

Wochenprogramm **2** mit Lösungsweg: Stabilität 2

Bestehensniveau

Aufgabe 1

Gegeben sei der in Abbildung 1 dargestellte Regelkreis, wobei verschiedene offene Kreise G_{0i} , $i \in \{1, \dots, 6\}$, betrachtet werden sollen.

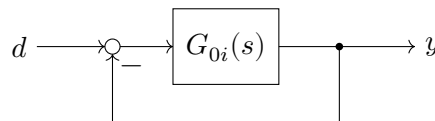


Abbildung 1: Regelkreis.

Abbildung 2 zeigt die Ortskurven von G_{0i} , $i \in \{1, \dots, 6\}$. Dabei bezeichnet jeweils m_0 die Anzahl der Pole von G_{0i} in der offenen rechten Halbebene und a_0 die Anzahl der Pole von G_{0i} auf der imaginären Achse. Untersuchen Sie mit Hilfe des Nyquist Kriteriums jeweils die Stabilitätseigenschaften des geschlossenen Kreises.

Lösungsweg:

- a) $m_0\pi + a_0\frac{\pi}{2} = 0$; $\Delta\phi(j\omega) = 0 \Rightarrow$ asym. stabil
- b) $m_0\pi + a_0\frac{\pi}{2} = \pi$; $\Delta\phi(j\omega) = \pi \Rightarrow$ asym. stabil
- c) $m_0\pi + a_0\frac{\pi}{2} = \pi/2$; $\Delta\phi(j\omega) = \pi/2 \Rightarrow$ asym. stabil
- d) $m_0\pi + a_0\frac{\pi}{2} = 0$; $\Delta\phi(j\omega) = 0 \Rightarrow$ asym. stabil
- e) $m_0\pi + a_0\frac{\pi}{2} = \pi$; $\Delta\phi(j\omega) = -2\pi \Rightarrow$ instabil
- f) $m_0\pi + a_0\frac{\pi}{2} = \pi$; $\Delta\phi(j\omega) = 0 \Rightarrow$ instabil

Aufgabe 2

Gegeben sei der in Abbildung 3 dargestellte Standardregelkreis mit P-Regler, wobei verschiedene Strecken G_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, betrachtet werden sollen.

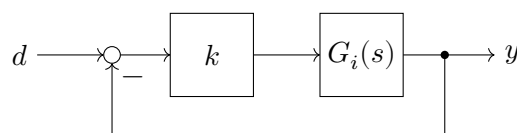


Abbildung 3: Standardregelkreis mit P-Regler.

Abbildung 4 zeigt die Ortskurven von G_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$. Dabei bezeichnet jeweils m_0 die Anzahl der Pole von G_i in der offenen rechten Halbebene. Die Anzahl der Pole auf der imaginären Achse sei bei allen Strecken gleich null.

Welche der Strecken können gemäß Abbildung 3 durch einen P-Regler

$$u = k(d - y),$$

wobei $k \geq 0$, stabilisiert werden? Geben Sie in diesen Fällen den Wertebereich des Reglerparameters k an, für den der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist.

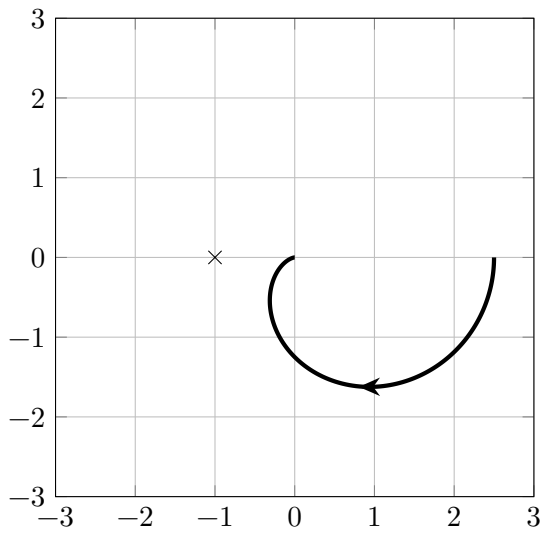
Lösung: Die Systeme a) und c) können nicht durch einen P-Regler stabilisiert werden. Für die anderen Systeme siehe Abbildung 4.

Lösungsweg: Es wird betrachtet, welche Phasendrehung gemäß des Nyquist Kriteriums für Stabilität des geschlossenen Kreises benötigt wird. Insbesondere ist die Achse ($\Im m = 0$) zu betrachten. Der P-Regler führt zu einer Skalierung des Graphen und kann daher die Anzahl der Phasendrehungen beeinflussen.

