Rechengesetze

Binome

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^n = a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + a^0 b^n$

Potenz

$a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$b^{xy} = a^{x\cdot y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{0} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

MM F

$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{b+a}{b+a}$ Zeilen → Spalten

Betrag: $|a+b| \le |a| + |b|$

1. $|a| \ge 0$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a+b| \le |a| + |b|$

Komplexe Zahlen

$z = a+bi = |z|\cdot(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ (Vektorrisch) (Polarkoordinaten)

Allg.

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad z\cdot\overline{z} = |z|^2$

$\overline{z} = a-bi$ $\quad |z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

Arg

$\arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{sonst} \\ \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) \ge 0 \end{cases}$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

$\arg(\overline{z}) = \overline{z_1} \cdot \arg(z)$

Polarkoordinaten

$z = |z|e^{i\varphi}$

$\overline{z} = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ =

$|z_1 z_2| = |z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ $\quad (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$w_k = \sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right)$

Kreis Mittelpunkt $(x_0|y_0) \to (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ (implizit form)

Gerade $y = mx+c \to b = mc+c$ (komplexe Zahlen)

$HNF: E: \sum_{i=1}^{n} x \cdot n_i = d$

$\mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Parallelogramm $\mathbb{R}^2$ $\quad F = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$

Vektorräume

Untervektorraum $U \subseteq V$

- $U \neq \emptyset \to 0 \in U$ in U
- $u, v \in U \to s\cdot u \in U$
- $u + v \in U$

Skalarprodukt

$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$

$\langle v|w\rangle = \|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos(\delta)$

$\langle u|v\rangle = 0 \to$ orthogonal

Ebene, Gerade, Punkt

Gerade: Ebene

$g = E \to$ nach Parameter lösen

$E = E$

GGs mit $\vec{n}$ und Parameter setzen

Abstand Ebene Punkt

$d = |\langle n|Q-P\rangle|$

Gerade: P $\to$ $d = \frac{\|\vec{PQ} - \frac{\langle \vec{PQ}|\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$ Punkt $\frac{a_1 \cdot P_1}{a_2 \cdot P_2} = d_2$

Fläche

$A_D = \frac{1}{2}|a \times b|$

$A_D = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$

Winkel Ebene:

$\cos\delta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\|\cdot\|n_2\|}$

Kreuzprodukt

$a \times b =$

$\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

LGS und Gauß

1 Lösung wenn $\det \neq 0 \to$ Lineare Unabhängigkeit

∞ Lösungen für $\det = 0$ $\quad b = \frac{\det}{\det} + t\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^2$

homogen $b = 0$, sonst inhomogen

homogenes LGS = $U \neq \emptyset$, inhomogenes LGS = kein oder additives Teilraum

Gsp

$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \to b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (minus)

$RG(A) = Rg(A|b) \to$ LGS Lösbar

Lineare Abbildungen

$f: V \to W$ (Linear wenn $a(u+v) = a(u)+a(v)$

$D^W \to W = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ $\quad g(u,v) = k\cdot a(v)$

$\mathcal{E}^B_B = \mathcal{E}(f(b_1), \dots)$

$G(B \circ G)_E = G^B_E \cdot E^B_E$

$E^B \circ B_E = E^E_E \cdot E^B_E \; (B \circ A)$

Basiswechsel: $E: id_G = (b_1|b_2)$, $B: id_E = (id_B)^{-1}$

$A^B_E = id^E_E \cdot E^B_E \cdot E^I id_E$ (Mat. x produkt)

Inverse ↓

Dimension, Kern, Bild

$Rg(A) = \dim Bild(A) \neq$ Nullzeilen

z. B. $\dim\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 2$ Dimension

$\dim(Kern) =$ Freiheitsgrade

$\dim(Bild) =$ Zeilen/Spalten

$t =$ freie Parameter

Dimensionsformel:

$\dim V = \dim Kern(a) + \dim Bild(a)$

i.a. Substanzgleiche Stoffe

Basis Bild = Spalte von a in Anfangsform

Basis Kern = Parameter setzen → in $L(=)$

Injektiv → $\dim Kern(a) = 0$ (≤ 2)

