Musterlösung und Punkteverteilung

Probeklausur

Bitte beachten Sie: Falls nicht ausdrücklich anders angegeben, ist der Lösungsweg Teil der geforderten Prüfungsleistung. *Die Angabe des korrekten Ergebnisses ohne Lösungsweg kann daher zum Punktabzug führen.*

Hinweis zu den Multiple-Choice Aufgaben: Bitte bearbeiten Sie die Multiple-Choice Aufgaben *eindeutig* und *nur auf dem Aufgabenblatt*. Markieren Sie dazu die von Ihnen gewählte(n) Antwort(en jeweils) mit einem Kreuz. Vollständig ausgefüllte Kästchen dienen zur Korrektur und werden wie nicht angekreuzt gewertet.

Aufgabe 1 *Abtastung* *(12 Punkte)*

Die Aufgabenteile 1, 2 und 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1:

Das kontinuierliche Signal $x(t) = \cos(5000\pi t)$ wird mit der Abtastperiode T abgetastet. Das Ergebnis der Abtastung ist das zeitdiskrete Signal $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$.

a) Ein möglicher Wert für die Abtastperiode T ist: **(1 P)**

- ● $T = \frac{13}{15000}$
- ○ $T = \frac{2}{15000}$
- ○ $T = \frac{8}{15000}$
- ● $T = \frac{1}{3000}$

Teil 2:

Betrachten Sie das System aus Abbildung 1. Folgende Zusammenhänge gelten:

$$\begin{aligned} X_c(j\Omega) &= 0 \qquad \text{für} \quad |\Omega| \geq 2 \cdot \pi 10^4 \\ x[n] &= x_c(nT) \\ y[n] &= T \cdot \textstyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \end{aligned} \tag{1}$$

b) Der maximale Wert für T um Aliasing zu vermeiden und damit $x_c(t)$ aus $x[n]$ zurückgewonnen werden kann ist: **(1 P)**

- ○ $T < \frac{1}{4 \cdot 10^4}$
- ● $T < \frac{1}{2 \cdot 10^4}$
- ○ $T < \frac{4}{10^4}$
- ○ $T < 2 \cdot 10^{-4}$

c) Die Impulsantwort $h[n]$ ist: **(1 P)**

- ○ $h[n] = T \cdot \delta[n]$
- ○ $h[n] = \frac{1}{T} \cdot u[n]$
- ● $h[n] = T \cdot u[n]$
- ○ $h[n] = T \cdot u[n - T]$

d) Der Wert von $y[n]$ für $n \to \infty$ ist: **(1 P)**

- ○ $\lim_{n\to\infty} y[n] = \frac{1}{T} \cdot X\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=0}$
- ○ $\lim_{n\to\infty} y[n] = T \cdot X\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=nT}$
- ● $\lim_{n\to\infty} y[n] = T \cdot X\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=0}$
- ○ $\lim_{n\to\infty} y[n] = T \cdot X\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=1/2\pi T}$

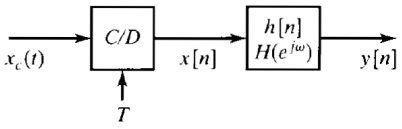


Abbildung 1: Darstellung eines zeitdiskreten Systems zur Verarbeitung zeitkontinuierlicher Signale.

Teil 3:

Betrachten Sie ein zeitkontinuierliches reelles Tiefpass-Signal $x_c(t)$ dessen höchste Frequenz kleiner als $2\pi 200$ rad/s ist. Der Ausgang eines Filterungssystems sei beschrieben durch $y_c(t) = x_c(t - \frac{1}{1000})$.

e) Skizzieren Sie einen möglichen Betrag der zeitkontinuierlichen Fouriertransformierte von $x_c(t)$, also $|X_c(\omega)|$. **(1 P)**

f) Falls $x[n] = x_c[\frac{n}{500}]$, kann man theoretisch $x_c(t)$ aus $x[n]$ zurückgewinnen? Warum? **(1 P)**

g) Falls $y[n] = y_c[\frac{n}{500}]$, kann man theoretisch $y_c(t)$ aus $y[n]$ zurückgewinnen? Warum? **(1 P)**

h) Skizzieren Sie einen möglichen Betrag der zeitkontinuierlichen Fouriertransformierte von $y_c(t)$, also $|Y_c(\omega)|$. **(1 P)**

i) Wie kann man $y[n]$ aus $x[n]$ nach dem Schaltbild in Abb. 2 berechnen? Geben Sie dafür $H(e^{j\omega})$ an. **(2 P)**

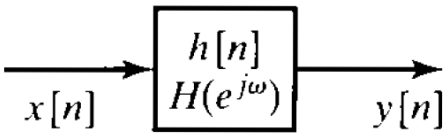


Abbildung 2: Darstellung eines zeitdiskreten Filterungssystems.

j) Wie kann man $y[n]$ aus $x[n]$ nach dem Schaltbild in Abb. 3 berechnen? Geben Sie dafür $H_1(e^{j\omega})$ an. **(2 P)**

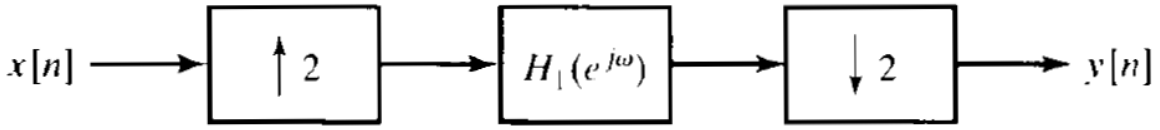


Abbildung 3: Darstellung eines zeitdiskreten Filterungssystems mit Dezimierungs- und Interpolationsstufe.