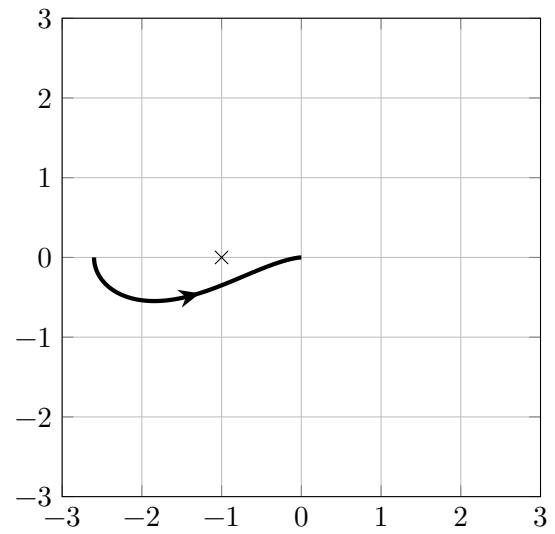
a) Die Phasendrehung hat das falsche Vorzeichen.

c) Die max. Phasendrehung ist π , bei $m_0 = 2$ wird aber eine Phasendrehung von 2π benötigt.

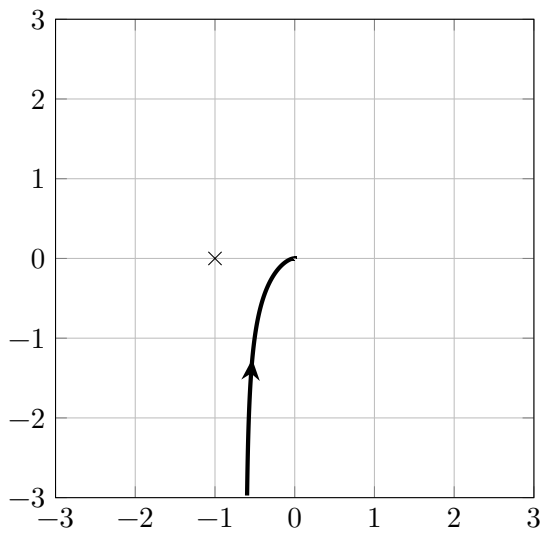
a) $m_0 = 0, a_0 = 0 \Rightarrow$ asym. stabil



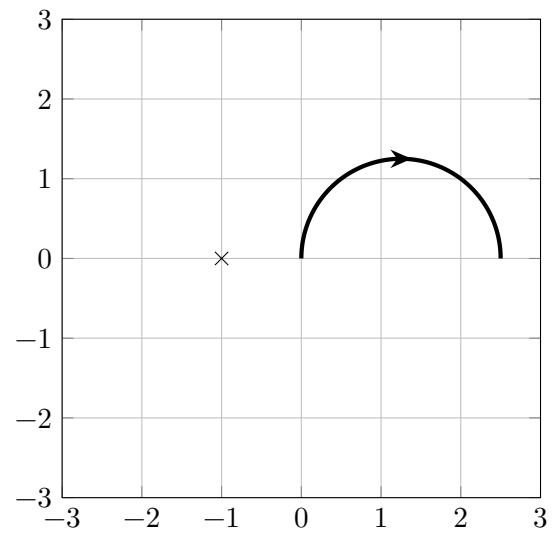
b) $m_0 = 1, a_0 = 0 \Rightarrow$ asym. stabil



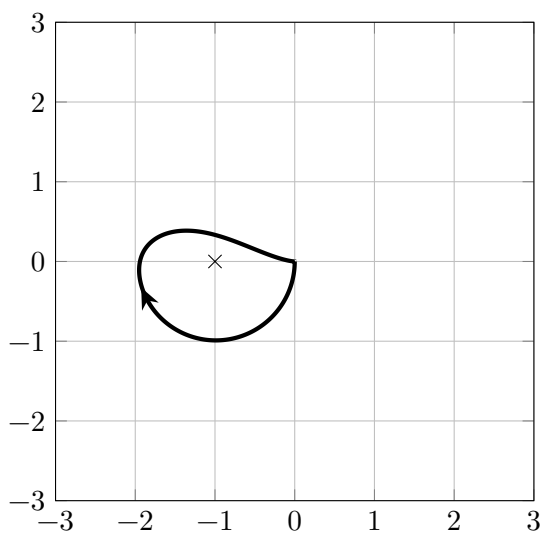
c) $m_0 = 0, a_0 = 1 \Rightarrow$ asym. stabil