Surjektiv → $\dim = \dim Kern(a) = 0$

Bijektiv → ?? = muss quadratisch sein

Rang Matrix

$rg(A) \neq$ Nullzeilen $\quad$ Rang max (r,s)

Zeilen = Spaltenrang

$s = rg(A) + \dim Kern(A)$

Injektiv: $Rg = s$

Surjektiv: $Rg = r$

$rg(A) = n \to$ eindeutig lösbar

$rg(A) \neq n \to \infty$ oder unlösbar

Inverse

$\det \neq 0$ $\quad A^{n\times n}$

Linksinverse $\Rightarrow BA = E_n \circ Rg A = s$

Rechtsinverse $\Rightarrow AC = E_n \circ Rg A = z$

Singulär = $Rg(A) < r = s \to \det = 0$ $\quad$ keine Inverse

Regulär = Quadratisch und voller Rang

Eigenschaften

$A = (A^{-1})^{-1}$ $\quad A \cdot A^{-1} = E_n$ $\quad (AT)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(AB)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ $\quad$ Diagonalmatrix $= \frac{1}{a_{ii}}$ $\quad$ 2×2 (ad−bc) $= \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Determinanten

$\det A = |A| = \det(A^T)$

$\det(A\cdot b) = \det(A)\cdot\det(B)$

$\det(A^n) = \det(A)^n$ $\quad \det(kA^{n\times n}) = k^n \det(A)$

$\det(A) = \det(A^T)$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ $\quad$ wenn $\det(A) \neq 0$

Orthogonal

$A^T A = E_n$ $\quad A^T = A^{-1}$ $\quad \det(A^T) = \det(A^{-1})$

Spalten = ONB

Orthogonal = Invertierbar u. Bijektiv

$\langle Au|Aw\rangle = \langle v|A^T Aw\rangle$

Adjunktheit: $\langle Au|w\rangle = \langle v|Bw\rangle$

$A = A^{-1}$

ONB Rechtssystem: $\det = 1$ in $\mathbb{R}^3$

$\langle b_i|b_i\rangle = 1$ $\quad \langle b_i|b_{i\neq j}\rangle = 0$

Schmidtsches Verfahren

$L(b_1, b_2, \dots) = LU$ (Form:)

$f_1 = \frac{1}{\|a\|} b_1$ $\quad$ f normiert

$f_2 = b_2 - \langle b_2|f_1\rangle f_1$ $\quad$ b₂ ohne Anteil von f₁

$f_3 = b_3 - \langle b_3|f_2\rangle f_2 - \langle b_3|f_1\rangle f_1$

Euklidische Bewegungsgeometrie

$|P-Q| = |a(P)-a(Q)|$

= linearer Anteil A orthogonal

$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det = 1 \to$ Drehung

$\det = -1 \to$ Spiegelung

$\varnothing$ Affinität

Affine Abbildungen

$\det A = 1 \to$ Drehung = eigentlich

$\det A = -1 \to$ (Dreh-) Spiegelung = uneigentlich

Drehung $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\quad$ Spiegelung: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

$(3\times3$ Matrix$) \to (D-F_0) = 0$ (Drehachse)

$\cos(\chi) = \frac{Sp F - 1}{2}$

$Sp F =$ Hauptdiagonale Summe $\quad Sp(xy) = Sp(yx)$

$T =$ invertierbar $\to Sp(T^{-1}AT) = Sp A$

Koordinatentransformation

$F = (\vec{v}_1|\vec{v}_2|\vec{v}_3)$

$EV = E \times_E F(FV) = F_{FV} \circ$

$FV = E \times_E (EV) = (E \times_E F)^{-1} EV = F^{-1}_E EV = F^{-1} \circ$

$G^K_F = G^K_E \circ_E F^E_F$

$F \circ_G (V) = F \times_E \circ_{E \to G} \circ_E V = G \quad (\circ (G_E V - F_E)) + S$

$G \times_F E \times = G^K$

Eigenwerte = UVR

$EW = \det(A - \lambda_i E_n) = 0 \to$ Nullstellen

charakteristisches Polynom: $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda_{EW})$ in Polynom

Algebraische Vielfachheit = $e_{\mu i}$ = wie oft Nullstelle vorkommt $\le (2-1)^2$

geometrische Vielfachheit = $d_{\mu i}$ = Zeilen − $Rg A$ = Nullzeilen $\quad d_{\mu i} \le e_{\mu i}$

