

Wochenprogramm **3** mit Lösungsweg: Regelgüte 1

Bestehensniveau

Aufgabe 1

Gegeben sei der in Abbildung 1 dargestellte Regelkreis mit Messrauschen η .

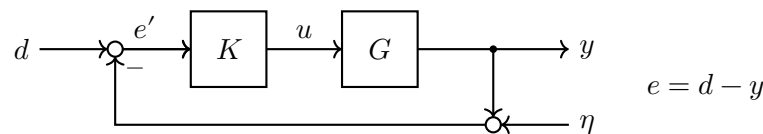


Abbildung 1: Regelkreis.

- a) Leiten Sie die Übertragungsfunktion von d nach e ($G_{d \rightarrow e}$), von η nach e ($G_{\eta \rightarrow e}$) und von η nach u ($G_{\eta \rightarrow u}$) in Abhängigkeit von G und K her. Schreiben Sie anschließend die Übertragungsfunktionen als Funktionen von S bzw. T .

Lösung: Es gilt (das Argument s wird der Einfachheit immer weggelassen)

$$E = D - Y = D - GKE' = D - GK(D - Y - \eta) = D - GKE + GK\eta$$

und damit

$$E(1 + GK) = D + GK\eta.$$

Nach Division von $1 + GK$ erhalten wir

$$E = \frac{1}{1 + GK}D + \frac{GK}{1 + GK}\eta$$

und damit

$$G_{d \rightarrow e} = \frac{1}{1 + GK} = S$$

und

$$G_{\eta \rightarrow e} = \frac{GK}{1 + GK} = T.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} U = KE' &= K(E - \eta) = K\left(\frac{1}{1 + GK}D + \frac{GK}{1 + GK}\eta - \eta\right) \\ &= K\left(\frac{1}{1 + GK}D - \frac{1}{1 + GK}\eta\right) = \frac{K}{1 + GK}D - \frac{K}{1 + GK}\eta \end{aligned}$$

und damit

$$G_{\eta \rightarrow u} = -\frac{K}{1 + GK} = -KS.$$

- b) Was muss für die Sensitivität S und die komplementäre Sensitivität T gelten, wenn für hohe Frequenzen ein gutes Führungsverhalten gewünscht ist und gleichzeitig das Messrauschen unterdrückt werden soll? Welches Problem tritt hierbei auf?

Lösung: Für gutes Folgeverhalten sollte $S(s)$ klein sein, für gute Rauschunterdrückung sollte $T(s)$ klein sein. Da nicht beides für dieselben Frequenzen beliebig klein werden kann (da $S + T = 1$), ergibt sich ein Dilemma.

Standardniveau

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass zwischen dem Betrag der Sensitivität und der komplementären Sensitivität an der Durchtrittsfrequenz ω_D und der Phasenreserve φ_r der Zusammenhang

$$|S(j\omega_D)| = |T(j\omega_D)| = \frac{1}{2 \sin(\frac{\varphi_r}{2})}.$$

besteht.

Hinweis: $\sin(\frac{x}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$.

Lösung: An der Durchtrittsfrequenz ω_D gilt $|G_0(j\omega_D)| = 1$. Daher folgt sofort, dass

$$|T(j\omega_D)| = \frac{|G_0(j\omega_D)|}{|1 + G_0(j\omega_D)|} = \frac{1}{|1 + G_0(j\omega_D)|} = |S(j\omega_D)|.$$

Außerdem gilt für die Phase an der Durchtrittsfrequenz $\Phi(G_0(j\omega_D)) = -180^\circ + \varphi_r$. Damit folgt

$$\begin{aligned} |S(j\omega_D)| &= \frac{1}{|1 + G_0(j\omega_D)|} \\ &= \frac{1}{|1 + \cos(-180^\circ + \varphi_r) + j \sin(-180^\circ + \varphi_r)|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos(\varphi_r))^2 + (\sin(\varphi_r))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(\varphi_r))}} \\ &= \frac{1}{2 \sin(\frac{\varphi_r}{2})}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem Hinweis.