d) $m_0 = 0, a_0 = 0 \Rightarrow$ asym. stabil



e) $m_0 = 1, a_0 = 0 \Rightarrow$ instabil



f) $m_0 = 1, a_0 = 0 \Rightarrow$ instabil

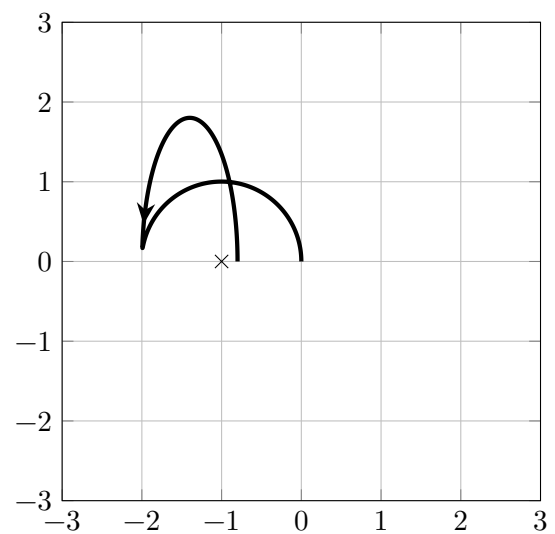
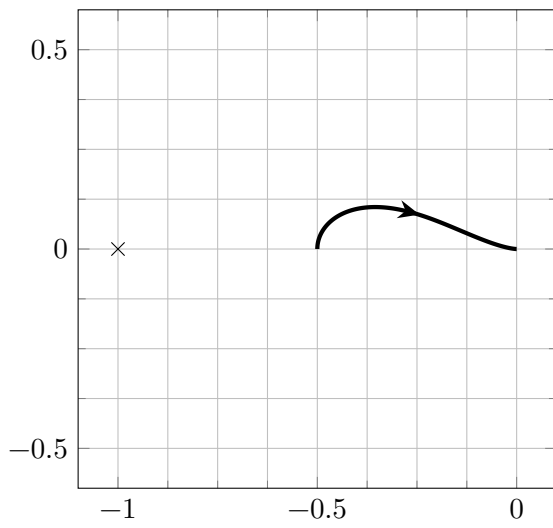
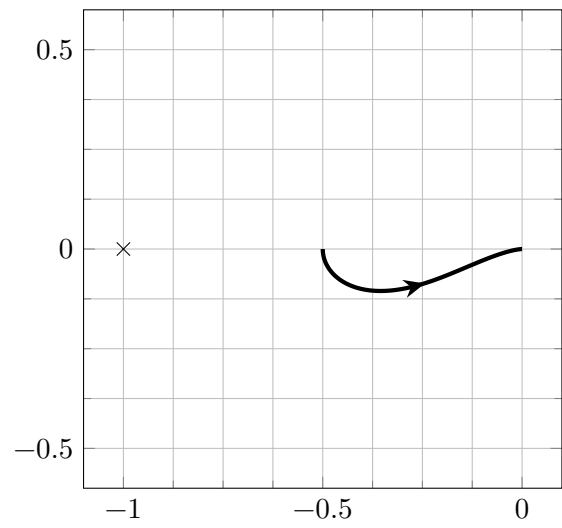


Abbildung 2: Ortskurven von G_{0i} , $i \in \{1, \dots, 6\}$ (Aufgabe 1).

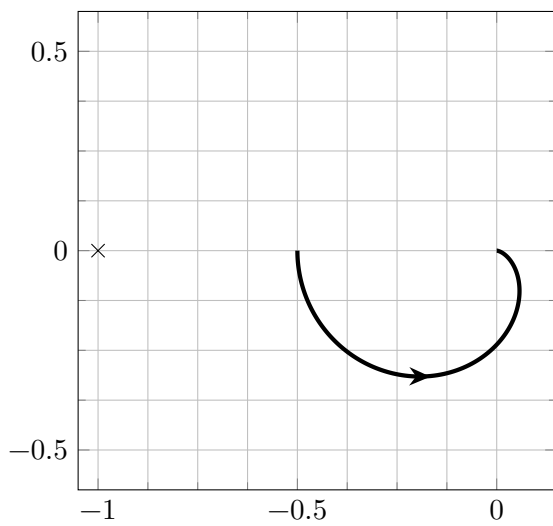
a) $m_0 = 1$ **Lösung:** $k \in \emptyset$



