

Wochenprogramm **1** mit Lösungsweg: Stabilität 1

Bestehensniveau

Aufgabe 1 Gegeben sei der in Abbildung 1 dargestellte Standardregelkreis.

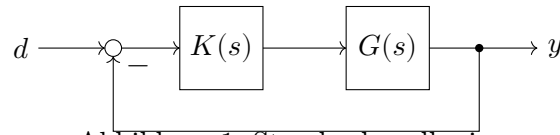


Abbildung 1: Standardregelkreis.

Die Strecke G sei gegeben durch

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s + 2)(s + 3)}.$$

- a) Ist die Regelstrecke G stabil?

Lösung: Die Regelstrecke G ist stabil.

Lösungsweg: Beide Pole liegen in der linken Halbebene.

- b) Gegeben sei der P-Regler $K(s) = 1$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises

$$T(s) := \frac{Y(s)}{D(s)}.$$

Ist der geschlossene Regelkreis stabil?

Lösung:

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{s - 1}{s^2 + 6s + 5}.$$

Der geschlossene Kreis ist stabil.

Lösungsweg: Die Stabilität wird hier am Besten mit Hilfe der Vorzeichenbedingung (VZB) überprüft.

Hinweis: Für ein System 2. Ordnung ist die VZB notwendig und hinreichend. Für System höherer Ordnung ist die VZB nur notwendig.

- c) Alternativ soll jetzt der Regler

$$K(s) = \frac{1}{s + 0.1}$$

verwendet werden. Ist der Regler K stabil? Ist der geschlossene Regelkreis stabil?

Lösung: Sowohl die Strecke G als auch der Regler K sind stabil. Der geschlossene Kreis ist jedoch instabil.

Lösungsweg:

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{s-1}{s^3 + 5.1s^2 + 7.5s - 0.4}.$$

Die Vorzeichenbedingung ist verletzt.

d) Als ein weiterer Kandidat für einen stabilisierenden Regler wird nun

$$K(s) = -\frac{10}{s+0.1}$$

vorgeschlagen. Ist der Regler K stabil? Ist der geschlossene Regelkreis stabil?

Lösung: Sowohl die Strecke G als auch der Regler K sind stabil. Der geschlossene Kreis ist jedoch instabil.

Lösungsweg:

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{-10(s-1)}{s^3 + 5.1s^2 - 3.5s + 10.6}.$$

Auch hier ist die Vorzeichenbedingung nicht erfüllt.

Aufgabe 2 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.\end{aligned}$$

a) Der Regelkreis wird durch eine Zustandsrückführung $u = -p\mathbf{k}^\top \mathbf{x}$ geschlossen, wobei $\mathbf{k}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben sei und $p \in \mathbb{R}$ ein zu wählender Verstärkungsfaktor ist. Bestimmen Sie alle p , für die der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist.

Lösung: $p > -2$

Lösungsweg: Es gilt $\dot{\mathbf{x}} = (A - p\mathbf{b}\mathbf{k}^\top)\mathbf{x}$. Damit

$$A - p\mathbf{b}\mathbf{k}^\top = \begin{pmatrix} -3-p & -2-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - (A - p\mathbf{b}\mathbf{k}^\top)) &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda + 3 + p & 2 + p \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda^2 + (3+p)\lambda + 2 + p.\end{aligned}$$

Mit der Vorzeichenbedingung ergibt sich asymptotische Stabilität für alle $p > -2$.

b) Alternativ soll jetzt der dynamische Zustandsregler

$$\begin{aligned}\dot{x}_R &= -x_R - 2y \\ u &= p\left(\frac{3}{2}x_R + 2y\right)\end{aligned}$$

betrachtet werden, wobei $p \in \mathbb{R}$ wieder ein zu wählender Verstärkungsfaktor ist. Bestimmen Sie alle p , für die der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist.