Aufgabe 2 *Modulation* *(10 Punkte)*

Betrachten Sie folgende Amplitudenmodulation: Das Nutzsignal ist ein Ton $x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ mit $A_m = 4$ V und $f_m = 0.5$ Hz. Das Trägersignal hat eine Trägerfrequenz von $f_c = 10$ Hz und eine Amplitude von $A_c = 10$ V. Das modulierte Signal wird als $y(t) = A_c\,(1 + mx(t))\cos(2\pi f_c t)$ bezeichnet. Geben Sie für diese Modulation an:

a) Welcher Bedingung muss der Modulationsindex m erfüllen, damit das modulierte Signal $y(t)$ keine Übermodulation aufweist? **(1 P)**

b) Nehmen Sie für alle folgende Teilaufgaben an, dass für den Modulationsindex $m = 1/8$ gilt. Geben Sie den numerischen Ausdruck des modulierten Signals $y(t)$ an. **(1 P)**

c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des modulierenden Signals $X(\omega)$ explizit (numerisch). Skizzieren Sie die Fourier-Transformierte dieses Signals $X(\omega)$. Beschriften Sie die Achsen und geben Sie die Schnittpunkte mit den Achsen an. **(2 P)**

d) Berechenen Sie die Fourier-Transformierte des modulierten Signals $Y(\omega)$ explizit (numerisch). Skizzieren Sie die Fourier-Transformierte dieses Signals $Y(\omega)$. Beschriften Sie die Achsen und geben Sie die Schnittpunkte mit den Achsen an. **(2 P)**

e) Berechnen Sie die maximale Leistung des modulierten Signals $y(t)$ über einem Widerstand von 50Ω. **(1 P)**

f) Berechnen Sie die Bandbreite des modulierten Signals $y(t)$. **(1 P)**

g) Geben Sie ein Schaltbild zur Modulation des Signals an (Eingang ist das Nutzsignal $x(t)$, Ausgang ist das modulierte Signal $y(t)$). Alle Filter, die Sie dafür benötigen, sollen symmetrisch im Frequenzbereich sein. **(1 P)**

h) Geben Sie ein Schaltbild zur Demodulation des Signals an (Eingang ist das modulierte Signal $y(t)$, Ausgang das Nutzsignal $x(t)$). Alle Filter, die Sie dafür benötigen, sollen symmetrisch im Frequenzbereich sein. **(1 P)**

Aufgabe 3 *Fourier* *(30 Punkte)*

Die Aufgabenteile 1,2 und 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1:

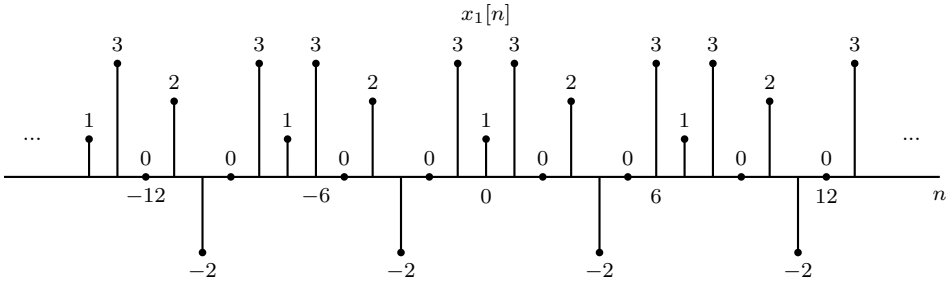


Abbildung 4: periodisches Signal $x_1[n]$

a) Bestimmen Sie die Spektralkoeffizienten $a_{1,k}$ der zeitdiskreten Fourier-Reihe für das periodische, zeitdiskrete Signal aus Abbildung 4. Fassen Sie diese unter Ausnutzung der Symmetrien vollständig zu trigonometrischen Funktionen zusammen.

Lösung (6 Punkte):
Differenzengleichung mit $N = 7$:

$$x_1[n] = -2\delta[n+3] + 3\delta[n+1] + 1\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-3]$$

Spektralkoeffizienten:

$$\begin{aligned} a_{1,k} &= \frac{1}{7}\left(-2e^{-jk\frac{2\pi}{7}(-3)} + 3e^{-jk\frac{2\pi}{7}(-1)} + 1 + 3e^{-jk\frac{2\pi}{7}(1)} + 2e^{-jk\frac{2\pi}{7}(3)}\right) \\ &= \frac{1}{7} - \frac{3}{7}\left(e^{\frac{2}{7}\pi jk} + e^{-\frac{2}{7}\pi jk}\right) - \frac{2}{7}\left(e^{\frac{6}{7}\pi jk} - e^{-\frac{6}{7}\pi jk}\right) \\ &= \frac{1}{7} - \frac{6}{7}\cos\left(\frac{2}{7}k\pi\right) - \frac{4i}{7}\sin\left(\frac{6}{7}k\pi\right) \end{aligned}$$