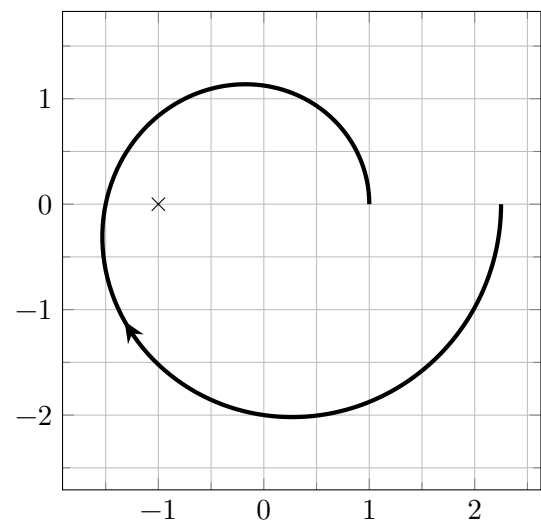
b) $m_0 = 1$ **Lösung:** $k \in (2, \infty)$



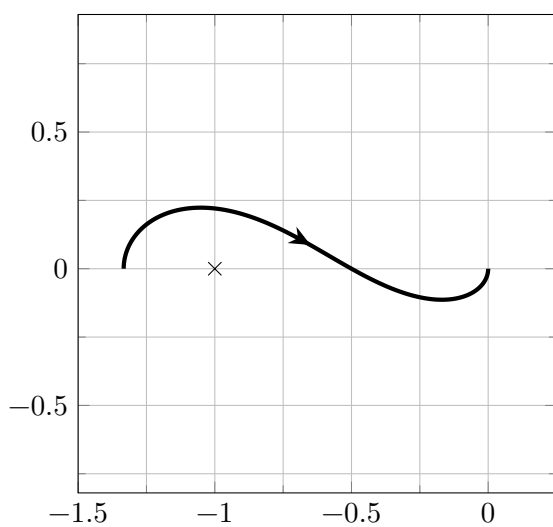
c) $m_0 = 2$ **Lösung:** $k \in \emptyset$



d) $m_0 = 0$ **Lösung:** $k \in (0, 2/3)$



e) $m_0 = 1$ **Lösung:** $k \in (2, \infty)$



f) $m_0 = 3$ **Lösung:** $k \in (2, \infty)$

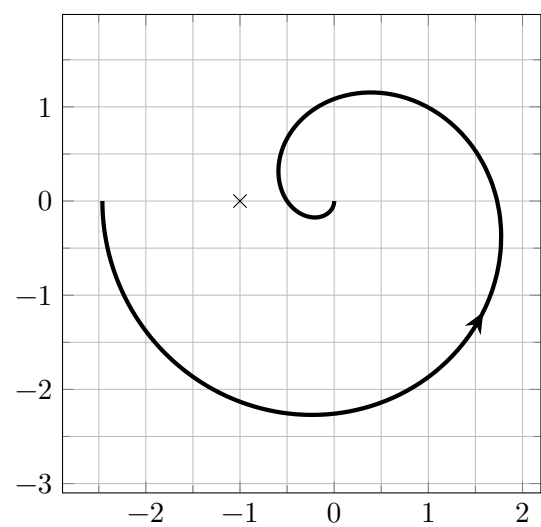
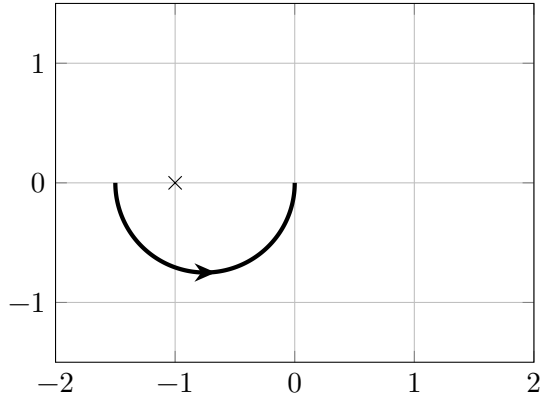


Abbildung 4: Ortskurven von G_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$ (Aufgabe 2).

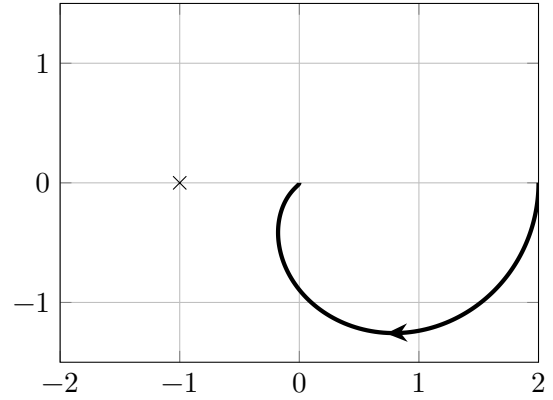
Aufgabe 3

Gegeben seien die in Abbildung 5 dargestellten Ortskurven. Bestimmen Sie jeweils die Phasen- und Amplitudenreserve. Gehen Sie dabei immer davon aus, dass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist.

