Musterlösung und Punkteverteilung

Hinweis:
Die Musterlösung enthält teilweise keine Lösungswege, sondern nur Ergebnisse. Bewertet werden in der Prüfung bei allen Aufgaben außer den multiple Choice Teilaufgaben die Lösungswege. Die reine Angabe des Endergebnisses wird daher nicht bewertet!

Aufgabe 1 Abtastung (10 Punkte)

Hinweis: Bei dieser Aufgabe ist pro Teilaufgabe immer nur EINE der möglichen Antworten richtig. Lösen Sie die anderen Aufgabenteile ebenfalls auf dem Aufgabenblatt.

Betrachten Sie ein zeitkontinuierliches reelles Tiefpass-Signal $x_c(t)$ dessen höchste Frequenz kleiner als $2\pi 100$ rad/s ist. Der Ausgang eines Filterungssystems sei beschrieben durch $y_c(t) = x_c(t - \frac{1}{800})$.

a) Berechnen Sie die Nyquistfrequenz für das Tiefpass-Signal $x_c(t)$.

Lösung (1 Punkte):
$F_N = 2 \cdot 100\,\text{Hz} = 200\,\text{Hz}$

b) Falls $x[n] = x_c[\frac{n}{400}]$, kann man theoretisch $x_c(t)$ aus $x[n]$ zurückgewinnen?

- ○ Nein, denn ein reelles Signal kann nie nach der Abtastung zurückgewonnen werden.
- ○ Nein, denn das Nyquist-Kriterium wird nicht eingehalten.
- ● Ja, denn das Nyquist-Kriterium wird eingehalten.
- ○ Ja, denn reelle Signale können stets nach der Abtastung zurückgewonnen werden.

(1 P)

c) Berechnen Sie die Nyquistfrequenz für das gefilterte Tiefpass-Signal $y_c(t)$.

Lösung (1 Punkte):
$F_N = 200\,\mathrm{Hz}$

d) Falls $y[n] = y_c[\frac{n}{400}]$, kann man theoretisch $y_c(t)$ aus $y[n]$ zurückgewinnen?

- ○ Ja, denn in diesem Fall hat sich die Nyquistfrequenz verdoppelt.
- ● Ja, denn das Nyquist-Kriterium wird weiterhin eingehalten.
- ○ Nein, denn eine Zeitverschiebung verändert auch die Nyquistfrequenz.
- ○ Nein, denn das Nyquist-Kriterium wird weiterhin nicht eingehalten.

(1 P)

e) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ○ Eine Zeitverschiebung im Zeitbereich entspricht einer Frequenzverschiebung im Frequenzbereich, der Betrag des Signals wird verändert.
- ● Eine Zeitverschiebung im Zeitbereich entspricht einer Phasendrehung im Frequenzbereich, der Betrag des Signals bleibt unverändert.
- ○ Eine Zeitverschiebung im Zeitbereich entspricht einer Skalierung im Frequenzbereich, der Betrag des Signals wird verändert.

(1 P)

f) Das zeitkontinuierliche Signal $x(t)$ soll zeitdiskret verarbeitet werden. Dazu wird es abgetastet, wodurch $x[n]$ entsteht und mit einem zeitdiskreten Filter $H(e^{j\omega})$, wie in Abb. 1 gezeigt, verarbeitet. Das Ausgangssignal des zeitdiskreten Filters $y[n]$ wird durch Interpolation zu dem zeitkontinuierlichen Signal $y(t)$ zurückgewonnen.

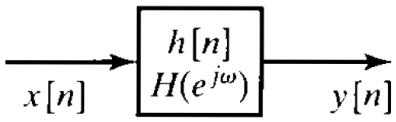


Abbildung 1: Darstellung eines zeitdiskreten Filterungssystems.

Wie kann man $y[n]$ aus $x[n]$ nach Abb.1 berechnen?

- ● $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega/2} & ; \ |\omega| < \pi/2 \\ 0 & ; \ \text{Rest} \end{cases}$
- ○ $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j\omega/2} & ; \ |\omega| < \pi/2 \\ 0 & ; \ \text{Rest} \end{cases}$
- ○ $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega/2} & ; \ |\omega| < \pi/3 \\ 0 & ; \ \text{Rest} \end{cases}$
- ○ $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j\omega/2} & ; \ |\omega| < \pi/3 \\ 0 & ; \ \text{Rest} \end{cases}$

(2 P)

g) Betrachten Sie folgendes Schaltbild:

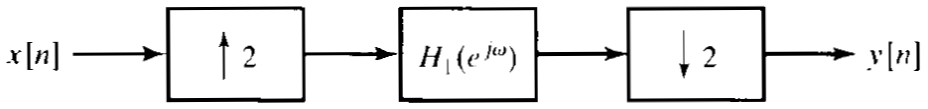


Abbildung 2: Darstellung eines zeitdiskreten Filterungssystems mit Dezimierungs- und Interpolationsstufe.