$\det = \pi \lambda$ (Produkt) $\quad Sp A =$ Summe λ

konjugiert: $\det A = \det G$, $Sp A = Sp G$, λ gleich bei $A \cup B$

Diagonalisierbar (alg. = geometrische Vielfachheit)

Rolle $\to e_{\mu i} = 1$ $\quad$ $\mathbb{C} = \mathbb{R}$

Symmetrische Matrizen: $A = A^T$

hermitesch " : $A = \overline{A}^T$ (alle konjugieren)

$EW: n \; A^{-1} = \frac{1}{\lambda}$

komplexe EW: immer ? Und $\overline{\lambda}$

$A = TDT^{-1}$

Quadriken

$Q := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T A x + 2a^T x + c = 0\}$

$A_{neu} = \begin{pmatrix} c & a^T \\ a & A \end{pmatrix} \Rightarrow$ Regenw = R_0 → Ursprungsgerade Q
Regenw = R_{eig} → Mittelpunkte a
Regenw = R_{eig} → parabolische a

$A = \begin{pmatrix} x_1 & \frac{x_2}{2} & \frac{x_3}{2} \\ \frac{x_2}{2} & x_2 & \frac{x_3}{2} \\ \frac{x_3}{2} & \frac{x_3}{2} & x_3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} \frac{x_4}{2} \\ \frac{x_5}{2} \\ \frac{x_6}{2} \end{pmatrix}$

Euklidische Normalform

1. $D = S^T A S = S^{-1} A S \rightarrow$ EW von A $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$
2. $F = SV$ beginnen und normieren
3. Diagonalisieren: $\tilde{y}^T D y + 2\tilde{a}^T F a y + c = 0$
4. Verschieben (quadr. Ergänzung)
   $Q = a_1 y_1^2 + b y_1 + \dots$
   $\rightarrow Q = a(y_1 + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 \dots + c$
5. Substituieren $\rightarrow Q = a_1 y_1^2 \dots \pm 1$ (oder positiv/negativ Teil)
6. Wenn $\neq 0$ dann y_1 und c kramern und substituieren $Q = \alpha y_1^2 + \dots = \pm z_0$

Affines VOS

$F\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ Nullstellen Substitution
(F)

positiv definit: alle EW > 0
negativ " : alle EW < 0
indefinit → gemischt

Kreislige Q: $\mu_1 x_1^2 + \dots$ ohne c
Mittelpunkts Q: $\mu_1 x_1^2 + \dots + 1$
Parabolisch Q: $\mu_1 x_1^2 + \dots \pm x_{n+1}$

Hauptachsentorige Ellipse

$\frac{-x_1^2}{b^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{d}{a^2} + 1 = 0$

$x_1^2 + x_2^2 = k \rightarrow$ kreis (unterschiedlich)
k > 0 (1 Punkt)
k < 0 (∅ Punkt)

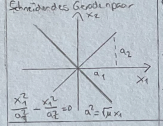
LGS:

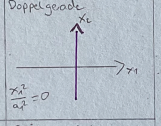
1. nach 2 → $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; f_1, f_2$
2. nach 4 → $G(P_1, P_2, f_1, f_2)$
3. nach 6 → (P - Nullstelle, f_1 bzw (1), f_2, f_3)

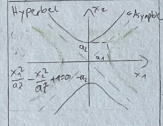
x_1^2	x_2^2	x_3^2	c	Raum
+	+	+	0	ein Punkt*
+	+	−	0	Doppelkegel
+	+	+	1	∅ Punkt*
+	+	−	1	zweischaliges Hyperboloid
+	−	−	1	einschaliges Hyperboloid
−	−	−	1	Ellipsoid
+	+	z_{K3}	0	elliptisches Paraboloid
+	−	z_{K3}	0	hyperbolisches Paraboloid

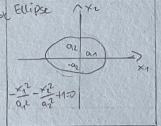
* ein c möglich

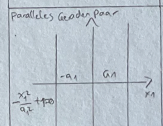
x_1^2	x_2^2	x_2	c	$\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^3$
+	+			ein Punkt (keine Gerade*)
+	−			Schneidendes Geraden-/Ebenenpaar
+				Doppelgerade / Doppelebene
+	+		1	∅ Punkt
+	−		1	Hyperbel / hyperbolischer Zylinder
−	−		1	Ellipse / elliptischer Zylinder
+			1	∅ Punkt
−			1	parallele Geraden-/Ebenenpaar
+		2		Parabel / parabolischer Zylinder