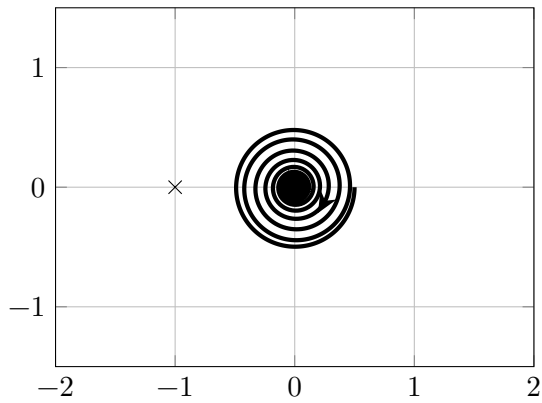
a) **Lösung:** $a_r = (2/3, \infty)$, $\phi_r = 48^\circ$



b) **Lösung:** $a_r = (0, \infty)$, $\phi_r = 96^\circ$



c) **Lösung:** $a_r = (0, 2)$, $\phi_r = \infty$



d) **Lösung:** $a_r = (0, \infty)$, $\phi_r = 132^\circ$

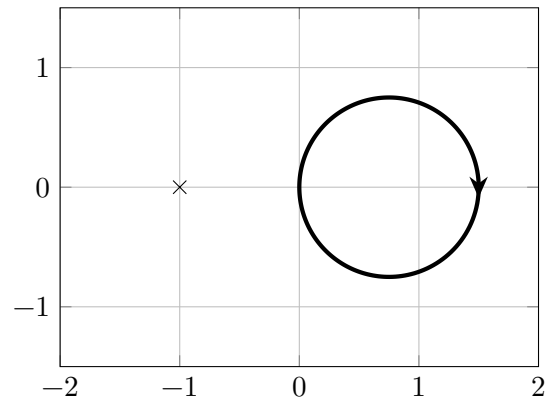


Abbildung 5: Ortskurven zu Aufgabe 3.

Aufgabe 4

Abbildung 6 zeigt das Bode Diagramm eines offenen Kreises G_0 . Der zugehörige geschlossene Kreis ist asymptotisch stabil.

- Zeichnen Sie die Amplitudenreserve a_r in Abbildung 6 ein.
- Bestimmen Sie die Amplitudenreserve a_r sowohl in dB als auch als Absolutwert.

Lösung: $a_r = (-\infty \text{ dB}, 40 \text{ dB}) = (0, 100)$

- Zeichnen Sie die Phasenreserve γ_r in Abbildung 6 ein.
- Bestimmen Sie die Phasenreserve γ_r .