Wie kann man nun $y[n]$ aus $x[n]$ nach dem Schaltbild 2 berechnen? Es muss gelten:

- ● $H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2e^{-j\omega} & ; \ |\omega| < \pi/2 \\ 0 & ; \ \text{Rest} \end{cases}$
- ○ $H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2e^{j\omega/2} & ; \ |\omega| < \pi/2 \\ 0 & ; \ \text{Rest} \end{cases}$
- ○ $H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-j\omega} & ; \ |\omega| < \pi/2 \\ 0 & ; \ \text{Rest} \end{cases}$
- ○ $H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{j\omega} & ; \ |\omega| < \pi/2 \\ 0 & ; \ \text{Rest} \end{cases}$

(2 P)

h) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ○ In zeitdiskreten Signalverarbeitungssystemen sind Dezimierung und Interpolation immer austauschbar. Es ist gleichgültig, ob erst dezimiert wird und dann interpoliert oder erst interpoliert und dann dezimiert wird.
- ○ In zeitdiskreten Signalverarbeitungssystemen sind Dezimierung und Interpolation nur austauschbar, wenn mit derselben Rate dezimiert bzw. interpoliert wird. In diesem Fall ist es ist gleichgültig, ob erst dezimiert wird und dann interpoliert oder erst interpoliert und dann dezimiert wird.
- ● In zeitdiskreten Signalverarbeitungssystemen sind Dezimierung und Interpolation grundsätzlich nicht austauschbar. Es ist nicht gleichgültig, ob erst dezimiert wird und dann interpoliert oder erst interpoliert und dann dezimiert wird.

(1 P)

Aufgabe 2 Modulation (10 Punkte)

Hinweis: Bei dieser Aufgabe ist pro Teilaufgabe immer nur EINE der möglichen Antworten richtig. Lösen Sie die anderen Aufgabenteile ebenfalls auf dem Aufgabenblatt.

Wir betrachten ein Nachrichtensignal $x(t) = 20\text{sinc}(500t)$ welches die Frequenz eines Trägersignals $c(t) = 100\cos(2\pi f_\text{T} t)$ mit einem Modulationsindex $m = 5$ moduliert.

a) Das modulierte Signal ist:

- ○ $y(t) = 100\cos\left(2\pi f_\text{T} t + 250\pi \int_{-\infty}^{t} 20\text{sinc}(500\tau)d\tau\right)$
- ● $y(t) = 100\cos\left(2\pi f_\text{T} t + 125\pi \int_{-\infty}^{t} 20\text{sinc}(500\tau)d\tau\right)$
- ○ $y(t) = 200\cos\left(2\pi f_\text{T} t + 125\pi \int_{-\infty}^{t} 20\text{sinc}(500\tau)d\tau\right)$

Lösung (1 Punkte):
$\theta(t) = \omega_T t + k_f \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
$x(t) = 20sinc(500t) = 20\frac{\sin(500\pi t)}{500\pi t} = \frac{1}{25}\frac{\sin(500\pi t)}{\pi t}$
$X(\omega) = \frac{1}{25}; \text{für} |\omega| < 500\pi\,\text{Rad/s};$
$X(\omega) = 0; \text{für den Rest};$
Die maximale Frequenz ist $\omega_{max} = 500\pi\,\text{Rad/s}$
$m = \frac{k_f \max(|x(t)|)}{\omega_{max}}$
$k_f = m\frac{\omega_{max}}{\max(|x(t)|)} = 5\frac{500\pi}{20}\,\text{Rad/s} = 125\pi\,\text{Rad/s}$
$y(t) = 100\cos\left(2\pi f_T t + 125\pi \int_{-\infty}^{t} 20\text{sinc}(500\tau)d\tau\right)$

b) Berechnen Sie die maximale Frequenzabweichung des modulierten Signals.

