

Universität Stuttgart

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

www.mechbau.uni-stuttgart.de

Ergänzung zur Vorlesung

Technische Mechanik II

Formelsammlung
(Teil I)

Stand WS 2013/14

letzte Änderung: 07.01.2014

TEIL I: Mathematische Voraussetzungen

1 Grundzüge der Tensorrechnung

- vgl. hierzu separates Skript zu Tensorrechnung (www.mechbau.uni-stuttgart.de).

2 Grundzüge der Vektor- und Tensoranalysis

- vgl. hierzu separates Skript zu Tensorrechnung (www.mechbau.uni-stuttgart.de).

3 Anwendungen zur Tensorrechnung

Flächenmomente 2. Ordnung

Der Flächenträgheitstensor:

$$\mathbf{J} = \int_S [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{I} - (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})] da.$$

Bem.: Die Koeffizienten J_{ik} des Flächenträgheitstensors $\mathbf{J}$ werden als „Flächenträgheitsmomente“ eingeführt.

Man erhält im einzelnen für eine Fläche in der $\mathbf{e}_2$ - $\mathbf{e}_3$ -Ebene mit der Flächennormalen $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{x} = x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$:

- polares Flächenträgheitsmoment:

$$J_{11} = J_P = \int_S (x_2^2 + x_3^2) da$$

- axiale Flächenträgheitsmomente:

$$J_{22} = \int_S x_3^2 da, \quad J_{33} = \int_S x_2^2 da$$

- Deviations- bzw. Zentrifugalmomente:

$$J_{23} = J_{32} = - \int_S x_2 x_3 da$$

Der Trägheitsradius:

$$i_{(jj)} = \sqrt{\frac{J_{(jj)}}{A}} \quad \text{mit } A: \text{ Querschnittsfläche.}$$

Bem.: (jj) bedeutet hier „keine Summation“ über j

Die Flächenträgheitsmomente bzgl. eines Schwerpunktsystems $\{\mathcal{O}, \bar{\mathbf{e}}\}$:

- axiale Eigenträgheitsmomente:

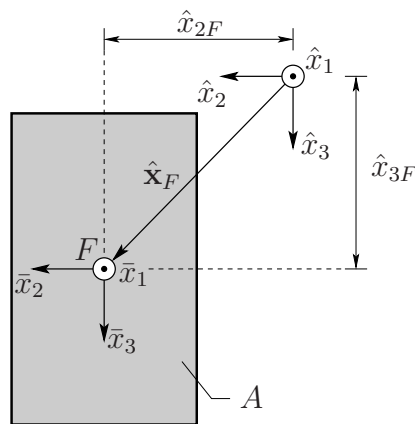
$$\bar{J}_{22} = \int_S \bar{x}_3^2 da, \quad \bar{J}_{33} = \int_S \bar{x}_2^2 da$$

- Eigen-Deviations- bzw. Zentrifugalmomente:

$$\bar{J}_{23} = \bar{J}_{32} = - \int_S \bar{x}_2 \bar{x}_3 da$$

Die Flächenträgheitsmomente bzgl. eines beliebigen Systems $\{\mathcal{O}, \hat{\mathbf{e}}\}$:

Veranschaulichung:



- axiale Flächenträgheitsmomente:

$$\hat{J}_{22} = \bar{J}_{22} + \hat{x}_{3F}^2 A \longrightarrow \bar{J}_{22} = \hat{J}_{22} - \hat{x}_{3F}^2 A$$

$$\hat{J}_{33} = \bar{J}_{33} + \hat{x}_{2F}^2 A \longrightarrow \bar{J}_{33} = \hat{J}_{33} - \hat{x}_{2F}^2 A$$

- Deviations- bzw. Zentrifugalmomente:

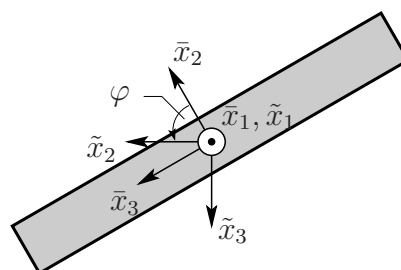
$$\hat{J}_{23} = \hat{J}_{32} = \bar{J}_{23} - \hat{x}_{2F} \hat{x}_{3F} A \longrightarrow \bar{J}_{23} = \bar{J}_{32} = \hat{J}_{23} + \hat{x}_{2F} \hat{x}_{3F} A$$

Bemerkungen:

- In Bezug auf parallelverschobene Achsen setzen sich die Trägheitsmomente zusammen aus den *Eigen*-Trägheitsmomenten und den *Steiner*-Anteilen.
- Die axialen Trägheitsmomente werden im Flächenschwerpunkt zum Minimum, d. h. die *Steiner*-Anteile verschwinden.