Lösung: $\gamma_r = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$

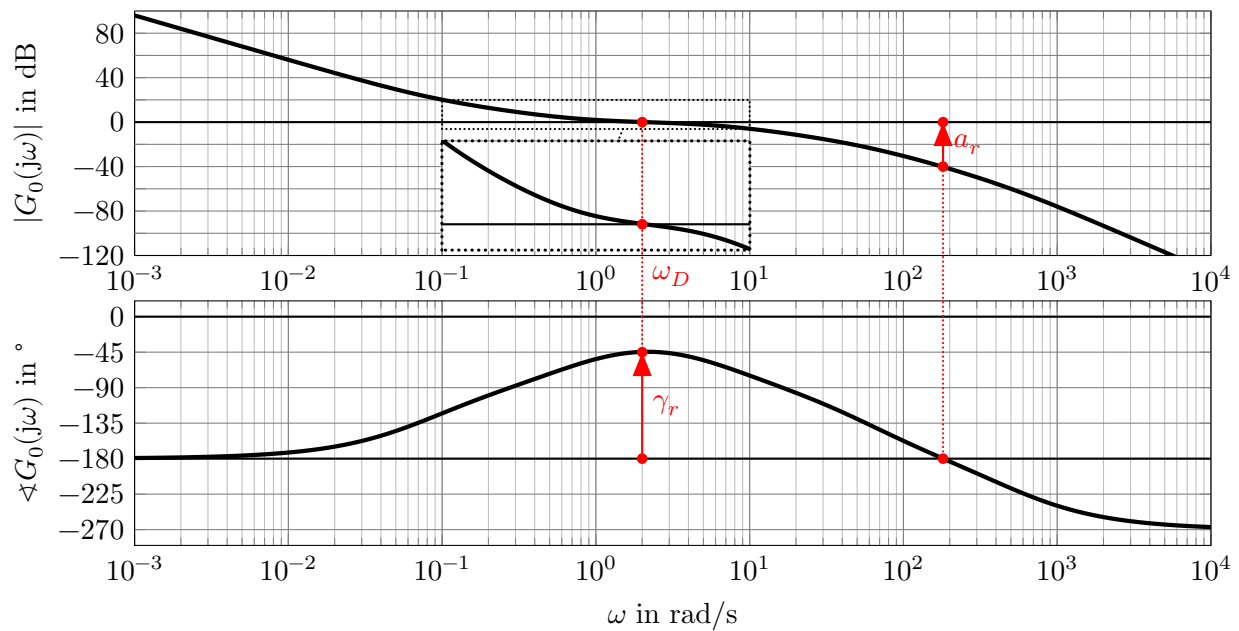


Abbildung 6: Bode-Diagramm von G_0 (—). Die Eckfrequenzen aller Pol- und Nullstellen liegen im abgebildeten Frequenzbereich. Die ω -Achse des vergrößerten Ausschnitts entspricht der ω -Achse des Diagramms.

Aufgabe 5

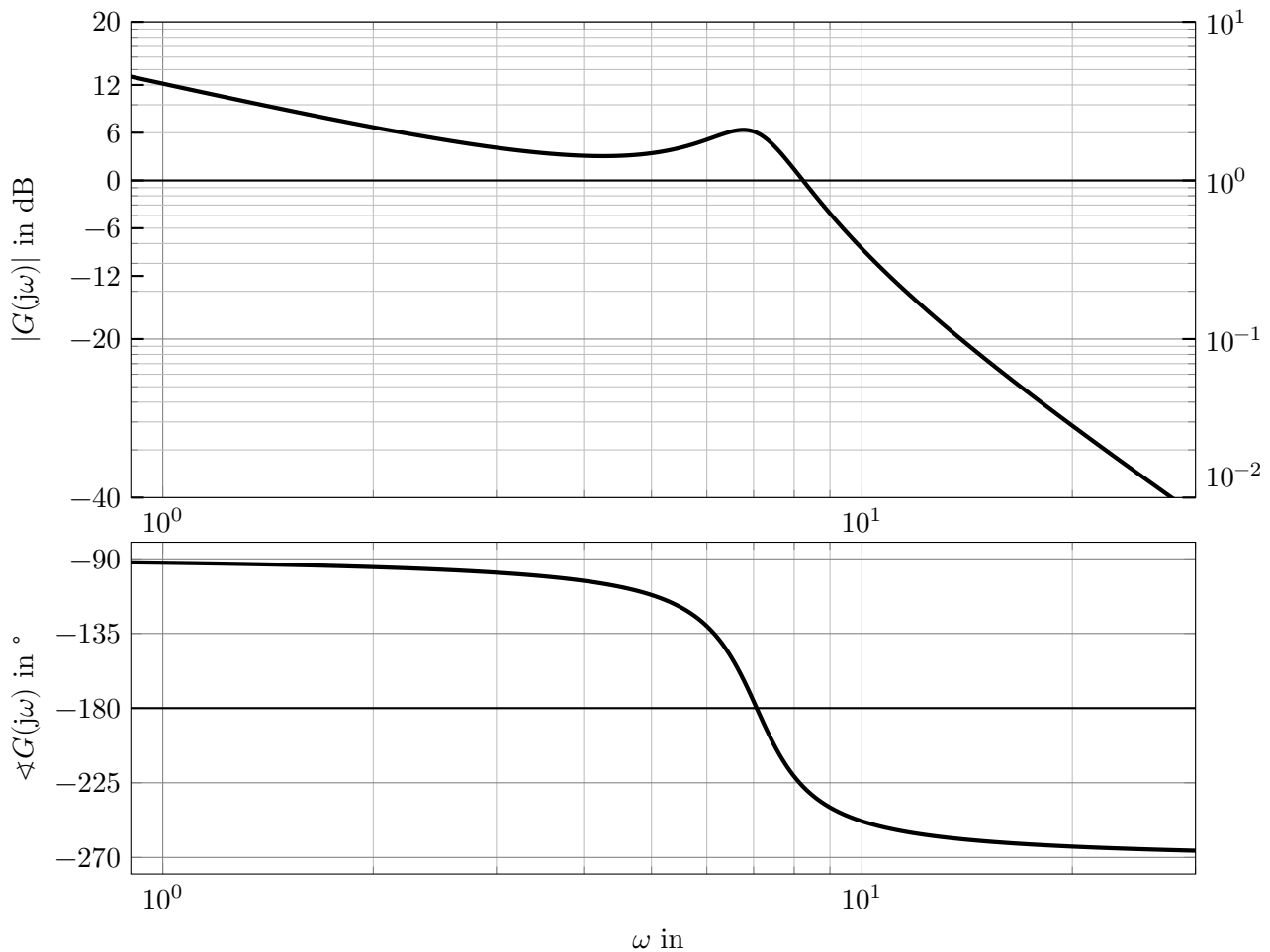


Abbildung 7: Bode Diagramm von G (—). Die Eckfrequenzen aller Pol- und Nullstellen liegen im abgebildeten Frequenzbereich.

