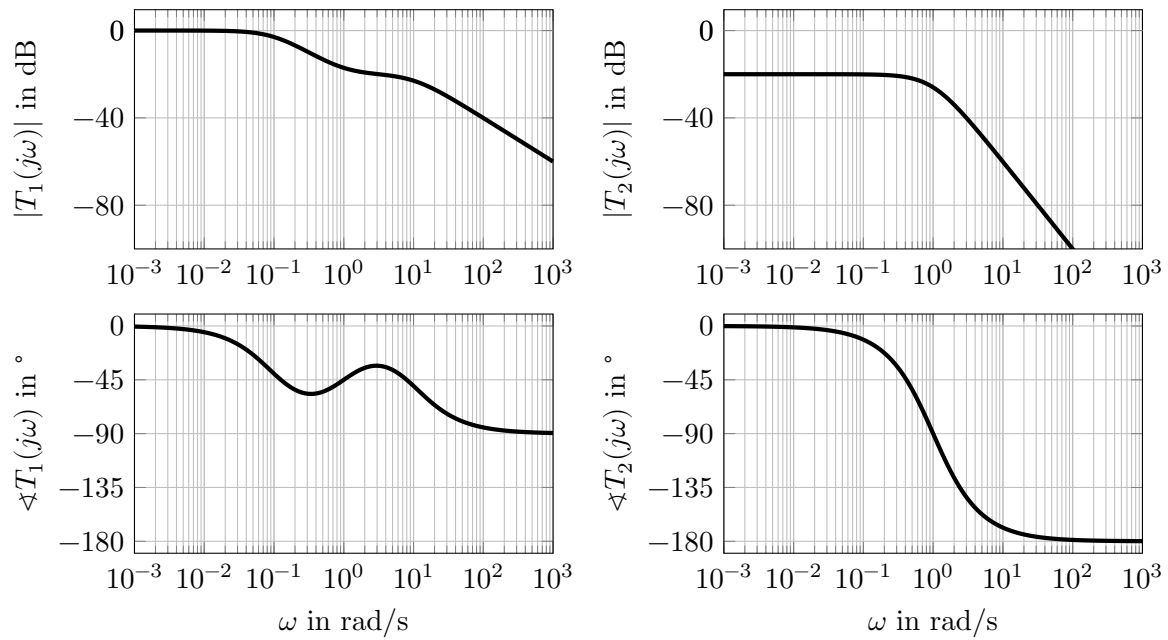


Abbildung 3: Bode Diagramme der komplementären Sensitivitäten T_1 und T_2 .

a) Vergleichen Sie die beiden Regler bezüglich Führungsverhalten und Rauschunterdrückung.

Lösung:

- Führungsverhalten: T_1 besser, da $T_1(0) = 1$ und $T_2(0) \neq 1$, d.h., T_2 hat bleibende Regelabweichung bei Sprüngen in der Führungsgröße, T_1 nicht.
- Rauschunterdrückung: T_2 besser, da es für hohe Frequenzen stärker abfällt.

b) Nun gelte für beide Systeme $\eta(t) \equiv 0$. Berechnen Sie jeweils die bleibende Regelabweichung, wenn die Regelkreise mit dem Einheitssprung $d(t) = h(t)$ angeregt werden.

Lösung: Mit $S + T = 1$ folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} = S(0) = 1 - T(0).$$

Damit gilt

- für System 1: $T_1(0) = 1$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$,
- und für System 2: $T_2(0) = 0.1$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.9$.

Standardniveau

Aufgabe 3

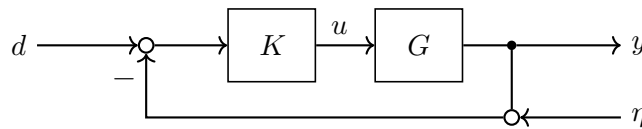


Abbildung 4: Regelkreis.