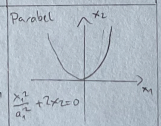












Spezial

$P: \text{Pol}_{\leq 1}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}_{\leq 1}(\mathbb{R})$
$p(x) \rightarrow p(x+1)$

$P(x^0) = 1$
$P(x^1) = x+1$
$P(x^2) = (x+1)^2$

$P^{-1}: p(x) \rightarrow p(x-1)$

Vektorprodukt

1. $b \times a = -b \times a$
2. $\langle a | a \times b \rangle = 0$
3. $\langle b | a \times b \rangle = 0$
4. $|a \times b| = \|a\| \|b\| \sin c(a,b)$
5. $a \times b = 0 \rightarrow$ l.a.
6. $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$
   $(b+c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$
   $a \times (s \cdot b) = s \cdot (a \times b) = (s \cdot b) \times b$

Induktion

(I A) $A(1) = \dots$ ✓
(I H) Es gibt ein n∈N für das gilt: -
(I S) $A(n) \rightarrow A(n+1)$
Damit ist die Aussage für alle n∈N bewiesen.

Injektiv: $(\forall a, b \in \Sigma a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$
b ∈ W, a ≠ b ⇒ c(a) ≠ f(b)

Surjektiv: $(\forall z \in Z \; \exists n \in A : f(n) = z)$

$f: A \rightarrow Z$ - Zielbereich
Definitionsbereich

Vektorraum

a, b liegt auch in a + b in U
a ∈ U → s ∈ K auch s · a ∈ U
0 ∈ U

Folgen

Grenzwerte $\lim_{n\to\infty}$ ordnen $x = \frac{x}{\infty}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $\quad \frac{n^c}{n!} = 0$ $\quad q^n = 0$ falls $\lvert q\rvert < 1$ $\quad \frac{n^n}{n!} = \infty$ $\quad \frac{q^n}{n!} = 0$ $\quad \frac{a^n}{n!} = 0$

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ $\quad \frac{n^c}{\ln(n)} = \infty$ $\quad \frac{n^n}{c^n} = \infty$ $\quad \frac{n!}{n^n} = 0$ $\quad \frac{\ln(n)}{n^\varepsilon} = 0$ $\quad \frac{\sqrt[n]{n}}{n} = 0$

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ $\quad \frac{c^n}{n^n} = 0$ $\quad \sqrt[n]{n} = 1$ $\quad \frac{n^n}{n!} = e$ $\quad \sqrt[n]{n!} = \infty$ $\quad \sqrt[n]{a} = 1$ $\quad \sqrt[n]{n^c} = 1$

Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(1)$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ falls $\lvert q\rvert < 1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sin(1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh(x)$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos(1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}\lvert B_{2k}\rvert$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh(x)$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{4}$

FAU Stirling Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} = \frac{(2\pi)^{2k+1}}{2(2k+1)!}\lvert B_{2k+1}\rvert$

Konvergenzkriterien

Quotientenkriterium

$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz

$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert > 1 \Rightarrow$ Divergenz

$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} > 1 \Rightarrow$ Divergenz

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

a. $\forall n: a_n \geq 0$ $\quad$ b. (a_n) monoton fallend $\quad$ c. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert

Majoranten- und Minoranten-Kriterium

$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \lvert a_n\rvert \leq b_n$ $\Rightarrow$ absolute Konvergenz

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert

$\forall n: a_n \geq c_n > 0$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ $\quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ $\quad \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ $\quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n(n+1)2^{n-2}$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$

Potenzreihe, Taylorreihe

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ $\quad$ Taylorreihe: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $\quad$ Konvergenzradius: $r = \lim_{k\to\infty} \left\lvert \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\rvert$

Formeln Euler/de Moivre

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $\quad e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ $\quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$

$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ $\quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\quad \cos(-x) = \cos(x)$