Teil 2:

b) Bestimmen Sie die Spektralkoeffizienten $a_{2,k}$ der Fourier-Reihe für das folgende periodische, zeitdiskrete Signal und skizzieren Sie Betrag und Phase von $a_{2,k}$:

$$x_2[n] = \sqrt{2}\sin\left(\frac{12\pi}{7}n - \frac{6\pi}{5}\right).$$

Lösung (7 Punkte):
Berechnung der Periode N:

$$\frac{12}{7}\pi N = 2\pi m \qquad \Rightarrow N = 7, m = 6$$

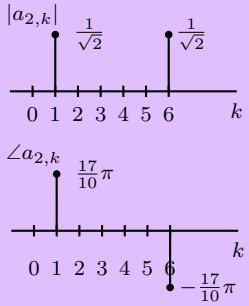
$$\begin{aligned} x_2[n] &= \frac{\sqrt{2}}{2i}\left[e^{i\left(\frac{2\pi}{N}6n-\frac{6}{5}\pi\right)} - e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}6n-\frac{6}{5}\pi\right)}\right] \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{6}{5}\pi}e^{6\frac{2\pi}{N}in} + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{6}{5}\pi}e^{-6\frac{2\pi}{N}in} \end{aligned}$$

Vergleich mit

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{ik\frac{2\pi}{N}n}$$

liefert

$$\begin{aligned} a_{2,6} &= -\frac{j}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{6}{5}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{1}{2}\pi}e^{-i\frac{6}{5}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{17}{10}\pi} \\ a_{2,-6} &= a_{2,-6+N} = a_{2,1} = \frac{j}{\sqrt{2}}e^{i\frac{6}{5}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{1}{2}\pi}e^{i\frac{6}{5}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{17}{10}\pi} \end{aligned}$$



Teil 3:

Es sei das kausale, zeitdiskrete LTI-System aus Abbildung 5 gegeben.

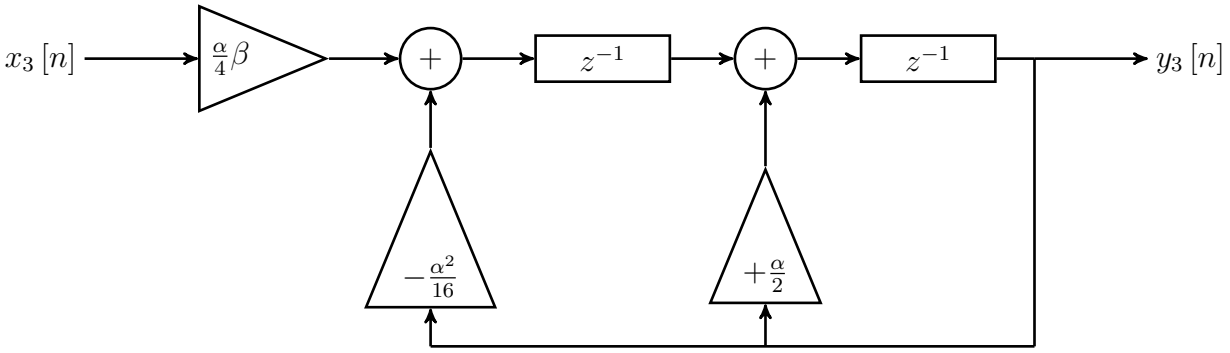


Abbildung 5: LTI-System.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Differenzengleichung.

Lösung (2 Punkte):

$$y_3[n] = \frac{\alpha}{2} y[n-1] - \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 y[n-2] + \frac{\alpha}{4}\beta x[n-2]$$

d) Geben Sie die Gleichung der Übertragungsfunktion $H_3(z)$ des Systems an.

Lösung (2 Punkte):

$$H_3[z] = \frac{Y_3[z]}{X_3[z]} = \frac{\frac{\alpha}{4}\beta z^{-2}}{1 - 2\frac{\alpha}{4}z^{-1} + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 z^{-2}} = \frac{\frac{\alpha}{4}\beta}{z^2 - 2\frac{\alpha}{4}z + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2}$$
$$= \beta \frac{\frac{\alpha}{4}}{\left(z - \frac{\alpha}{4}\right)^2} = \beta z^{-1} \frac{\frac{\alpha}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{\alpha}{4}z^{-1}\right)^2}$$

e) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_3[n]$.

Lösung (3 Punkte):
Kausales System + Zeitverschiebung:

$$h_3[n] = \beta(n-1)\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{n-1} x[n-1]$$

f) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $H_3[z]$ Für welche α ist das System stabil? Wie

beeinflusst β die Stabilität des Systems?

Lösung (3 Punkte):
ROC: kausales System, daher $|z| > \frac{\alpha}{4}$.
Einheitskreis liegt für $|\alpha| < 4$ im ROC.
β beeinflusst die Stabilität des Systems nicht.

g) Im Folgenden sei das Eingangssignal durch

$$x_3[n] = \begin{cases} \frac{n}{3}\left(\frac{3}{7}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie die z-Transformation des zugehörigen Ausgangssignals $Y_3(z)$.