Für die asymptotisch stabile Regelstrecke G soll ein Regler K gemäß dem Regelkreis aus Abbildung 4 ausgelegt werden. Als Führungsgröße d soll ein Sinussignal

$$d(t) = a \sin(\omega_d t)$$

mit Amplitude $a \in \mathbb{R}$ und Frequenz $\omega_d \in \mathbb{R}$ verwendet werden.

Der Regler K soll folgende Anforderungen an den geschlossenen Kreis mit G erreichen:

- i) Für $\omega_d \in [0, 1]$ wird gutes Führungsverhalten gefordert.
 - ii) Der Einfluss von hochfrequentem Messrauschen η ab $\omega_\eta = 20$ soll unterdrückt werden.
 - iii) Für $\omega_d \in [0, 0.1]$ soll der Betrag des Regelfehlers $|e| \leq 0.01|a|$ im eingeschwungenen Zustand sein.
- a) Geben Sie ein passendes Intervall für die Durchtrittsfrequenz ω_D des offenen Kreises GK an.

Lösung:

- Für gutes Führungsverhalten muss die Bandbreite des geschlossenen Kreises größer als die der Führungsgröße sein (Anforderung i)): $\omega_B > 1$
 - Zur Unterdrückung des Messrauschens η muss die Bandbreite des geschlossenen Kreises kleiner als die von η sein (Anforderung ii)): $\omega_B < \omega_\eta = 20$
 - Die Durchtrittsfrequenz approximiert die Bandbreite des geschlossenen Kreises, daher können Anforderungen an die Bandbreite an die Durchtrittsfrequenz gestellt werden: $\omega_D \approx \omega_B \in (1, 20)$
- b) Der Amplitudengang von G ist in Abbildung 5 dargestellt. Bestimmen Sie eine Bedingung an $|K(j\omega)|$, um Anforderung iii) zu erfüllen.

Lösung:

- Anforderung iii) lässt sich als eine Anforderung an die Amplitude der Sensitivität für Frequenzen ω kleiner 0.1 ausdrücken:
$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|} \leq 0.01 \quad \forall \omega \leq 0.1$$
- Um eine Bedingung für $|K|$ zu bestimmen kann obige Gleichung umgestellt werden und ausgenutzt werden, dass mit der Dreiecksungleichung $|GK| \leq |1 + GK| + |-1|$ gilt:

$$|1 + G(j\omega)K(j\omega)| \geq |G(j\omega)K(j\omega)| - 1 = |G(j\omega)||K(j\omega)| - 1 \stackrel{!}{\geq} 100.$$

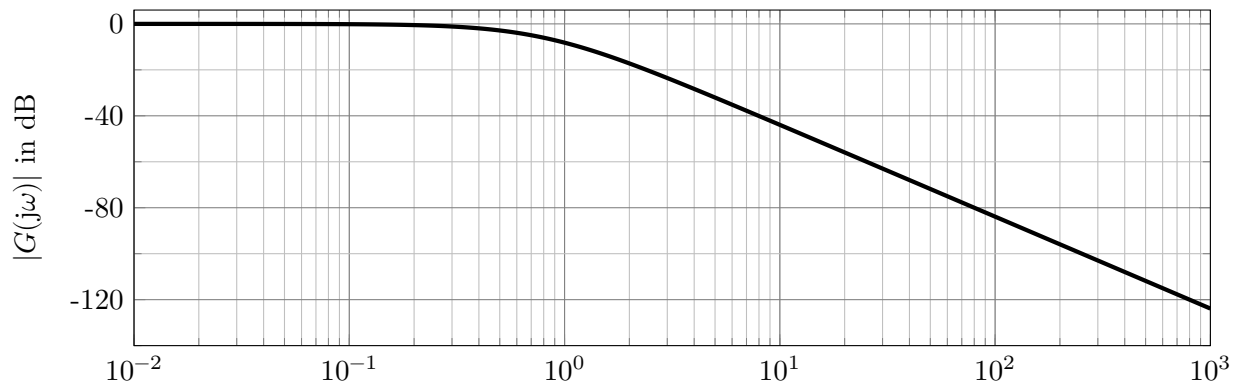


Abbildung 5: Amplitudengang von G . Die Eckfrequenzen aller Pol- und Nullstellen liegen im abgebildeten Frequenzbereich.