Gegeben sei das Bode-Diagramm in Abbildung 7 einer Regelstrecke G . Der Realteil aller Pole von G ist kleiner gleich null. Die Sensitivität des geschlossenen Kreises ist $S = \frac{1}{1+k_p G}$.

- a) Können Sie mithilfe des Small-Gain-Kriteriums eine Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit dem offenen Kreis $G_0 = k_p G$ treffen?

Lösungsweg: Aus dem Bode Diagramm lesen wir ab, dass die Anfangssteigung -20dB/Dekade beträgt. Daher besitzt G einen einfachen I-Anteil. Da G wegen des I-Anteils nicht asymptotisch stabil ist, ist auch G_0 für alle k_p nicht asymptotisch stabil. Da dies Voraussetzung für das Small-Gain-Kriterium ist, kann es nicht angewandt werden.

- b) Bestimmen Sie alle $k_p > 0$, sodass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist.

Lösungsweg: Mit dem Nyquist-Kriterium ergibt sich asymptotische Stabilität genau dann, wenn $\Delta\phi_{(-1,0)}^{\text{sol}}(G_0(j\omega)) = 0 \cdot \pi + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ist.

- Nur für $k_p = 0.5 = -6$ dB wird der kritische Punkt passiert.
- Für $k_p > 0.5$ ergibt sich aus dem Bode-Diagramm $\Delta\phi_{(-1,0)}(G_0(j\omega)) = -270^\circ = -\frac{3\pi}{2}$.

- Für $k_p < 0.5$ ergibt sich aus dem Bode-Diagramm $\Delta\phi_{(-1,0)}(G_0(j\omega)) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

Daher ist der geschlossene Kreis für $k_p \in (0, 0.5)$ asymptotisch stabil. Um diese Überlegungen besser nachvollziehen zu können ist in Abbildung 8 auch die Ortskurve von G dargestellt.

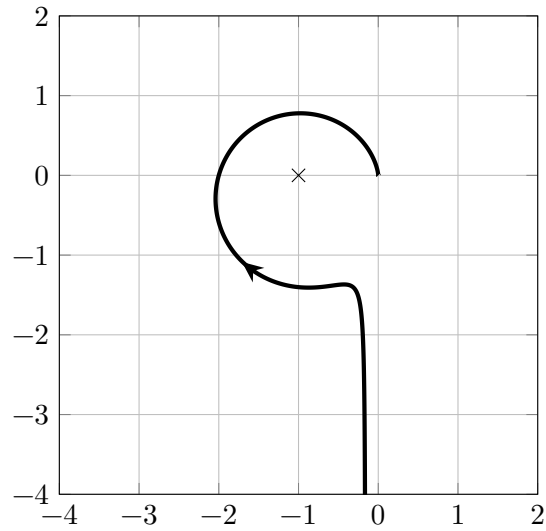


Abbildung 8: Ortskurve von G .

Standardniveau

Aufgabe 6

Gegeben sei die Übertragungsfunktion G_0 eines offenen Regelkreises

$$G_0(s) = \frac{3}{2} \frac{1}{s-1}.$$

Abbildung 9 stellt das zugehörige Bode Diagramm und die Ortskurve dar.

