

Modellierung und Simulation in der Biomechanik – SoSe 2023

Dauer:

120 Minuten (war eher knapp, um mit allem fertig zu werden)

Hilfsmittel:

nicht programmierfähiger Taschenrechner

Bei uns wurde das letzte Kapitel (Numerische Integration) in der Vorlesung aus Zeitgründen nicht mehr behandelt und war dementsprechend auch nicht klausurrelevant.

Es gab ca. 10 Tage vor der Klausur eine Prüfungssprechstunde, die Herr Bleiler durchgeführt hat. Er hat nicht wirklich rausgelassen, was drankommt, aber man hat gemerkt, dass er bestimmte Dinge oft erwähnt hat, die dann auch drankamen (bei uns z. B. Newton-Verfahren).

Ansonsten war es vom Aufbau/Umfang her wie in den letzten Jahren. Die Altklausuren durchzugehen, hilft für die Vorbereitung auf jeden Fall. Die Aufgabentypen sind wohl immer recht ähnlich.

Es mussten für den Rechenteil eigene Blätter zur Klausur mitgebracht werden, zur Beantwortung der Kurzfragen war Platz auf der Klausur selbst.

Teil I – Kurzfragen-/Verständnisteil

Frage 1:

Was ist der Grundsatz für die Polynomapproximation?

Frage 2:

Welchen Vorteil hat die Newton-Interpolation gegenüber der Lagrange-Interpolation?

Frage 3:

Erklären Sie das Hodgkin-Huxley-Modell anhand einer Skizze.

Frage 4:

- a) Leiten Sie den zentralen Differenzenquotienten für die 1. Ableitung aus der Taylorreihenentwicklung (nicht gegeben) her. Welche Fehlerordnung besitzt er?
- b) Gegeben: $y'(t) = -a * y(t)$
Bestimmen Sie das Stabilitätskriterium für h in Abhängigkeit von a mit dem expliziten Euler-Verfahren.
- c) Warum darf h auch bei absolut stabilen Systemen nicht beliebig groß gewählt werden?

Frage 5:

- a) Welche räumlichen Annahmen gelten für die Bidomain-Gleichung?
- b) Welche Annahmen gelten für den Ionenfluss?

Frage 6:

Leiten Sie die Monodomain-Gleichung aus den Bidomain-Gleichungen her (Bidomain-Gleichungen waren gegeben). Welche Annahme muss gelten?

Frage 7:

- a) Erklären Sie das Einschachtelungsverfahren mit Intervallhalbierung anhand einer Skizze.
- b) Welche Voraussetzungen muss die Funktion für dieses Verfahren erfüllen?

Frage 8:

- a) Leiten Sie die Fixpunktgleichung für die Lösung eines LGS aus der Form $Ax = b$ her.
- b) Schreiben Sie die Iterationsmatrix und die Iterationsvorschrift für das Jacobi-Verfahren oder das Gauss-Seidel-Verfahren auf.

Frage 9:

Newton-Verfahren, gegeben: $f(x) = x^3 - x$

- a) Schreiben Sie die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren auf.
- b) Ermitteln Sie die Nullstellen von $f(x)$.
(Gemeint war analytisch ermitteln. Stand nicht in der Aufgabe, wurde aber nach Nachfragen gesagt).
- c) Es wird der Startwert $x^{(0)} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ gewählt. Was passiert dann? Welche Abfrage sollte man daher immer vor Anwendung des Newton-Verfahrens machen?
- d) Es wird der Startwert $x^{(0)} = \frac{1}{2}$ gewählt. Berechnen Sie zwei Iterationsschritte. Gegen welche Nullstelle konvergiert es hier?
- e) Es wird der Startwert $x^{(0)} = \sqrt{\frac{1}{5}}$ gewählt. Berechnen Sie zwei Iterationsschritte. Was passiert hier?

Teil II – Rechenteil

Aufgabe 1: Örtliche und zeitliche Diskretisierung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c * \frac{\partial u}{\partial x} + g(x, t)$$

Randbedingungen: $[0, L]$, $u(x = 0) = a$, $u(x = L) = 0$

Mit beliebigen Koeffizienten a , c und beliebiger Funktion g .

- a) Führen Sie die örtliche zentrale Diskretisierung mit der expliziten Methode durch für die Punkte $i = 1$, $1 < i < N$, $i = N$.
- b) Führen Sie die zeitliche Diskretisierung mit der impliziten Methode der Differenzialgleichungen aus (a) durch für die Punkte $i = 0$, $i = 1$, $1 < i < N - 1$, $i = N - 1$, $i = N$.
- c) Schreiben Sie die Diskretisierung aus (b) in Matrixform $A * u^{k+1} = u^k + g^{k+1}$ für $N = 6$.

Aufgabe 2: DGL-System

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{1}{3} * V(t)^3 + V(t) + r(t) + 10 * \exp(-t)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = V(t) + \frac{1}{2} * r(t) + 1$$

Mit $V(0) = 0$, $r(0) = 0$, $\Delta t = t_{k+1} - t_k = 0,1$

- Lösen Sie das DGL-System für zwei Zeitschritte mit $k = 1$, $k = 2$ mit dem expliziten Euler-Verfahren.
- Stellen Sie das nichtlineare LGS in zwei Unbekannten mit dem impliziten Euler-Verfahren auf.
- Schreiben Sie die Rechenvorschrift auf für das Newton-Verfahren für die Lösung von nichtlinearen Gleichungen in mehreren Unbekannten der Form $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$.
- Bringen Sie das nichtlineare LGS aus (b) auf die Form $\begin{pmatrix} F_1(V,r) \\ F_2(V,r) \end{pmatrix} = 0$.
- Berechnen Sie einen Zeitschritt mit den Startannahmen V_0 , r_0 .

Aufgabe 3: L2-Approximation

Minimierungsproblem: $\|f(t) - Q_n(t)\|_2^2 \rightarrow \min_{Q_n(t)}$

- Erklären Sie, wie man von oben gegebenem Minimierungsproblem auf die Form $Ax = b$ kommt.
- Legendre-Polynome: $[a, b] = [-1, 1]$, $\omega(x) = 1$, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,
$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} * x * P_n(x) - \frac{n}{n+1} * P_{n-1}(x)$$

Zeigen Sie anhand der Polynome P_2 und P_3 , dass die Legendre-Polynome Orthogonalpolynome sind.
- Warum sind Orthogonalpolynome besonders geeignet für die L2-Approximation?

Aufgabe 4: Newton-Interpolation

$$t = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 1,1 \\ 1,3 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,8 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

- Stellen Sie das Newton-Polynom für die gegebenen Werte auf.
- Skizzieren Sie die Stützstellen, Stützwerte und das Newton-Polynom in einem Koordinatensystem.