

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Die Aufgabenteile 1 - 2 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1:

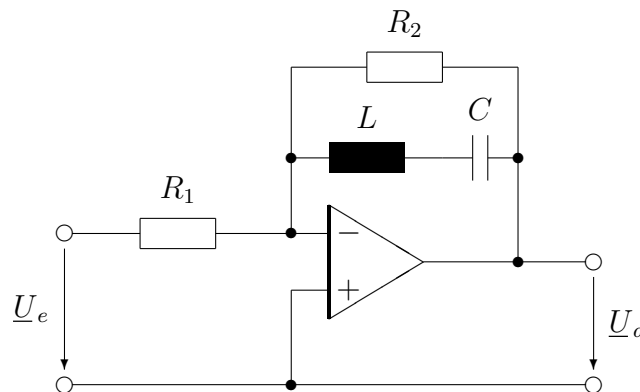


Abbildung 1: Aktives Filter

Die Schaltung in Abbildung 1 stellt ein aktives Filter dar. Es soll dazu genutzt werden die störende Netzfrequenz aus einer Signalübertragung herauszufiltern. Es stellt also eine Bandsperrfilter mit einer Tilgungsfrequenz von 50Hz dar.

Tilgungsfrequenz	$f_m = 50 \text{ Hz}$
Güte	$Q = 1$
stationäre Verstärkung	$A_{BS} = 0 \text{ dB}$

Die Kapazität des Kondensators ist fest gegeben mit $C = 100\mu F$.

- Berechnen Sie den Frequenzgang $\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}(j\omega)$ dieser Schaltung. Der Operationsverstärker kann dabei als ideal betrachtet werden. Welche Ordnung hat das Filter?
- Berechnen Sie den Amplitudengang und den Phasengang und skizzieren Sie diese.

- c) Für den Filterentwurf wird zunächst von dem normierten Frequenzgang eines Tiefpassfilters ausgegangen. Dieser Mustertiefpass ist wie folgt gegeben:

$$G_{TP}(P) = \frac{A_0}{1 + P} \quad P = \frac{p}{\omega_g} \quad p = j\omega$$

Dabei ist $P = j\frac{\omega}{\omega_g}$ die auf die Eckfrequenz bezogene normierte Frequenz. Transformieren Sie das Beispielfilter mit der Frequenztransformation ($P \rightarrow \frac{\Delta\Omega}{P+1/P}$) in eine äquivalente Bandsperre $G_{BS}(P)$. Dabei gilt: $\Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_g}$. Welche Bedeutung kommt der Eckfrequenz ω_g nach der Transformation des Mustertiefpasses in eine Bandsperre zu?

- d) Formen Sie das Ergebnis um, so dass im Frequenzgang die statische Verstärkung A_{BS} und die Güte $Q = \frac{1}{\Delta\Omega}$ auftreten.
- e) Entnormieren Sie nun den Frequenzgang. Ersetzen Sie hierfür P und bestimmen Sie den Zusammenhang der Güte Q , der statischen Verstärkung A_{BS} und der Eckfrequenz ω_g mit den Bauteilen R_1 , R_2 und L . Geben Sie schließlich eine Dimensionierung für die Bauteile R_1 , R_2 und L an.

Teil 2: Neben analogen, aktiven Filtern wie in Abbildung 1 gezeigt gibt es auch analoge, passive Filter und diskrete Filter.