Lösung (1 Punkte): $\Delta\omega_{max} = k_f \max(|x(t)|) = 125\pi 20\,\text{Rad/s} = 2500\pi\,\text{Rad/s}$

c) Berechnen Sie die Leistung des modulierten Signals.

Lösung (1 Punkte): $P_y = \frac{A_c^2}{2} = \frac{100^2}{2} = 5000$

d) Berechnen Sie die Bandbreite des modulierten Signals.

Lösung (1 Punkte): $2(5+1)\omega_{max} = 12\omega_{max} = 12 \cdot 500\pi\,\mathrm{Rad/s} = 6000\pi\,\mathrm{Rad/s}$

e) Betrachten Sie nun den Fall, dass $x(t)$ das Trägersignal $c(t)$ als Doppelseitenband Amplitudenmodulation moduliert. In diesem Fall gilt für die Bandbreite des amplitudenmodulierten Signals im Vergleich zur Bandbreite des frequenzmodulierten Signals: **(1 P)**

- ● Das amplitudenmodulierte Signal hat eine kleinere Bandbreite als das frequenzmodulierte Signal.
- ○ Das amplitudenmodulierte Signal hat eine größere Bandbreite als das frequenzmodulierte Signal.
- ○ Das amplitudenmodulierte Signal hat dieselbe Bandbreite wie das frequenzmodulierte Signal.

Lösung (1 Punkte): $B_{FM} = 6000\,\mathrm{Rad/s}\pi$
$B_{AM} = 2\omega_{max} = 2 \cdot 500\pi\,\mathrm{Rad/s} = 1000\pi\,\mathrm{Rad/s}$

f) Für den in e) betrachteten Fall gilt: **(1 P)**

- ● Die Leistung des amplitudenmodulierten Signals ist größer als die des frequenzmodulierten Signals.
- ○ Die Leistung des amplitudenmodulierten Signals ist kleiner als die des frequenzmodulierten Signals.
- ○ Die Leistung des amplitudenmodulierten Signals ist dieselbe wie die des frequenzmodulierten Signals.

Lösung (1 Punkte): $P_{FM} = 5000$
$P_{AMmax} = \frac{A^2}{2} = (20 \cdot 100)^2/2 = 2000000$

Wir betrachten nun eine Amplitudenmodulation, bei der das Nutzsignal ein Ton $x(t) = 5\cos(\pi t)$ ist und das Trägersignal eine Amplitude von $A_c = 10V$ und eine Frequenz von $f_T = 10Hz$ besitzt.

g) Geben Sie ein Schaltbild für eine untere Einseitenband-Amplitudenmodulation an. Alle Filter, die Sie dafür benötigen, sollen symmetrisch im Frequenzbereich sein.

Lösung (1 Punkte): s. separate Musterlösung

h) Geben Sie ein Schaltbild für eine untere Einseitenband-Amplitudendemodulation an. Alle Filter, die Sie dafür benötigen, sollen symmetrisch im Frequenzbereich sein.

Lösung (1 Punkte): s. separate Musterlösung

i) Berechnen Sie die Bandbreite des modulierten Signals für die untere Einseitenband-Amplitudenmodulation.

Lösung (1 Punkte): s. separate Musterlösung

j) Berechnen Sie die Leistung des modulierten Signals für die untere Einseitenband-Amplitudenmodulation.

Lösung (1 Punkte): s. separate Musterlösung

Aufgabe 3 Fourier (30 Punkte)

Die Aufgabenteile 1,2 und 3 können **u**nabhängig voneinander gelöst werden.

Teil 1 (6 Punkte):

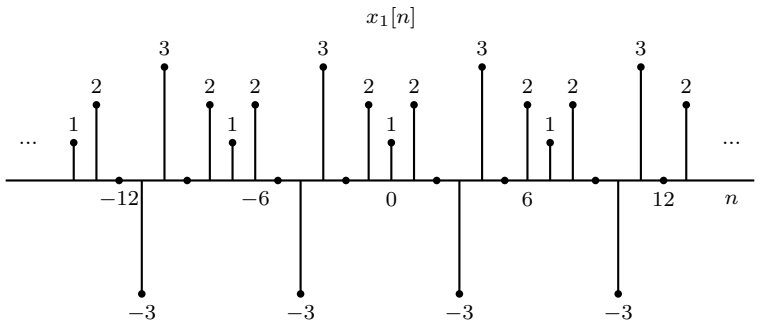


Abbildung 3: periodisches Signal $x_1[n]$

a) Das Signal aus Abbildung 3 besitzt die Periodizität

Lösung (1 Punkte):

- ○ 5
- ● 7
- ○ 14
- ○ 12
- ○ 6
- ○ 10
- ○ N
- ○ 13

b) Welche geschlossene Darstellung einer Periode des Signals aus Abbildung 3 ist korrekt?