Lösung (3 Punkte):

$$\begin{aligned} x_3[n] &= \frac{n}{3}\left(\frac{3}{7}\right)^n u[n] \\ X_3[z] &= \frac{1}{7}\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{3}{7}z^{-1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{7}\frac{z}{\left(z-\frac{3}{7}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3[z] &= H_3[z]\cdot X_3[z] \\ &= \frac{1}{28}\frac{\alpha\beta z^{-3}}{\left(1-\frac{\alpha}{4}z^{-1}\right)^2\left(1-\frac{3}{7}z^{-1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{28}\frac{\alpha\beta z}{\left(z-\frac{\alpha}{4}\right)^2\left(z-\frac{3}{7}\right)^2} \end{aligned}$$

h) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen Diagramm von $Y_3(z)$ mit $\alpha = \frac{4}{7}$ und $\beta = 28$ und geben Sie den zugehörigen Konvergenzbereich für $Y_3(z)$ an.

Lösung (4 Punkte):
Pole: $z_{1,2} = \frac{3}{7}, z_{3,4} = \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{7}$
Nullstellen: $z_1 = 0$
ROC: $|z| > \frac{3}{7}$

i) Handelt es sich bei $y_3[n]$ um eine stabile Folge? Kurze Begründung!

Lösung (1 Punkte):
Ja, da der Einheitskreis im Konvergenzsbereich liegt.

Aufgabe 4 *Filterentwurf* *(18 Punkte)*

Der Frequenzgang eines frequenzselektiven Filters lautet:

$$H_1(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\Omega| \leq \frac{2\pi}{7} \\ 5e^{-7j\Omega} & \text{für } \frac{2\pi}{7} < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Amplituden-Frequenzgang $|H_1(\Omega)|$ für $|\Omega| < \pi$. Um welche Art von Filter handelt es sich?

Lösung (2 Punkte): Skizze idealer HP. Es handelt sich um einen Hochpassfilter.

b) Welcher Kompromiss muss in der Praxis eingegangen werden, wenn ein passives RLC-Filter mit einem Amplituden-Frequenzgang entsprechend $H_1(\Omega)$ entworfen werden soll? Welche Eigenschaft von $H_1(\Omega)$ kann ein solches passives Filter prinzipiell nicht erfüllen?

Lösung (2 Punkte):
Ein realer Filter hat immer eine begrenzte Steilheit im Übergangsbereich abhängig von der Filterordnung. Der Kompromiss ist daher eine praktisch realisierbare Filterordnung gegen die maximal benötigte Steilheit und andere Eigenschaften wie Restwelligkeit und Phasenverzerrung abzuwägen.
Ein passives Filter kann ein Signal nicht verstärken. Daher kann die Verstärkung um den Faktor 3 im Durchlassbereich nicht realisiert werden.

c) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_1[n]$.

Lösung (3 Punkte):

$$H_1'[\Omega] = H_1[\Omega + \pi] = \begin{cases} \left[5e^{-7j(\Omega+\pi)} = 5e^{-7j\pi}e^{-7j\Omega} = -5e^{-7j\Omega}\right] & \text{für } |\Omega| \leq \frac{5\pi}{7} \\ 0 & \text{für } \frac{5\pi}{7} < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

$$= -5e^{-7j\Omega} \begin{cases} 1 & \text{für } |\Omega| \leq \frac{5\pi}{7} \\ 0 & \text{für } \frac{5\pi}{7} < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

$$\frac{\sin Wn}{\pi n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \begin{cases} 1 & \text{für } |\Omega| \leq W \\ 0 & \text{für } W < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\Omega - \Omega_0)$$

$$h_1'[n] = -5\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{7}(n-7)\right)}{\pi(n-7)}$$

Frequenzrückverschiebung:

$$H_1(\Omega) = H_1'(\Omega - \pi) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h_1[n] = e^{j\pi n}h_1'[n]$$

$$h_1[n] = -5e^{j\pi n}\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{7}(n-7)\right)}{\pi(n-7)}$$

$$= -5e^{j\pi n}\frac{5}{7}\mathrm{sinc}\left(\frac{5}{7}(n-7)\right)$$

d) Das Eingangssignal des Filters lautet im Zeitbereich:

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{7}n + \frac{\pi}{7}\right) + e^{j\pi n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}.$$

Bestimmen Sie das zugehörige Ausgangssignal $y_1[n]$ für alle n.