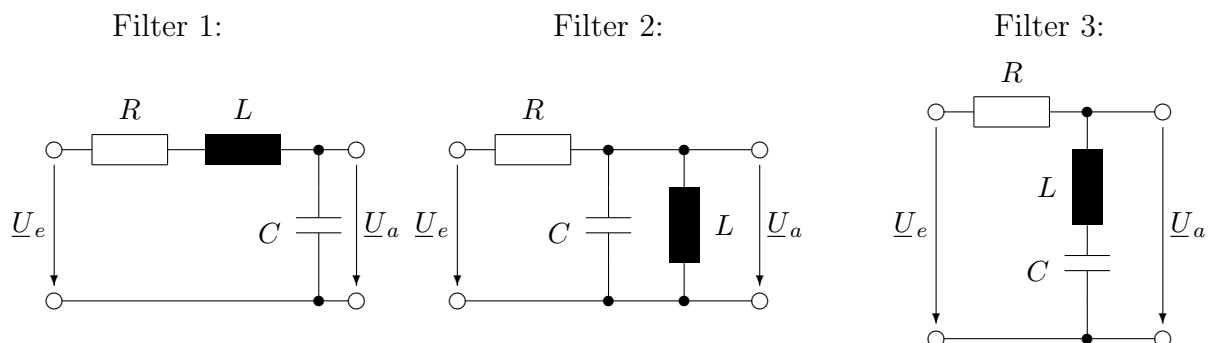


Abbildung 2: Passive Filter

- f) Welches der in Abbildung 2 gezeigten passiven Filter entspricht dem aus Abbildung 1 gezeigten aktiven Filter? Wie lautet dessen Frequenzgang?
- g) Welchen Vorteil bietet das aktive Filter aus Abbildung 1 gegenüber dem passiven Filter aus Abbildung 2?

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Ein Nachrichtensignal sei gegeben durch:

$$x(t) = 10 + 4 \cos(2\pi t) + 8 \cos(4\pi t) + 10 \cos(20\pi t).$$

- Bestimmen und skizzieren Sie die kontinuierliche Fourier-Transformierte $X(f)$ des Nachrichtensignals.
- Die Abbildung 3 zeigt eine Methode zur Erzeugung einer Restseitenbandmodulation, bei der das Oberseitenband und die ersten beiden Frequenzkomponenten des Unterseitenbands durchgelassen werden.
 Bestimmen und skizzieren Sie die Fourier-Transformierte des modulierten Signals $s(t)$.

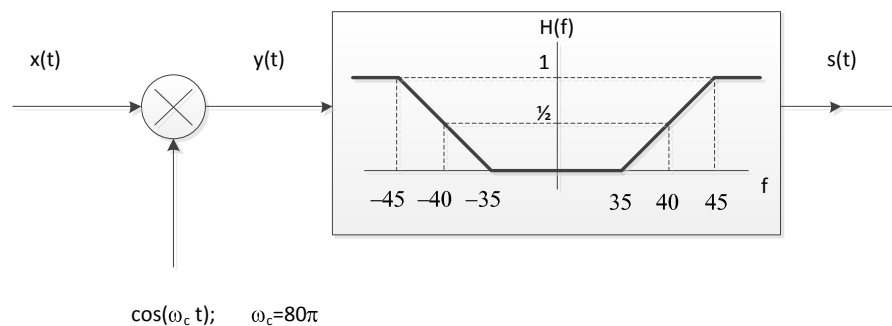


Abbildung 3: Methode zur Erzeugung einer Restseitenbandmodulation

- Die Restseitenbandsignale lassen sich durch das in der Abbildung ?? dargestellte System demodulieren.
 Bestimmen und skizzieren Sie $W(f)$.

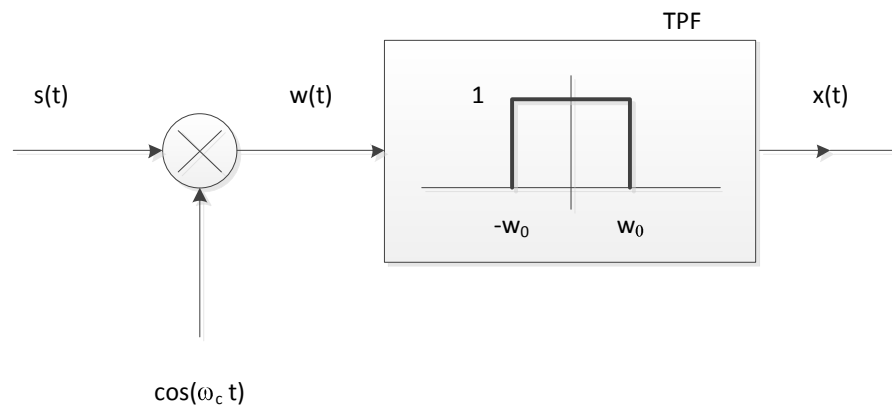


Abbildung 4: System zur Demodulation

- d) Welche ist die minimale und maximale Grenzfrequenz des idealen Tiefpassfilters?