Da aus dem Amplitudengang abgelesen werden kann, dass $|G(j\omega)| \approx 1$ für $\omega \leq 0.1$ gilt, ist eine mögliche Anforderung

$$|K(j\omega)| \geq 101 \quad \forall \omega \leq 0.1.$$

1er-Niveau

Aufgabe 4

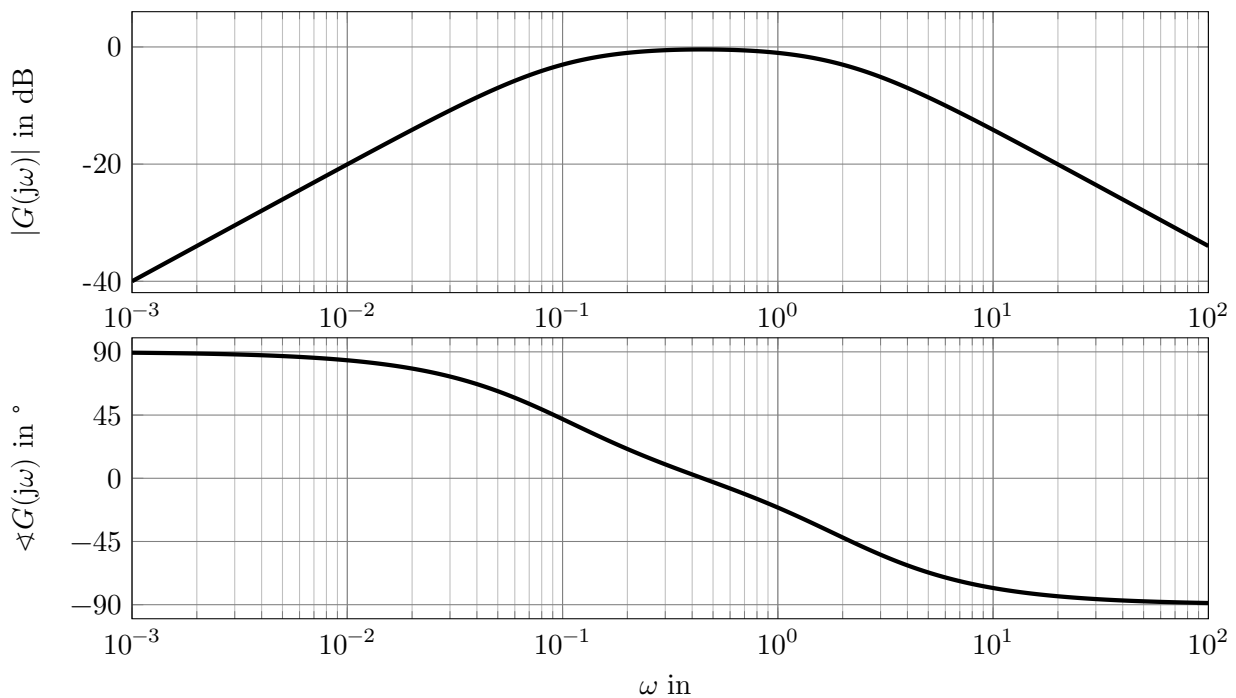


Abbildung 6: Bode Diagram von G . Die Eckfrequenzen aller Pol- und Nullstellen liegen im abgebildeten Frequenzbereich.

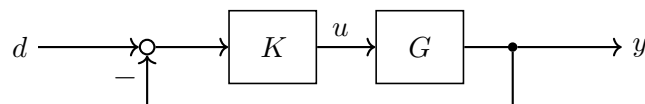


Abbildung 7: Standardregelkreis.

Gegeben sei das Bode Diagramm der asymptotisch stabilen Regelstrecke G in Abbildung 6. Die Strecke G wird mit dem Regler $K(s) = \frac{s+1}{10s}$ gemäß Abbildung 7 asymptotisch stabilisiert.