Alternativer Lösungsweg:

$$\begin{aligned} |1 + G_0(j\omega_D)| &= |1 + e^{j(\varphi_r - \pi)}| \\ &= |1 - e^{j\varphi_r}| \\ &= |1 - \cos(\varphi_r) - j \sin(\varphi_r)| \dots \end{aligned}$$

1er-Niveau

Aufgabe 3

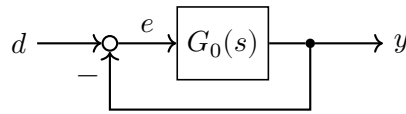


Abbildung 2: Regelkreis.

Herr R. Obust schlägt

$$\delta_r = \min_{\omega} \frac{1}{|S(j\omega)|}$$

als ein neues Maß für die Robustheit vor, wobei S die Übertragungsfunktion von d nach e im Regelkreis gemäß Abbildung 2 ist.

- a) Zeigen Sie, dass sich δ_r aus der Ortskurve des offenen Kreises G_0 ablesen lässt.

Lösungsidee: δ_r ist der minimale Abstand der Ortskurve vom kritischen Punkt.

Lösungsweg:

- Zunächst gilt $\frac{1}{|S(j\omega)|} = |1 + G(j\omega)| = |G(j\omega) + (1 + 0j)|$,
- somit ist das der Abstand zwischen dem Punkt auf der Ortskurve bei ω und dem kritischen Punkt.
- Daher ist δ_r per Definition also der minimale Abstand der Ortskurve vom kritischen Punkt.
- Dieser lässt z.B. mit einem Zirkel ablesen, in dem man einen Kreis tangential zur Ortskurve konstruiert (das ist der größtmögliche Kreis der die Ortskurve nur berührt, aber nicht schneidet).

Aus dem Robustheitsmaß δ_r lassen sich je eine Abschätzung für die Amplituden- und Phasenreserve herleiten. Nehmen Sie für die nächsten drei Teilaufgaben an, dass $\delta_r > 0$ gegeben ist.

- b) Leiten Sie grafisch eine untere Schranke für die Phasenreserve $0 < \gamma_r \leq \infty$ her (d.h. finden Sie ein größtmögliches $\xi \in \mathbb{R}$ das $\xi \leq \gamma_r$ erfüllt).

Lösungsidee: Die Phasenreserve ist der Winkel zwischen der negativen reellen Achse und dem Schnittpunkt zwischen Einheitskreis und einem Kreis um den kritischen Punkt mit Radius δ_r in der unteren Halbebene. In dem Fall, dass sich die Kreise nicht schneiden, ist die Phasenreserve unendlich.

Lösungsweg: Zunächst ist die Phasenreserve per Definition der Winkel zwischen der negativen reellen Achse und dem Schnittpunkt der Ortskurve mit dem Einheitskreis. Dieser Winkel ist am kleinsten, wenn der Abstand zum kritischen Punkt am kleinsten ist.

Der minimale Abstand zwischen dem kritischen Punkt und der Ortskurve ist gemäß a) δ_r . Damit berührt die Ortskurve einen Punkt auf dem Kreis um den kritischen Punkt mit Radius δ_r , ohne diesen zu scheiden.

Damit ist die kleinste erreichbare Phasenreserve, genau die bei der die Ortskurve den minimalen Abstand zum kritischen Punkt auf dem Einheitskreis erreicht. Diese entspricht dem Winkel zum Schnittpunkt der zwei angesprochenen Kreise.

Zur Veranschaulichung zeigt die Skizze in Abbildung 3 den Grenzfall der kleinsten Phasenreserve mit der schwarze Kurve. Jede Ortskurve (z.B. gelb) die den grünen Kreis des minimalen Abstands δ_r an einer anderen Stelle berührt, hat eine größere Phasenreserve.

- c) Zeigen Sie grafisch, dass $0 < \zeta_1 < \zeta_2$ existieren, sodass die Amplitudenreserve a_r das Intervall (ζ_1, ζ_2) als Teilmenge enthält (d.h. dass bei einer zusätzlichen Verstärkung im Intervall (ζ_1, ζ_2) die Stabilität erhalten bleibt).