Lösung (2 Punkte):

- ○ $x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$
- ○ $x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-3] + 3\delta[n-4] + 2\delta[n-6] + \delta[n-7]$
- ○ $x_1[n] = 3\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$
- ● $x_1[n] = 3\delta[n+3] + 2\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-3]$
- ○ $x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n+2] + 3\delta[n+3] + 2\delta[n+4] + \delta[n+5]$
- ○ $x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n+3] + 3\delta[n+4] + 2\delta[n+6] + \delta[n+7]$
- ○ $x_1[n] = 3\delta[n-2] + 2\delta[n-1] + \delta[n] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n+2]$
- ○ $x_1[n] = 3\delta[n-3] + 2\delta[n-1] + \delta[n] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n+3]$

c) Welche ist die korrekte darstellung der Spektralkoeffizienten $a_{1,k}$ der Fourier-Reihe für das periodische, zeitdiskrete Signal aus Abbildung 3?

Lösung (3 Punkte):

- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{5} + \frac{4j}{5}\sin\left(\frac{2}{5}k\pi\right) + \frac{6j}{5}\sin\left(\frac{6}{5}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5j}\sin\left(\frac{2}{5}k\pi\right) + \frac{6}{5j}\sin\left(\frac{6}{5}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{5} + \frac{4j}{5}\sin\left(\frac{2}{5}k\pi\right) + \frac{6}{5}\cos\left(\frac{6}{5}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5j}\sin\left(\frac{2}{5}k\pi\right) + \frac{6}{5}\cos\left(\frac{6}{5}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cos\left(\frac{2}{6}k\pi\right) + \frac{6}{6}\cos\left(\frac{6}{6}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cos\left(\frac{2}{6}k\pi\right) + \frac{6}{6}\cos\left(\frac{6}{6}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cos\left(\frac{2}{6}k\pi\right) + \frac{6j}{6}\sin\left(\frac{6}{6}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cos\left(\frac{2}{6}k\pi\right) + \frac{6}{6j}\sin\left(\frac{6}{6}k\pi\right)$
- ● $a_{1,k} = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}\cos\left(\frac{2}{7}k\pi\right) + \frac{6j}{7}\sin\left(\frac{6}{7}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}\cos\left(\frac{2}{7}k\pi\right) + \frac{6}{7j}\sin\left(\frac{6}{7}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{7} + \frac{2j}{7}\sin\left(\frac{2}{7}k\pi\right) + \frac{3}{7}\cos\left(\frac{6}{7}k\pi\right)$
- ○ $a_{1,k} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7j}\sin\left(\frac{2}{7}k\pi\right) + \frac{3}{7}\cos\left(\frac{6}{7}k\pi\right)$

Teil 2 (9 Punkte):

Gegeben: periodisches, zeitdiskretes Signal

$$x_2[n] = \sqrt{2}\sin\left(\frac{12\pi}{7}n - \frac{6\pi}{5}\right).$$

d) Geben sie die Periodendauer N des periodischen, zeitdiskreten Signals $x_2[n]$ an:

Lösung (2 Punkte):

- ○ $\frac{7}{2}$
- ○ $\sqrt{2}$
- ○ 5
- ○ 6
- ● 7
- ○ 10
- ○ 12
- ○ 14

e) Welche der Darstellungen entspricht der Spektraldarstellung in Form der zeitdiskreten Fourier-Reihe eines zeitdiskreten, periodischen Signals mit den Spektralkoeffizienten a_k und der Periode N?