- a) Ist die Übertragungsfunktion von d nach u ($G_{d \rightarrow u}$) asymptotisch stabil? Beschreiben Sie, wie sich die Stellgröße u für sprungförmige Änderungen der Führungsgröße d für große Zeiten $t \rightarrow \infty$ verhält.

Lösung:

- Aus dem Bode Diagramm lesen wir ab, dass G eine einfache Nullstelle bei 0 hat.
- Mit dem gegebenen Regler K ergibt sich daher eine Pol-Nullstellen-Kürzung in G_0 für die einfache Nullstelle bei 0, sodass G_0 asymptotisch stabil ist (da G asymptotisch stabil ist).
- $G_{d \rightarrow u} = KS$ ist daher nicht asymptotisch stabil, weil die Polstelle bei 0 in K nicht durch eine Nullstelle in S gekürzt wird (alle Nullstellen von S liegen in der linken offenen Halbebene, da $S = \frac{N_0}{N_0 + Z_0}$ und G_0 asymptotisch stabil ist).

- Aus diesem Grund wächst $u(t)$ für sprunghafte Sollwertänderungen bis ins Unendliche.
- b) Verschwindet die bleibende Regelabweichung für sprunghafte Änderungen der Führungsgröße mit dem obigen Regler K ?

Lösung: Nein, da durch die Pol-Nullstellen-Kürzung der einfachen Nullstelle 0 nicht mehr $|G(0)K(0)| = \infty$ und damit auch nicht mehr $|S(0)| = \frac{1}{|1+G(0)K(0)|} = 0$ gilt.

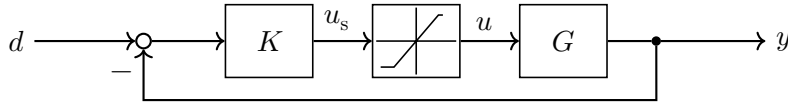


Abbildung 8: Regelkreis mit Stellgrößenbeschränkung.

Zusätzlich wird nun eine Stellgrößenbeschränkung mit oberer $u_{\max} > 0$ und unterer Grenze $u_{\min} < 0$ wie in Abbildung 8 berücksichtigt. Dabei gilt

$$u = \begin{cases} u_{\max} & u_s \geq u_{\max} \\ u_{\min} & u_s \leq u_{\min} \\ u_s & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es sei bekannt, dass für einen Einheitssprung $h(t)$ in der Führungsgröße die Stellgröße $u_s(t)$ für große Zeiten $t \rightarrow \infty$ entweder dauerhaft innerhalb oder außerhalb der Stellgrößenbeschränkung liegt.

- c) Bestimmen Sie den stationären Wert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ des Ausgangs für einen Einheitssprung in der Führungsgröße $d(t) = h(t)$.

Lösung:

- Zuerst betrachten wir den Fall, wenn die Beschränkung für $t \rightarrow \infty$ dauerhaft aktiv ist: Die asymptotisch stabile Strecke besitzt eine Nullstelle im Ursprung. Das kann als eine Reihenschaltung eines Differential-Elements und einer asymptotisch stabilen Strecke interpretiert werden. Wenn nun die Stellgröße u_s dauerhaft in der Stellgrößenbeschränkung liegt, gilt für große Zeiten $t \rightarrow \infty$: $u(t) = \text{konst.}$. Durch das Differential-Element verschwindet nun dieser konstante Eingang und die asymptotisch stabile Strecke sorgt dafür, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ gilt.
- Zweitens betrachten wir den Fall, dass die Beschränkung für $t \rightarrow \infty$ dauerhaft inaktiv ist: Aufgrund der Kürzung der nicht asymptotisch stabilen Nullstelle 0, würde $u_s(t)$ für sprunghafte Änderungen in der Führungsgröße unbeschränkt wachsen, wie bereits in a) festgestellt. Dies würde aber dazu führen, dass die Stellgröße für große Zeiten in der Beschränkung läge, was wieder dem ersten Fall entsprechen würde. Dieser zweite Fall kann daher nicht auftreten.
- Da laut der Aufgabenstellung keine weiteren Fälle auftreten können folgt, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ gelten muss.