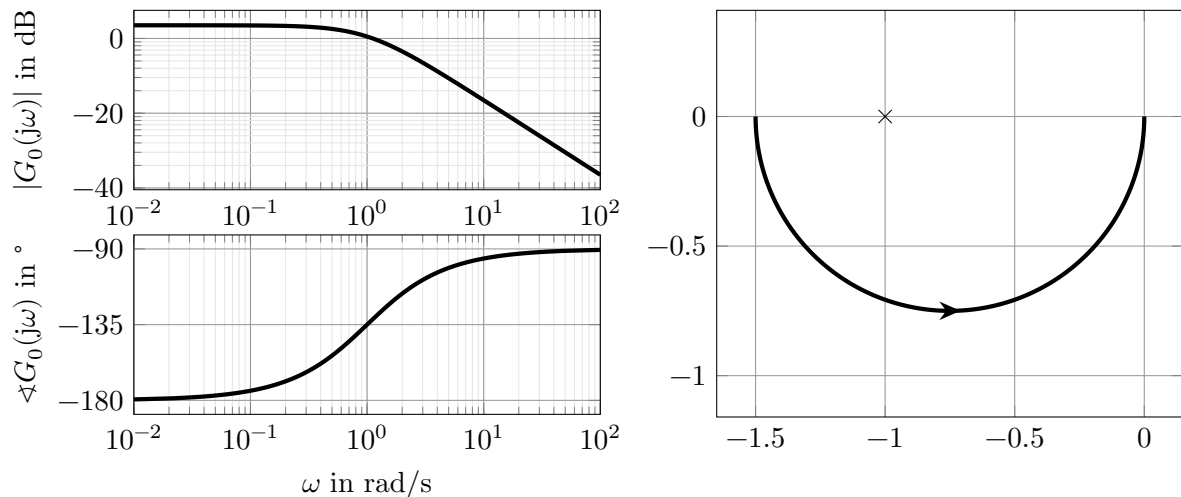


Abbildung 9: Bode Diagramm und Ortskurve von G_0 .

- a) Ist der geschlossene Regelkreis stabil?

Lösung: Die Phasendrehung ist $\Delta\phi = \pi$. Da $m_0 = 1$ ist, ist der geschlossene Regelkreis gemäß dem Nyquist Kriterium asymptotisch stabil.

- b) Bestimmen Sie aus Abbildung 9 die Phasenreserve ϕ_r des Regelkreises.

Lösung: Die Phasenreserve ist $\phi_r = 48^\circ$.

- c) Nehmen Sie im Folgenden an, dass im offenen Regelkreis eine Totzeit $\tau > 0$ auftritt. Im Frequenzbereich entspricht dies einer Multiplikation von $G_0(s)$ mit $e^{-\tau s}$, siehe Abbildung 10.

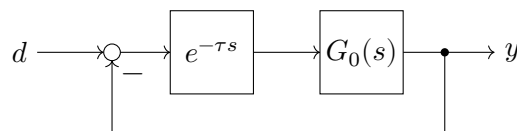


Abbildung 10: Regelkreis mit Totzeit.

Wie groß darf die Totzeit τ maximal sein, ohne dass der geschlossene Regelkreis instabil wird? Skizzieren Sie für den Grenzfall die Ortskurve des offenen Kreises $G_0(s)e^{-\tau_{\max}s}$.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst den Amplituden- und Phasengang von $e^{-\tau s}$.

Lösungsweg:

- Die Amplitude des Totzeitglieds $e^{-\tau s}$ ist immer genau 1.

- Die Phasenverschiebung des Totzeitglieds $e^{-\tau s}$ ist $-\omega\tau$. Die Phase wird also um $\omega\tau$ verringert.
- Der geschlossene Regelkreis wird instabil, wenn durch das Totzeitglied die Phasenreserve 'aufgebraucht' wird.
- Die Phasenreserve von G_0 ist $\phi_r = 48^\circ$, das heißt der geschlossene Regelkreis wird instabil, wenn die Phase des offenen Kreises bei der Durchtrittsfrequenz $\omega_D = 1.1$ rad/s um mehr als 48° verringert wird.
- Stabilität ist gewährleistet, wenn gilt

$$\omega_D \tau < \phi_r.$$

Lösung: Die maximale Totzeit ist $\tau_{\max} = \frac{\phi_r}{\omega_D} = \frac{48^\circ}{1.1 \text{ rad/s}} \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0.7616$ s. Die zugehörige Ortskurve ist in Abbildung 11 zu sehen.

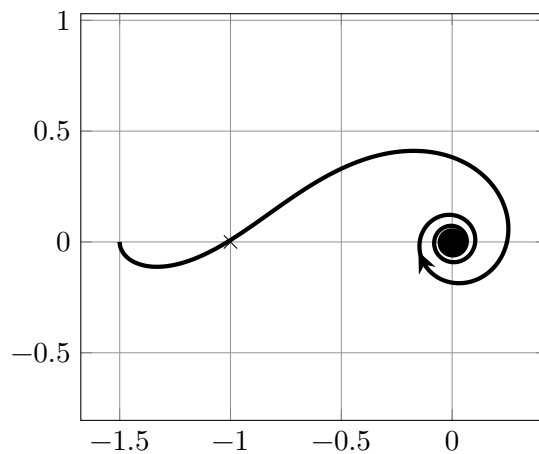


Abbildung 11: Ortskurve von $G_0(s)e^{-\tau_{\max}s}$.