Lösung (5 Punkte):

$$y[n] = h_1[n] * x_1[n]$$

Nur eine Frequenz bei $\frac{3\pi}{7}$:

$$\begin{aligned} y_{1,1}[n] &= h_1[n] * \cos\left(\frac{3\pi}{7}n + \frac{\pi}{7}\right) \\ &= \left|H_1\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right| \cos\left(\frac{3\pi}{7}n + \frac{\pi}{7} - \angle\left(H_1(\frac{3\pi}{7})\right)\right) \\ &= 5\cos\left(\frac{3\pi}{7}n + \frac{\pi}{7} - 3\pi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{1,2}(\Omega) &= \begin{cases} 0 & \text{für } |\Omega| \leq \frac{5\pi}{6} \\ 1 & \text{für } \frac{5\pi}{6} < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \\ Y_{1,2}(\Omega) &= H_1(\Omega)X_{1,2}(\Omega) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } |\Omega| \leq \frac{5\pi}{6} \\ 5e^{-7j\Omega} & \text{für } \frac{5\pi}{6} < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \\ y_{1,2}[n] &= -5e^{j\pi n}\frac{\sin\left(\frac{1\pi}{6}(n-7)\right)}{\pi(n-7)} \end{aligned}$$

$$y_1[n] = 5\cos\left(\frac{3\pi}{7}n + \frac{\pi}{7} - 3\pi\right) - 5e^{j\pi n}\frac{\sin\left(\frac{1\pi}{6}(n-7)\right)}{\pi(n-7)}$$

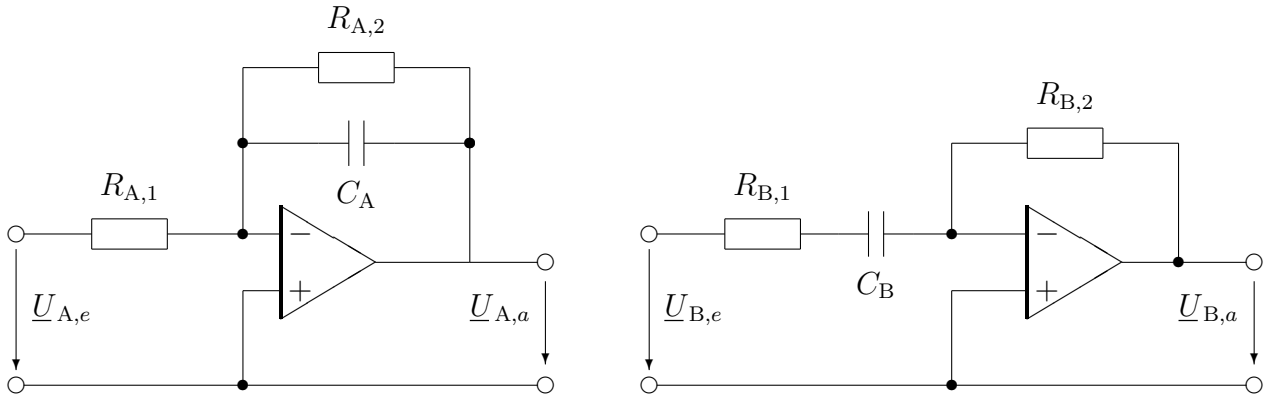
e) Für den Entwurf eines digitalen Tiefpassfilters soll eine der beiden gängigsten zeitdiskreten Filterimplementierungen gewählt werden. Nennen Sie beide Implementierungsarten und leiten Sie aus deren Eigenschaften einen Vor- und einen Nachteil des jeweiligen Verfahrens ab.

Lösung (2 Punkte):
FIR-Filter: Immer stabil, da keine Ausgangsrückführung. Hohe Filterordnung bei gleicher Flankensteilheit.
IIR-Filter: Nicht unbedingt stabil (auch numerisch), dafür geringere Filterordnung nötig.

Aufgabe 5 *Analogfilter* *(25 Punkte)*

Die Aufgabenteile 1, 2 und 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1:



(a) Filter A (b) Filter B

Abbildung 6: Aktive Filter

Die Schaltungen in Abbildung 6 zeigen Realisierungen zweier analoger aktiver Filter. Nehmen Sie im folgenden an, dass ideale Operationsverstärker verwendet werden.

a) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\underline{A}_{\mathrm{A}}(j\omega)$ von Filter A (Abbildung 6a) und bestimmen Sie Typ und Ordnung des Filters. Berechnen Sie die ungedämpfte Verstärkung K_{A} im Durchlassbereich und die Grenzfrequenz $\omega_{g,\mathrm{A}}$ von Filter A.

Lösung (- Punkte): Frequenzgang:

$$\underline{A}_{\mathrm{A}}(j\omega) = -\frac{\underline{Z}_{\mathrm{A}}}{R_{\mathrm{A},1}}$$

$$\underline{Z}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{j\omega C_{\mathrm{A}} + \frac{1}{R_{\mathrm{A},2}}} = \frac{R_{\mathrm{A},2}}{1 + j\omega R_{\mathrm{A},2} C_{\mathrm{A}}}$$

$$\underline{A}_{\mathrm{A}}(j\omega) = -\frac{R_{\mathrm{A},2}}{R_{\mathrm{A},1}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_{\mathrm{A},2} C_{\mathrm{A}}}$$

$\Rightarrow$ Tiefpass, 1. Ordnung

Verstärkung und Grenzfrequenz:

$$K_{\mathrm{A}} = \underline{A}_{\mathrm{A}}(0) = -\frac{R_{\mathrm{A},2}}{R_{\mathrm{A},1}}$$

$$\omega_{g,\mathrm{A}} = \frac{1}{R_{\mathrm{A},2} C_{\mathrm{A}}}$$

b) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\underline{A}_{\mathrm{B}}(j\omega)$ von Filter B (Abbildung 6b) und bestimmen Sie Typ und Ordnung des Filters.