Additionstheoreme

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ $\quad \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ $\quad \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ $\quad \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$= 2\cos^2 x - 1$ $\quad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$= 1 - 2\sin^2 x$ $\quad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$= 2\cos^2(x) - 1$

Stetigkeit

ε-δ-Kriterium

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \mathbb{R}: \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(x_0)\rvert < \varepsilon$

Folgenkriterium

1. $f(x)$ ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ für jede gegen x_0 konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq x_0$ konvergiert die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$.
2. G Gebietsmenge, $x_0 \in G$
3. f in x_0 stetig $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
4. Summe, Produkt, Verkettung stetiger Funktionen sind stetig.
5. Beispiel für eine unstetige Funktion: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist überall unstetig.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ $\quad$ Vorsicht: Funktion muss nicht stetig sein!

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\quad$ stetig

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $\quad$ Polstelle

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ $\quad$ hebbare Definitionslücke

Funktionsgrenzwerte

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(rx)}{x} = r$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sin(rx)} = \frac{1}{r}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = \cos(x)$

L'Hospital

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{0}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\quad$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\infty}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

Intermediatlösungsverfahren

Stetig: $f(a) < 0 < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a,b]: f(x) = 0$

1. $f(a) \leq f(a_1) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$, setze $a_2 := \frac{a+b}{2}$, $b_2 := b$
2. $f(a) \leq f(a_2) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, setze $a_2 := a$, $b_2 := \frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

Ableitung

$\frac{dt}{dx} f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Produktregel: $(fg)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Verkettungsregel: $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Ableitung Umkehrfunktion: $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Ableitungsregeln:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
e^x	e^x
a^x	$a^x\ln(a)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1-\tanh^2(x)$
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

Taylorreihe + Restglied

$T_n(f,x_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$R_n(f,x_0)(x) = f(x) - T_n(f,x_0)(x)$

Taylorreihe: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ $\quad$ Restglied: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Taylorreihe Bsp: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Extrema

$f'(x_0) = 0$ $\quad \forall \delta > 0 \exists x \in (x_0-\delta, x_0+\delta): f(x) > f(x_0)$ $\Rightarrow$ lok. Min

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ lok. Min

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ lok. Max

Monotonie: $f(x_0) = f(x) \Rightarrow$ gegeben $f(x_0) \geq f(x) \Rightarrow$ Gegenteil

Integral

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Partielle Integration

$\int f'(x)g(x)dx = [f(x)\cdot g(x)] - \int f(x)\cdot g'(x)dx$

Substitution

1. $\alpha x \mapsto \alpha$
2. $\frac{dx}{dt} = g'(x) \Rightarrow \frac{dx}{g'(x)} = dt$ einsetzbar

$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$

4. Integrand umformen, ggf. Ableitungsregeln anwenden

Riemann-Integral

U-Summe: $S(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\cdot(x_k - x_{k-1})$ $\quad \left.\begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix}\right\}$ Ober-/Untersumme

O-Summe: $\overline{S}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\cdot(x_k - x_{k-1})$ $\quad$ Ober-/Untersumme: Summe aus Rechteck-/Trapezflächen

Integral-Vergleichskriterium

Positive, uneigentliche Integrale: konvergiert $\Leftrightarrow$ beschränkt

$\int_a^\infty f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^\infty f(t)dt$ $\quad$ $\int_a^\infty f(t)dt$ konvergiert $\Leftrightarrow \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt$ existiert

$\int_a^\infty f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^\infty f(t)dt$ $\quad$ $\int_a^\infty f(t)dt$ divergiert $\Leftrightarrow \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt = \infty$

Differentialrechnung mehrerer Variablen

M° = alle inneren Punkte (ohne Rand)

$\overline{M}$ = alle Punkte (Rand und innen)

∂M = alle Randpunkte

M beschränkt: $M \subseteq U_r(0)$

M abgeschlossen: $\overline{M} = M$

M offen: $M = M^\circ$

M kompakt: abgeschlossen + beschränkt

Partielle Ableitung

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a) = \partial_i f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+he_i) - f(a)}{h}$

$\nabla f(a) = \operatorname{grad} f(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(a) \\ \vdots \\ f_{x_n}(a) \end{pmatrix}^T$

$\nabla \cdot D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{pmatrix}$ $\quad$ Jacobi-Matrix