Lösung: $-2 < p < 2$

Lösungsweg: Mit $d \equiv 0$ lässt sich der dynamische Zustandsregler als

$$\begin{aligned}\dot{x}_R &= -x_R + 2(d - y) \\ u &= \frac{3}{2}px_R - 2p(d - y)\end{aligned}$$

schreiben. Daher können wir das aus der Vorlesung bekannte Kriterium zur Überprüfung der asymptotischen Stabilität des geschlossenen Kreises heranziehen. Wir berechnen

$$A_g = \begin{pmatrix} -3 & -2 + 2p & \frac{3}{2}p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A_g) &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda + 3 & 2 - 2p & -\frac{3}{2}p \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda^3 + 4\lambda^2 + (5 - 2p)\lambda + p + 2.\end{aligned}$$

Damit folgen aus der Vorzeichenbedingung $p < \frac{5}{2}$ und $p > -2$ als notwendige Bedingungen für asymptotische Stabilität. Die Beiwertebedingung ergibt

$$4(5 - 2p) - 2 - p > 0$$

und damit $p < 2$. Zusammenfassend ergibt sich asymptotische Stabilität für alle $-2 < p < 2$.

Aufgabe 3

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}.\end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Pole des Systems in obiger Zustandsraumdarstellung.

Lösung: Die Pole des Systems sind die Eigenwerte von A . Das charakteristische Polynom von A ist $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Das System hat also zwei Pole $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

- b) Berechnen Sie für die drei Fälle

- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}^T = (0 \quad 1)$,
- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}^T = (0 \quad 1)$,
- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}^T = (1 \quad 0)$,

jeweils die Pole der (gekürzten) Übertragungsfunktion G von u nach y . Was stellen Sie fest? Suchen Sie nach einer anschaulichen Erklärung für Ihre Feststellung.

Lösung: Die Übertragungsfunktionen folgen jeweils aus

$$G(s) = \mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \mathbf{c}^T \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s-1 \end{pmatrix} \mathbf{b}.$$

Damit erhalten wir

- $G(s) = \frac{2}{(s+1)(s-1)}$: Diese Übertragungsfunktion hat die gleichen Pole wie die Zustandsraumdarstellung.
- $G(s) = \frac{1}{(s+1)}$: Diese Übertragungsfunktion hat nur einen Pol bei $s_1 = -1$. Der instabile Pol erscheint nicht in der (vollständig gekürzten) Übertragungsfunktion.
- $G(s) = 0$: Diese Übertragungsfunktion besitzt keine Pole.

Man kann also beobachten, dass nicht alle Pole der Zustandsraumdarstellung in der (vollständig gekürzten) Übertragungsfunktion erscheinen müssen. Dieses "Verschwinden" von Polen im zweiten und dritten Fall kann man sich auch anschaulich erklären.

Im zweiten Fall regt u nur die x_2 -Dynamik an und die x_2 -Dynamik wird auch am Ausgang sichtbar. Der Einfluss von u auf y geht also nur über die zweite Zeile der Zustandsraumdarstellung und die Übertragungsfunktion besitzt deshalb nur einen Pol.

Im dritten Fall regt u ebenfalls die x_2 -Dynamik an, die jedoch keinen Einfluss auf die x_1 -Dynamik hat. Da nur x_1 am Ausgang erscheint, gibt es keinen Einfluss von u auf y , also auch keine Pole.

Abbildung 2 zeigt dies in einer graphischen Darstellung.