Lösung (- Punkte): Frequenzgang:

$$\begin{aligned}\underline{A}_{\mathrm{B}}(j\omega) &= -\frac{R_{\mathrm{B},2}}{\underline{Z}_{\mathrm{B}}}\\ \underline{Z}_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{j\omega C_{\mathrm{B}}} + R_{\mathrm{B},1} = \frac{1+j\omega R_{\mathrm{B},1}C_{\mathrm{B}}}{j\omega C_{\mathrm{B}}}\\ \underline{A}_{\mathrm{B}}(j\omega) &= -\frac{j\omega R_{\mathrm{B},2}C_{\mathrm{B}}}{1+j\omega R_{\mathrm{B},1}C_{\mathrm{B}}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hochpass, 1. Ordnung

Nicht gefordert:
Verstärkung und Grenzfrequenz:

$$\begin{aligned}K_{\mathrm{B}} &= \lim_{\omega\to\infty}\underline{A}_{\mathrm{B}}(j\omega) = -\frac{R_{\mathrm{B},2}}{R_{\mathrm{B},1}}\\ \omega_{g,\mathrm{B}} &= \frac{1}{R_{\mathrm{B},1}C_{\mathrm{B}}}\end{aligned}$$

Filter A soll nun mit Filter B zusammen geschaltet werden. Die Filter A und B sollen so hintereinander geschaltet werden, dass $\underline{U}_{\mathrm{B},e} = \underline{U}_{\mathrm{A},a}$.

Es gelte im Folgenden $10R_{\mathrm{A},1} = R_{\mathrm{A},2} = R_{\mathrm{A}}$, $R_{\mathrm{B},1} = \sqrt{2}R_{\mathrm{B},2} = R_{\mathrm{B}}$, und $C_{\mathrm{A}} = C_{\mathrm{B}} = C$.

c) Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion

$$\underline{A}_{\mathrm{ges}}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{B},a}}{\underline{U}_{\mathrm{A},e}}$$

an. Bestimmen Sie Typ und Ordnung des Filters.

Lösung (- Punkte):

$$\begin{aligned}\underline{A}_{\mathrm{ges}}(j\omega) &= \underline{A}_{\mathrm{A}}(j\omega)\cdot\underline{A}_{\mathrm{B}}(j\omega)\\ &= \frac{R_{\mathrm{A},2}}{R_{\mathrm{A},1}}\cdot\frac{j\omega R_{\mathrm{B},2}C_{\mathrm{B}}}{(1+j\omega R_{\mathrm{A},2}C_{\mathrm{A}})(1+j\omega R_{\mathrm{B},1}C_{\mathrm{B}})}\\ &= \frac{10}{\sqrt{2}}\cdot\frac{j\omega R_{\mathrm{B}}C}{1+j\omega(R_{\mathrm{A}}+R_{\mathrm{B}})C-\omega^2R_{\mathrm{A}}R_{\mathrm{B}}C^2}\end{aligned}$$

Bandpass, 2. Ordnung

d) Geben Sie eine einfache Bedingung an, so dass die maximale Gesamtverstärkung K_{ges} mindestens 11 dB beträgt.

Lösung (- Punkte): Die Verstärkung des Tiefpasses im Durchlassbereich beträgt oberhalb der Grenzfrequenz $\omega_{g,\text{A}}$ mindestens 17 dB. Die Verstärkung des Hochpasses im Durchlassbereich unterhalb der Grenzfrequenz $\omega_{g,\text{B}}$ mindestens -6 dB. Daraus folgt, dass die Verstärkung im Durchlassbereich des Bandpasses genau dann mindestens 11 dB beträgt, wenn die Grenzfrequenz des Hochpasses unterhalb oder gleich der Grenzfrequenz des Tiefpasses liegt.

$$\begin{aligned} & \omega_{g,\text{B}} \leq \omega_{g,\text{A}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{R_\text{B} C} \leq \frac{1}{R_\text{A} C} \\ \Rightarrow \quad & R_\text{A} \leq R_\text{B} \end{aligned}$$

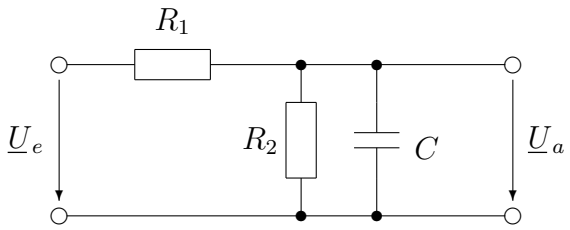


Abbildung 7: Passives Filter

Teil 2:

Betrachten Sie nun das passive Filter aus Abbildung 7.

e) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\underline{A}(j\omega)$ des passiven Filters und bestimmen Sie Typ und Ordnung des Filters.

Lösung (- Punkte): Spannungsteiler:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{R_2C}}{\underline{Z}_{R_2C} + R_1} \qquad \text{mit } \underline{Z}_{R_2C} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$
$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2 \; + \; j\omega R_1 R_2 C}$$

Tiefpass, 1. Ordnung.

f) Berechnen Sie den Amplitudengang $A(\omega)$ und Phasengang $B(\omega)$ des Filters.