Lösungsidee: Aus a) von δ_r folgt sofort, dass die Ortskurve nicht innerhalb eines Intervalls $(-\zeta_1^{-1}, -\zeta_2^{-1})$ um -1 die reelle Achse schneidet.

Damit gilt für die Schnittpunkte links des kritischen Punkts die Amplitudenreserve (ζ_1, ∞) und für die Schnittpunkte rechts davon die Amplitudenreserve $(0, \zeta_2)$, wobei ζ_1 bzw. ζ_2 . Da eine Ortskurve Schnittpunkte auf beiden Seiten haben kann, ergibt sich die Amplitudenreserve als Schnittmenge davon.

Diese ist natürlich das *worst-case* Szenario, dass auf beiden Seiten des kritischen Punkts ein Schnittpunkte mit reelle Achse mit minimal Abstand liegt. Insofern ist (ζ_1, ζ_2) i.d.R. nur eine Teilmenge der Amplitudenreserve a_r .

Zur Anschauung siehe die Skizze in Abbildung 3. Die gelben Ortskurven sind die zwei Grenzfälle, die das Intervall (ζ_1, ζ_2) einschränken.

- d) Leiten Sie je eine Gleichung für ξ , ζ_1 und ζ_2 her.

$$\textbf{Lösung: } \xi = \begin{cases} \arccos \frac{2-\delta_r^2}{2} = 2 \arcsin(\delta/2) & \text{für } \delta_r \leq 2 \\ \infty & \text{für } \delta_r > 2 \end{cases}$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{1+\delta_r}, \quad \zeta_2 = \begin{cases} \frac{1}{1-\delta_r} & \text{für } \delta_r < 1 \\ \infty & \text{für } \delta_r \geq 1 \end{cases}$$

Lösungsweg: Für ξ berechne die x -Koordinate des Schnittpunkt der Kreise, d.h. löse $x^2 + y^2 = 1$ und $(x+1)^2 + y^2 = \delta_r^2$ nach x auf. Daraus lässt sich mit dem Arcuscosinus der Winkel berechnen. Dabei ist zu beachten, dass für $\delta_r > 2$ kein Schnittpunkt mehr existiert, also die Phasenreserve ∞ ist.

Für ζ_1 und ζ_2 betrachte Abbildung 3 und berechne die Amplitudenreserve für die zwei Grenzfälle in gelb. Dabei ist zu beachten, dass für $\delta_r \geq 1$ der rechte Schnittpunkt mit der negativen reellen Achse nicht mehr existiert, also die Amplitudenreserve dazu $(0, \infty)$ ist.

Nun wird die umgekehrte Richtung betrachtet, d.h. welche Aussagen sich über δ_r treffen lassen wenn die Amplituden- und Phasenreserve bekannt ist. Dabei ist die triviale Aussage, dass aus der Existenz einer Amplituden- oder Phasenreserve folgt, dass $\delta_r > 0$ gilt.

- e) Argumentieren Sie, warum für die umgekehrte Richtung keine stärkere Aussage möglich ist.

Lösung: Mit der Amplituden- oder Phasenreserve sind nur zwei bzw. drei Punkte der Ortskurve bekannt. Daher kann keine Aussage über den minimalen Abstand der Ortskurve vom kritischen Punkt getroffen werden. Ein Gegenbeispiel, das zeigt warum dies nicht geht, ist in Abbildung 4 gezeigt. Obwohl die Amplituden- oder Phasenreserve unendlich sind, kann δ_r beliebig klein sein.