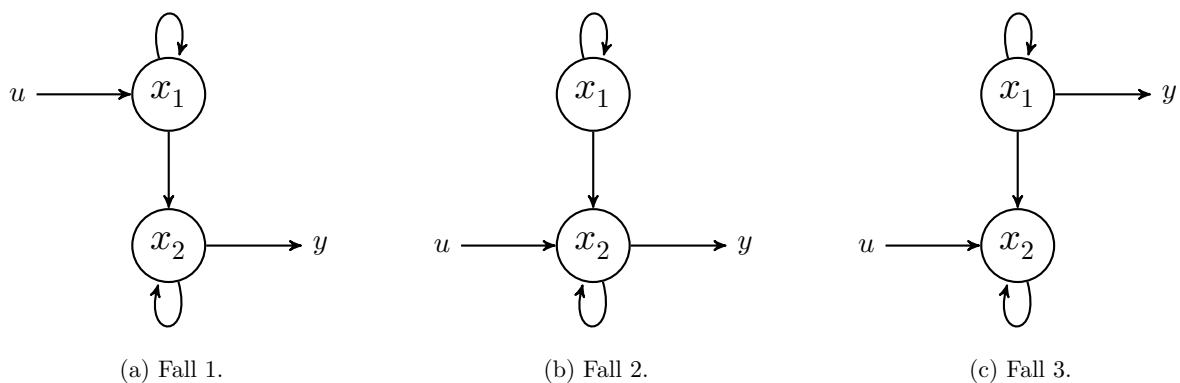


Abbildung 2: Graphische Darstellung des Signalflusses.

Standardniveau

Aufgabe 4 Gegeben sei der Regelkreis in Abbildung 3, wobei der offene Kreis G_0 in Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (d - y)$$

$$y = (-1 \quad 1 \quad 0) \mathbf{x}$$

gegeben sei.

- a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Kreises. Ist diese asymptotisch stabil? Wie viele Pole kennzeichnen das Übertragungsverhalten von G_0 ?

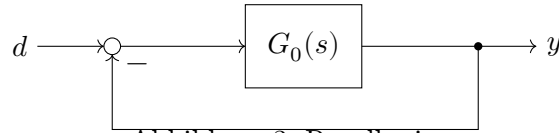


Abbildung 3: Regelkreis.

Lösung: $G_0(s) = \frac{4}{s^2+7s+12}$, diese ist asymptotisch stabil. Zwei Pole kennzeichnen das Übertragungsverhalten, obwohl die Zustandsraumdarstellung drei Zustände besitzt.

Lösungsweg: Wir berechnen die Übertragungsfunktion des offenen Kreises zu $G_0(s) = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{4}{s^2+7s+12}$. Mit der Vorzeichenbedingung ist diese asymptotisch stabil.

- b) Überprüfen Sie den geschlossenen Kreis auf asymptotische Stabilität.

Lösung: Der geschlossene Kreis ist asymptotisch stabil.

Lösungsweg: Wir überprüfen die charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises

$$N_0(s) + Z_0(s) = s^2 + 7s + 16 = 0.$$

Mit der Vorzeichenbedingung ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil.

- c) Überprüfen Sie die Stabilität des offenen Kreises G_0 im Zustandsraum.

Lösung: Instabil.

Lösungsweg: Das charakteristische Polynom von A ist $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda - 12$, damit ist der offene Kreis mit der Vorzeichenbedingung instabil.

- d) Überprüfen Sie die Stabilität des geschlossenen Kreises im Zustandsraum.

Lösung: Instabil.

Lösungsweg: Der geschlossene Kreis lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{c}^\top)\mathbf{x} + \mathbf{b}d \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom von $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{c}^\top)$ ist $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda - 16$, damit ist der geschlossene Kreis mit der Vorzeichenbedingung instabil.

- e) Wie können Sie sich diese scheinbar widersprüchlichen Ergebnisse zwischen der Analyse im Frequenzbereich und im Zustandsraum erklären?

Lösung: Der Regelkreis ist nicht intern stabil.

Lösungsweg: Offensichtlich ist der Regelkreis nicht intern asymptotisch stabil, da A Eigenwerte in der rechten Halbebene besitzt. Man erkennt dies auch daran, dass bei der Berechnung von $G_0(s)$ eine Pol-Nullstellenkürzung in der rechten Halbebene auftritt.