Lösung (- Punkte): Amplitudengang:

$$A(\omega) = |\underline{A}(j\omega)| = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 \; + \; \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2}}$$

Phasengang:

$$B(\omega) = \arg(\underline{A}(j\omega)) = 0 - \arctan(\tfrac{\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2})$$

g) Nehmen Sie an, dass durch einen Defekt des Bauteils kein Strom durch R_2 fließt. Nehmen Sie des Weiteren an, dass für die verbleibenden Bauteile $R_1 = 100\,\Omega$ und $C = 1\,\mathrm{mF}$ gewählt wird.

Skizzieren Sie für diesen Fall den Amplitudengang in dB und den Phasengang in Grad. Ändern sich durch den Defekt Typ und Ordnung des Filters? Wenn ja, geben Sie den neuen Typ und die neue Ordnung des Filters an.

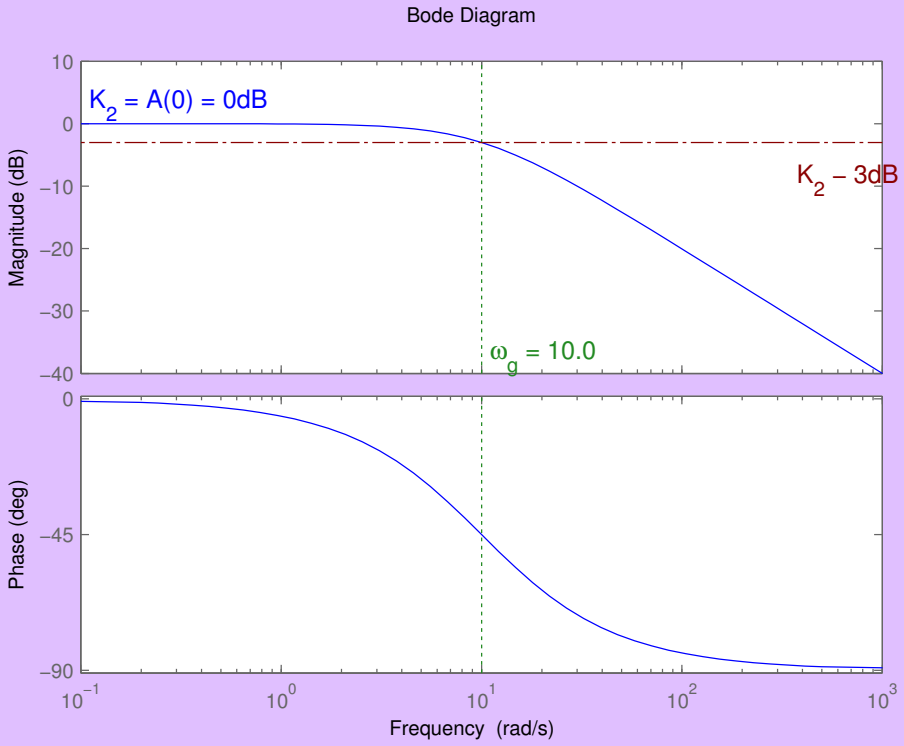
Lösung (- Punkte): Frequenzgang nach Entfernen von R_2:

$$\underline{A}'(j\omega) = \lim_{R_2 \to \infty} \underline{A}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C}$$

$\Rightarrow$ Tiefpass, 1. Ordnung
Verstärkung und Grenzfrequenz:

$$K' = \underline{A}(0) = 1 = 0\,\mathrm{dB}$$
$$\omega'_{g,2} = \frac{1}{R_1 C} = 1$$

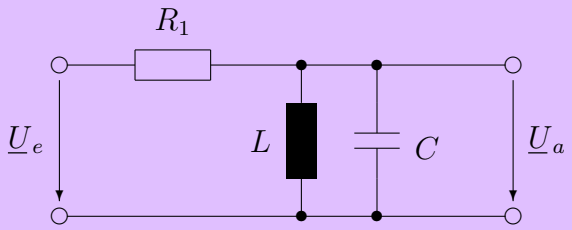
Flankensteilheit: Filterordnung 1 $\Rightarrow$ 20 dB/Dekade



Teil 3:

h) Ersetzen Sie *eines* der Bauteile (R_1, R_2, C) der in Abbildung 7 dargestellten Schaltung durch eine Spule mit der Induktivität L, so dass ein passiver Bandpass entsteht und geben Sie dessen Frequenzgang $\underline{A}_{\mathrm{BP}}(j\omega)$ an. Welche Ordnung hat das resultierende Filter?

Lösung (- Punkte):



Frequenzgang:

$$\underline{A}_{\mathrm{BP}}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{LC}}{R_1 + \underline{Z}_{LC}} \qquad \text{mit } \underline{Z}_{LC} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$= \frac{j\omega \frac{L}{R_1}}{1 + j\omega \frac{L}{R_1} - \omega^2 LC} \quad \checkmark \text{ Bandpass, 2. Ordnung} \qquad (1)$$

i) Bestimmen Sie die nötige Kapazität der Spule L damit der Bandpass die Güte $Q = 100$ besitzt. Verwenden Sie als Zahlenwerte für die verbleibenden Bauteile $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$ und $C = 1\,\mathrm{mF}$. Welche Mittenfrequenz ω_0 besitzt das realisierte Filter?