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Die Aufgabenteile 1 - 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1:

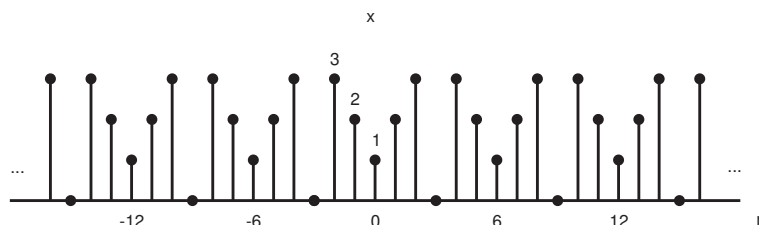


Abbildung 5: periodisches Signal $x_1[n]$

- Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten für das periodische zeitdiskrete Signal aus Abbildung 4.
- Skizzieren Sie die Koeffizientenmenge a_k .

Teil 2:

Es sei das folgende LTI-System gegeben:

$$y_2[n] - \frac{3}{10}y_2[n-1] - \frac{1}{10}y_2[n-2] = 2x_2[n] + 3x_2[n-1].$$

- Bestimmen Sie die zugehörige Frequenzantwort $H_2(\Omega)$.
- Bestimmen Sie die zugehörige Impulsantwort $h_2[n]$.

Teil 3:

Der Frequenzgang eines Hochpassfilters lautet:

$$H_3(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\Omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ e^{-3j\Omega} & \text{für } \frac{\pi}{2} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

- Berechnen Sie die Impulsantwort $h_3[n]$.
- Das Eingangssignal für den Filter lautet im Zeitbereich:

$$x_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{2}\right) + 3\delta(n-5) + 2.$$

Bestimmen Sie das zugehörige Ausgangssignal $y_3[n]$ für alle n .

Aufgabe 4: (20 Punkte)

In Abbildung 5 ist das Gesamtsystem zur Filterung eines zeitkontinuierlichen Signals mit einem zeitdiskreten Filter dargestellt. Für $H_1(\Omega)$ und $H_2(\omega)$ gemäß Abbildung 5 und für $1/T = 20\text{kHz}$ berechnen und skizzieren Sie

$X_p(\omega)$, $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, $Y_p(\omega)$ und $Y_c(\omega)$.

Die Skizzen enthalten: Achsenbeschriftung und Angabe der Schnittpunkte mit den jeweiligen Achsen.

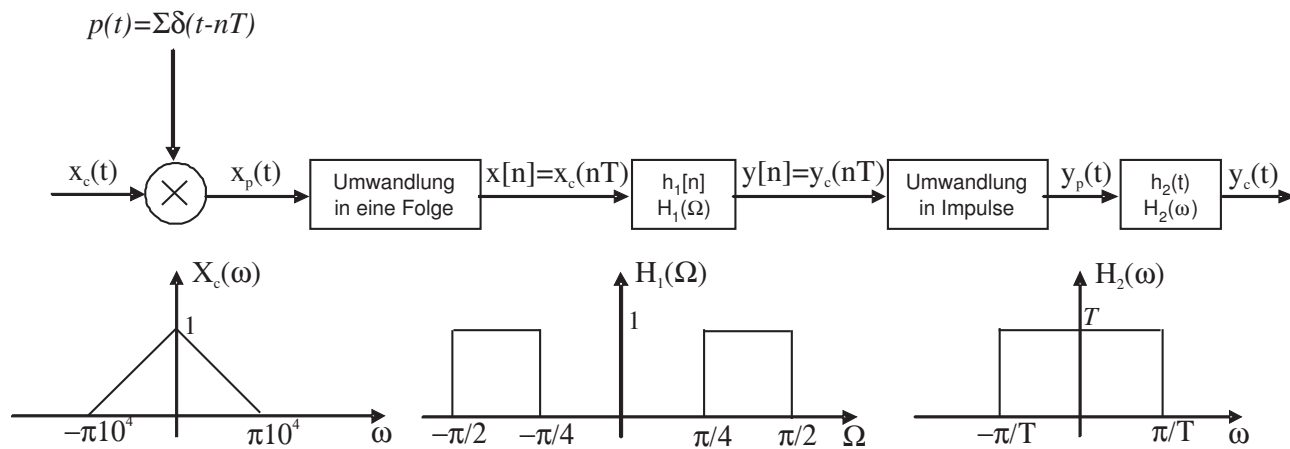


Abbildung 6: Gesamtsystem zur Filterung

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Markieren Sie die zutreffenden Aussagen in den jeweiligen Teilaufgaben. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Bestimmen Sie die Eigenschaften folgender Signale.