Die Flächenträgheitsmomente bzgl. eines gedrehten Schwerpunktsystems $\{\mathcal{O}, \tilde{\mathbf{e}}\}$:

Veranschaulichung:



Transformationsbeziehungen für Flächenträgheitsmomente:

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{22} &= \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} + \bar{J}_{33}) + \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}) \cos 2\varphi + \bar{J}_{23} \sin 2\varphi, \\ \tilde{J}_{33} &= \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} + \bar{J}_{33}) - \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}) \cos 2\varphi - \bar{J}_{23} \sin 2\varphi, \\ \tilde{J}_{23} &= \tilde{J}_{32} = -\frac{1}{2}(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}) \sin 2\varphi + \bar{J}_{23} \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Das polare Trägheitsmoment ist unabhängig von der Drehung des Bezugssystems um die $\mathbf{e}_1$ -Achse:

$$J_{11} = J_p = \bar{J}_p = \tilde{J}_p = J_{22} + J_{33}.$$

Hauptträgheitsmomente:

Merke: In Hauptachsendarstellung der Flächenträgheitsmomente verschwinden die Deviationsmomente.

Lage der Hauptachsen:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\bar{J}_{23}}{\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}}.$$

Eindeutige Lagebestimmung der Hauptachsen:

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{2\bar{J}_{23}}{\pm \sqrt{(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33})^2 + 4\bar{J}_{23}^2}}; \quad \cos 2\varphi_0 = \frac{\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}}{\pm \sqrt{(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33})^2 + 4\bar{J}_{23}^2}}.$$

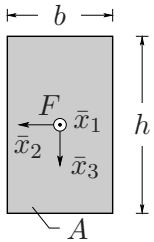
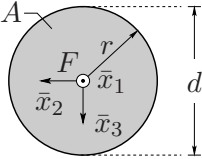
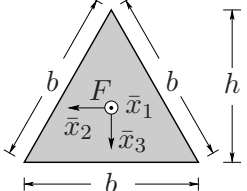
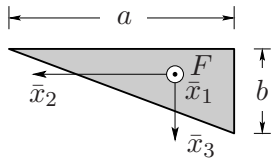
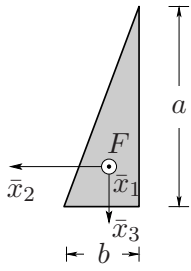
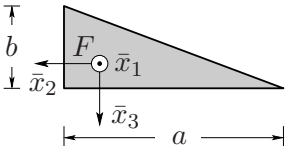
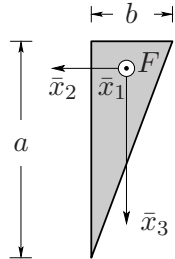
Bestimmung der Hauptträgheitsmomente:

$$J_{1/2} = \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} + \bar{J}_{33}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33})^2 + \bar{J}_{23}^2} = \tilde{J}_{22/33}(\varphi_0).$$

Bem.: Bei Symmetrie der Fläche und Wahl der Symmetrieachsen als Koordinatenachsen verschwinden die Deviationsmomente, d. h. das gewählte Koordinatensystem stellt das Hauptachsensystem dar.

Vorgehen bei der Berechnung des Flächenträgheitsmoments mit Teilflächen (von denen die Teilflächenträgheitsmomente einfach zu berechnen sind):

1. Einteilen des Querschnitts in einfache, bekannte Teilflächen
2. Gegebenenfalls Berechnung des Flächenschwerpunkts
3. Berechnung der Flächenträgheitsmomente für die Teilflächen (mittels Integration oder aus Tabelle entnehmen)
4. Gegebenenfalls drehen der lokalen Koordinatensysteme auf das globale Koordinatensystem
5. Berechnung der *Steiner*-Anteile für die Teilflächen
6. Addieren der einzelnen Anteile

Geometrie	Fläche A	$\bar{J}_{22}$	$\bar{J}_{33}$	$\bar{J}_{23}$
	$b h$	$\frac{b h^3}{12}$	$\frac{b^3 h}{12}$	0
	πr^2	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$	0
	$\frac{b h}{2}$	$\frac{b h^3}{36}$	$\frac{h b^3}{48}$	0
	$\frac{a b}{2}$	$\frac{a b^3}{36}$	$\frac{b a^3}{36}$	$\frac{a^2 b^2}{72}$
	$\frac{a b}{2}$	$\frac{b a^3}{36}$	$\frac{a b^3}{36}$	$-\frac{a^2 b^2}{72}$
	$\frac{a b}{2}$	$\frac{a b^3}{36}$	$\frac{b a^3}{36}$	$\frac{a^2 b^2}{72}$
	$\frac{a b}{2}$	$\frac{b a^3}{36}$	$\frac{a b^3}{36}$	$-\frac{a^2 b^2}{72}$