Taylor-Polynom

$T_1(f,x,a) = f(a) + (x-a)\cdot \operatorname{grad} f(a)$

$T_2(f,x,a) = f(a) + (x-a)\cdot \operatorname{grad} f(a) + \frac{1}{2}(x-a)^T \cdot Hf(a)\cdot(x-a)$

$T_3(f,x,a) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k)$

Extrema

Kritische Stelle: $\nabla f(a) = 0$

kritischer Punkt $(x_0, f(x_0))$

Ohne Rand

$Hf(a)$ pos. definit (alle Eigenw. > 0) $\Rightarrow$ lok. Min

$Hf(a)$ neg. definit (alle Eigenw. < 0) $\Rightarrow$ lok. Max

$Hf(a)$ indefinit $\Rightarrow$ Extremum

kritischer Punkt + indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Definitheitskriterium in $\mathbb{R}^2$

$\det Hf(a) < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$\det + f(a) > 0 \wedge \operatorname{Sp}(Hf(a)) > 0 \Rightarrow$ lok. Min

$\det Hf(a) > 0 \wedge \operatorname{Sp}(Hf(a)) < 0 \Rightarrow$ lok. Max

$\det Hf(a) = 0 \Rightarrow$ Aussage

Multiplikator-methode mit Lagrange

1. $L(x,y,\lambda) = \operatorname{grad} f(a) + \lambda \operatorname{grad} g(a) = 0$ $\quad$ Nebenbedingung $g(a) = 0$ ausgestellt
2. $\forall L \neq 0$ (d.h. $\partial L(x,y,\lambda) \neq 0$)
3. Gleichungssystem aufstellen und lösen
   - Fallunterscheidung
   - Additionsverfahren
   - Einsetzen und umstellen
4. $Hf(a)$ für Berechnung Extrema. λ einfach $\inf$ einsetzen $\pi = 3{,}141$

$f_{x_i x_j}(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_{x_i x_j}(a) = 0$

Differentialgleichungen

1. Trennung der Variablen: $y' = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$
2. Integrieren: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$
3. Auflösen nach y

Lineare DGL 1. Ordnung: $y' + a(x)\cdot y = b(x)$

Lösung: $y = e^{-A(x)}\left(\int b(x)e^{A(x)}dx + c\right)$ mit $A(x) = \int a(x)dx$

Lineare DGL 2. Ordnung: $y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 0$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Lösungsfall 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

Lösungsfall 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$: $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

Lösungsfall 3: $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$: $y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$

Vektorwertige Funktionen

$f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

Jacobi-Matrix: $Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a)^T \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_n(a)^T \end{pmatrix}$

Differentionsregeln

1. $\operatorname{grad}(f+g)(a) = g\cdot\operatorname{grad} f(a) + \operatorname{grad} f(g)$
2. $\operatorname{grad}(f\cdot g)(a) = g(a)\operatorname{grad} f(a) + f(a)\operatorname{grad} g(a)$
3. $\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\operatorname{grad} f(a) - f(a)\operatorname{grad} g(a)}{g(a)^2}$
4. $\partial(g\circ f)(a) = \partial g(b)\cdot(\partial f(a))$

   $b = U_{f(a)}$ ist eine Umgebung

5. $\forall (x_1,\dots,x_n) \to \begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ \vdots \\ y_n(x_n) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1(y_1) \\ \vdots \\ z_n(y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x_1) \\ \vdots \\ z_n(x_n) \end{pmatrix}$

Übungsblatt 10

$z_1 = e^{i\varphi} \Rightarrow \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \Rightarrow e^{i\pi} = -1$

(n-Ableitungsregeln $(\ln(x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$)

$\ln(u\cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$ $\quad$ $e^{\ln x} = x$

$\ln(\frac{u}{v}) = \ln(u) - \ln(v)$ $\quad$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\ln(u^v) = v\cdot\ln(u)$ $\quad$ $\ln(1) = 0$

$\ln(\sqrt{u}) = \frac{1}{2}\ln(u)$

Potential

$\mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend. Die Wohlbd. Und wirbelfreie Bedingung (a) trifft somit zu.