I:

$$x(t) = 2 \cos(3t + \frac{\pi}{4})$$

Eigenschaft	Ja	Nein
Das Signal ist aperiodisch?		
Das Signal ist periodisch mit Periode = $2\pi/3$?		
Das Signal ist periodisch mit Periode = $3\pi/2$?		

II:

$$x[n] = 2 \cos(n/4) \cos(\pi n/4)$$

Eigenschaft	Ja	Nein
Das Signal ist aperiodisch?		
Das Signal ist periodisch mit Periode = 4?		
Das Signal ist periodisch mit Periode = $4/\pi$?		

b) Bestimmen Sie die Eigenschaften folgender Systeme.

I:

$$y(t) = e^{x(t)}; \quad t \in \mathbb{R}$$

II:

$$y[n] = x[-n]; \quad n \in \mathbb{Z}$$

System	I		II	
Eigenschaft	Ja	Nein	Ja	Nein
Das System ist speicherfrei?				
Das System ist zeitinvariant?				
Das System ist linear?				
Das System ist kausal?				
Das System ist stabil?				

- c) Abbildung 6 zeigt Pol-Nullstellen-Diagramme von drei unterschiedlichen LTI-Systemen. Pole sind dabei mit "x" und Nullstellen mit "o" gekennzeichnet. Bei mehrfachen Pol-, bzw. Nullstellen bezeichnet "(n)" die Quantität. Der zugehörigen Konvergenzbereich (ROC) jedes Systems ist unter dem Pol-Nullstellen-Diagramm angegeben. Markieren Sie die zutreffenden Aussagen.

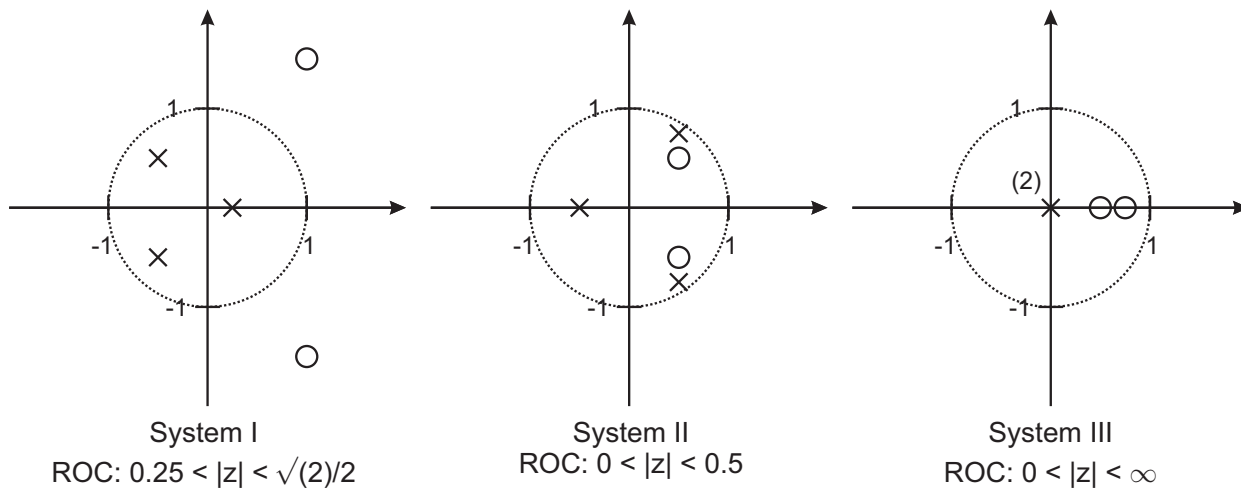


Abbildung 7: Pol-Nullstellen-Diagramme

System	I		II		III	
Eigenschaft	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
Das System ist stabil?						
Das System ist kausal?						
Das System ist minimalphasig?						
Das System ist rekursiv?						