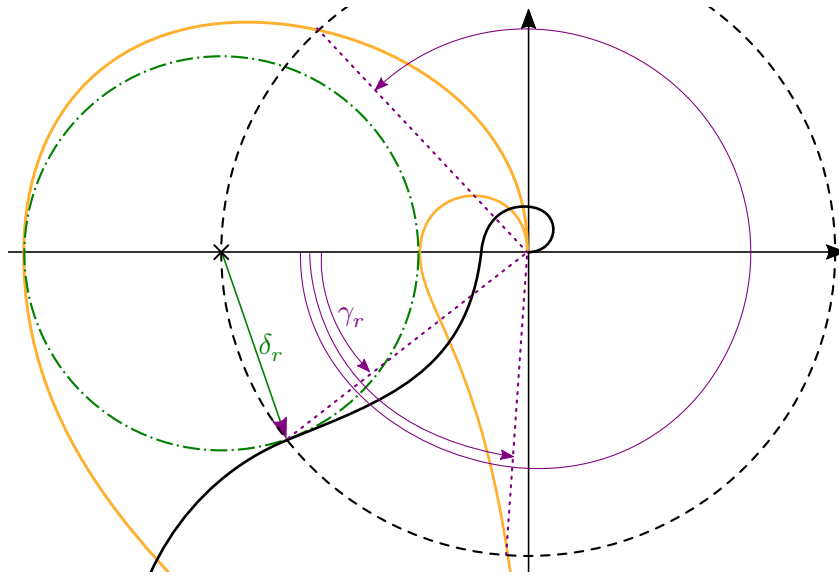


Abbildung 3: Skizze zur Lösung von Aufgabe 3b) und 3c)

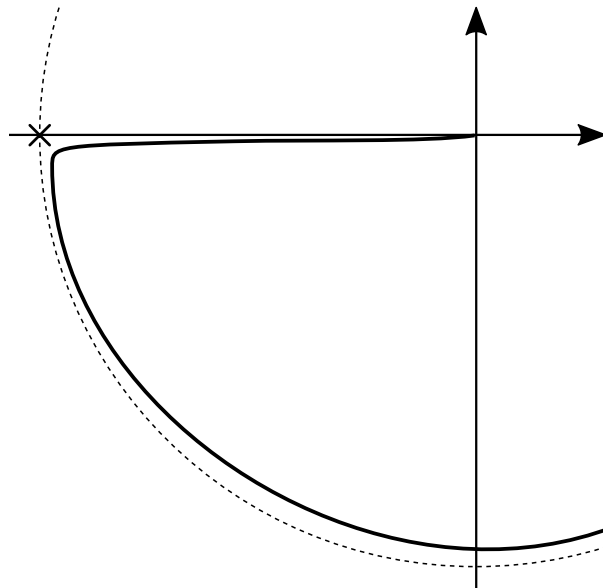


Abbildung 4: Gegenbeispiel für Aufgabe 3e)

f) Überlegen Sie sich, warum die triviale Aussage trivial ist.

Lösung: Per Definition ist $\delta_r \geq 0$. Ferner heißt $\delta_r = 0$, dass die Ortskurve den kritischen Punkt berührt. Dieser Fall ist durch die Existenz einer Amplituden- oder Phasenreserve bereits ausgeschlossen. Damit bleibt $\delta_r > 0$.

g) Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile des Robustheitsmaßes δ_r gegenüber der klassischen Amplituden- und Phasenreserve. Könnte man δ_r auch als eine Robustheitsreserve sehen?

Lösung: Ja, δ_r ist eine Reserve in Bezug auf die gemeinsame Änderung der Amplitude und Phase.

- i) Amplituden- und Phasenreserve sind einfacher zu bestimmen.
- ii) Amplituden- und Phasenreserve geben direkt Auskunft über zwei bedeutende Störungen bzw. Modellfehler (Verstärkung/Dämpfung bzw. Totzeiten)
- iii) δ_r ist ein allgemeineres Maß für die Robustheit, d.h. je größer δ_r , desto robuster. Außerdem gibt es Fälle, bei denen die Robustheit trotz unendlicher Amplituden- und Phasenreserve gering sein kann (wie in Abbildung 4). Dies kann bei δ_r nicht passieren.
- iv) δ_r liefert auch eine Aussage, wenn sowohl die Amplitude als auch die Phase geändert wird.
- v) ...