allg. $\frac{\partial}{\partial x_i} g_k = \frac{\partial}{\partial x_k} g_i$

in $\mathbb{R}^1$: $(g_x)_y = (g_y)_x$

in $\mathbb{R}^3$: $(g_x)_y = (g_y)_x$, $(g_y)_z = (g_z)_y$, $(g_x)_z = (g_z)_x$

1. $\int_{\binom{x_0}{y_0}}^{\binom{x}{y}} = \int_{x_0}^{x} U_x\binom{t}{y_0}\,dx = \dots + c(y,z)$

2. $\dots = (g_y)\binom{x}{y} = U_y\binom{x}{y} = \dots + \frac{\partial}{\partial y} c(y,z)$

3. $\frac{\partial}{\partial y} c(y,z) = \dots$

4. $\dots = (g_z)\binom{x}{y} = U_z\binom{x}{y} = \dots + \frac{\partial}{\partial z} c(z)$

5. $U\binom{x}{y} = \dots$

Diskret: $\operatorname{div} g(a) = \operatorname{sp}\partial g(a) = (g_1)_{x_1}(a) + \dots + (g_n)_{x_n}(a)$

Rotation: $\operatorname{rot} g(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y}(a) - \frac{\partial g_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial z}(a) - \frac{\partial g_3}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial g_1}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2$: $\operatorname{rot} g\binom{x}{y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}\binom{x}{y} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\binom{x}{y}$

$\operatorname{rot} g(a) = 0 \to$ Potential existiert

quellenfrei: $\operatorname{div} g(a) = 0 \Rightarrow$ Wirbelfeld: $\operatorname{rot} g = 0$

Potentialfeld: $\operatorname{rot} g(a) = 0$ | Wirbelgrad $= \frac{1}{2}\|\operatorname{rot} g(a)\|$

Laplace Operator

$\Delta f = 0 \to$ harmonische Funktion | $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

Cauchy-Riemann: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Kurvenintegrale

$\int_c g(x)\cdot dx = \int_a^b g(c(t))\cdot c'(t)\,dt = U(c(b)) - U(c(a))$

$\int_c g(x)\cdot dx = \int_{K_1} g(x)\cdot dx + \dots + \int_{K_n} g(x)\cdot dx$

$\int_K (g_1 + h)(x)\cdot dx = \int_K g(x)\cdot dx + \int_K h(x)\cdot dx$

$\int_K \varepsilon g(x)\cdot dx = \varepsilon \int_K g(x)\cdot dx$

existiert Potential $\to \int_K g(x)\cdot dx = 0$ ($\forall \vartheta \to \vartheta$ Potential)

Funktion in $\mathbb{R}$

$\int_K f(s)\,ds = \int_a^b f(c(t))\,\|c'(t)\|\,dt$

Länge $L: L(k) = \int_K 1\,ds = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt$

Zylinderkoordinaten: $\int_K g(x) = \int_K \pi(s)\,ds = \int_a^b \pi(c(t))\,\|c'(t)\|\,dt$

$= \int_a^b g(c(t))\cdot c'(t)\,dt$

Masse:

$M_g(k) = \int_K N(s)\,ds = \int_a^b N(c(t))\,\|c'(t)\|\,dt = \int_a^b g(c(t))\cdot \begin{pmatrix} c_2'(t) \\ -c_1'(t) \end{pmatrix} dt$

Parametrisierung

$C: [a,b] \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^3 : t \mapsto c(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$

Strecke: $\vec{u}(t) = \vec{p}_1 + t(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ $t \in [0,1]$

Funktion: $\vec{u}(t) = \binom{t}{f(t)}$ $t \in [a,b]$

Kreis: $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 1.5\pi]$ oder π

Ellipse: $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} a\cdot r\cos t \\ b\cdot r\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $t \in [0, \pi]$

Stetig Differenzierbar

f im $\mathbb{R}^n$ muss auch in $f^{(n)}(x_0)$ gleich sein

$x \to x_0 \to 0$

sonst nicht stetig differ.

Da Polynom endlich oft stetig differ

nur bei Ecke prüfen

Indexshift

$\sum_{n=0}^{\infty} (k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} k$

Spezial Read

$|\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (z_n)^k| \le \varepsilon \|z_n\|^k$

$= \varepsilon \cdot \frac{1}{1-z} \cdot \dots$