Hinweis: Die Gleichung für den normierten Bandpass lautet

$$G_{\mathrm{BP}} = \frac{A_0 \Delta\Omega P}{1 + \Delta\Omega P + P^2}\,,$$

mit $\Delta\Omega = 1/Q$.

Lösung (- Punkte): Normierter Bandpass:

$$G_{\mathrm{BP}} = \frac{A_0 \Delta\Omega P}{1 + \Delta\Omega P + P^2}. \tag{2}$$

Koeffizientenvergleich mit Gleichung (1) ergibt

$$A_0 = 1$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$Q = R\sqrt{\tfrac{C}{L}}$$

und somit

$$L = \frac{R^2 C}{Q^2} = 1\,\mathrm{mH}\,.$$

Die resultierende Mittenfrequenz ist gegeben als

$$\omega_0 = 1000\,\tfrac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

j) Nennen Sie zwei Nachteile passiver Filter.

Lösung (- Punkte):

- Bestimmte Filtertypen können nicht ohne Induktivität realisiert werden.
- Passive Filter sind nicht rückwirkungsfrei und können daher nicht ohne weiteres hintereinandergeshaltet werden.
- Passive Filter haben eine maximale Verstärkung von 1.

Aufgabe 6 *Signale und Systeme* *(25 Punkte)*

Die Aufgabenteile 1, 2 und 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1:

Markieren Sie in den folgenden Teilaufgaben die Antworten, für die die gegebenen Aussagen zutreffen. Es sind keine Begründungen notwendig. Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können pro Teilaufgabe nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

a) Das Signal ist periodisch.

$x_1(t) = \sin(\frac{2\pi}{3}t + 3)\,, \quad t \in \mathbb{R}$	● Ja	○ Nein
$x_2[n] = \tan(2\pi n + 3)\,, \quad n \in \mathbb{Z}$	● Ja	○ Nein
$x_3(t) = \sin(\sqrt{2\pi t})\,, \quad t \in \mathbb{R}$	○ Ja	● Nein
$x_4[n] = \cos(\sqrt{2\pi n})\,, \quad n \in \mathbb{Z}$	○ Ja	● Nein

b) Das Impulsübertragungsverhalten des zeitdiskreten Systems ist Null für $n < 0$.

$H_1(z) = \dfrac{2z - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	○ Ja	● Nein
$H_2(z) = \dfrac{(2 - z^{-1})^2}{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}$	● Ja	○ Nein
$H_3(z) = \dfrac{(z^2 - \frac{2}{3})^3}{(1 - z)^4}$	○ Ja	● Nein
$H_4(z) = \dfrac{(z - \frac{2}{3})^3}{(1 - z)^4}$	● Ja	○ Nein

Teil 2:

Markieren Sie die zutreffenden Aussagen in den folgenden Teilaufgaben. Es sind keine Begründungen notwendig. Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können pro System nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

c) Bestimmen Sie die Eigenschaften der folgenden Systeme:

i) Das zeitkontinuierliche System

$$y_1(t) = \int_0^{2t} \sqrt{a} x(\tau) d\tau\,, \quad t > 0,\ a > 0$$

ii) Das zeitdiskrete System

$$y_2[n] = \sum_{k=-1}^{3} x^k[n]\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

iii) Das zeitdiskrete System

$$y_3[n] = n x[n]\,, \quad n \geq 0$$

System	$y_1(t)$		$y_2[n]$		$y_3[n]$	
Eigenschaft	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
Das System ist speicherfrei.		✓	✓		✓	
Das System ist zeitinvariant.		✓	✓			✓
Das System ist linear.	✓			✓	✓	
Das System ist kausal.		✓	✓		✓	
Das System ist stabil.		✓		✓		✓

Teil 3:

System	I	II	III
Das System ist ein Allpass:	Nein	Nein	Ja
Konvergenzradius:	$2 < \|z\| < \infty$	$0 \leq \|z\| < 2$	$\frac{1}{2} < \|z\| < \infty$

Tabelle 1: Eigenschaften

d) Tabelle 1 beschreibt die Eigenschaften drei verschiedener zeitdiskreter LTI-Systeme (jeweils 3. Ordnung).

Geben Sie für jedes der Systeme je 3 *verschiedene* mögliche Polstellen und 3 *verschiedene* mögliche Nullstellen an. Achten Sie dabei darauf, dass keine Pol-/Nullstellenkürzungen auftreten. Geben Sie für jedes System an, ob es stabil ist.

Es sind keine Begründungen notwendig. Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können pro System nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

System	I	II	III
Pole	Pole müssen $\|z\| \leq 2$ erfüllen, z.B.: $z_{\mathrm{I,P}} = 0, 1, 2$	Pole müssen $\|z\| \geq 2$ erfüllen, z.B.: $z_{\mathrm{II,P}} = 2, 3, 4$	Pole müssen $\|z\| \leq \frac{1}{2}$ erfüllen, z.B.: $z_{\mathrm{III,P}} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$
Nullstellen	Lage der NS beliebig	Lage der NS beliebig	NS konjugiert reziprok zu Polen
System ist stabil?	○ Ja ● Nein	● Ja ○ Nein	● Ja ○ Nein