Lösung (2 Punkte):

- ○ $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{n}N}$
- ○ $a_k = \sum_{k=<N>} x[n] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$
- ● $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$
- ○ $a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=<N>} x[n] e^{jk\frac{2\pi}{n}N}$
- ○ $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{k\frac{2\pi}{N}n}$
- ○ $a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=<N>} x[n] e^{k\frac{2\pi}{N}n}$

f) Wählen Sie die passenden Spektralkoeffizienten für $k \in [0, N-1]$ für die Darstellung des Signals $x_2[n]$ gemäß der im vorigen Aufgabenteil gewählten Darstellungsform:
Anm: Korrektur von $a_{2,2} \leftarrow a_{2,1}$ zu Beginn der Prüfung

Lösung (5 Punkte):

- ● $a_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{17}{10}\pi}, a_{2,6} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{17}{10}\pi}$
- ○ $a_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{17}{10}\pi}, a_{2,6} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{17}{10}\pi}$
- ○ $a_{2,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}j} e^{j\frac{12}{7}\pi}, a_{2,6} = \frac{1}{\sqrt{2}j} e^{-j\frac{12}{7}\pi}$
- ○ $a_{2,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}j} e^{j\frac{12}{5}\pi}, a_{2,6} = \frac{1}{\sqrt{2}j} e^{-j\frac{12}{5}\pi}$
- ○ $a_{2,-6} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{17}{10}\pi}, a_{2,6} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{17}{10}\pi}$
- ○ $a_{2,-6} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{17}{10}\pi}, a_{2,6} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{17}{10}\pi}$
- ○ $a_{2,-6} = -\frac{1}{\sqrt{2}j} e^{i\frac{12}{7}\pi}, a_{2,6} = \frac{1}{\sqrt{2}i} e^{-j\frac{12}{7}\pi}$
- ○ $a_{2,-6} = -\frac{1}{\sqrt{2}j} e^{i\frac{12}{5}\pi}, a_{2,6} = \frac{1}{\sqrt{2}i} e^{-j\frac{12}{5}\pi}$

Teil 3 (15 Punkte):

Es sei das kausale, zeitdiskrete LTI-System aus Abbildung 4 gegeben.

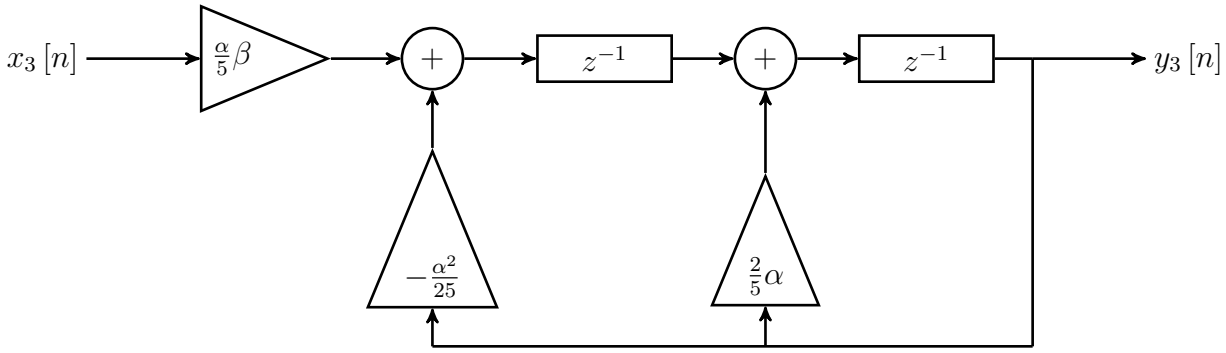


Abbildung 4: LTI-System.

g) Beschreiben Sie das System in Form einer Differenzengleichung. Gefordert ist die Differenzengleichung im Zeitbereich und deren z-Transformierte. Die Reihenfolge bei der Herleitung der beiden Gleichungen ist nicht relevant.

Lösung (3 Punkte):

$$y_3[n] = \frac{2\alpha}{5} y[n-1] - \left(\frac{\alpha}{5}\right)^2 y[n-2] + \frac{\alpha}{5}\beta x[n-2]$$
$$Y_3[z] = \frac{\alpha}{5}\beta z^{-2} X_3[z] + 2\frac{\alpha}{5} z^{-1} Y_3[z] - \left(\frac{\alpha}{5}\right)^2 z^{-}2Y_3[z]$$

h) Geben Sie die Gleichung der Übertragungsfunktion $H_3(z)$ des Systems an.

Lösung (2 Punkte):

$$H_3[z] = \beta z^{-1} \frac{\frac{\alpha}{5} z^{-1}}{\left(1 - \frac{\alpha}{5} z^{-1}\right)^2}$$

i) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_3[n]$.

Lösung (2 Punkte):
K6 (Kausales System) + Zeitverschiebung:

$$h_3[n] = \beta(n-1)\left(\frac{\alpha}{5}\right)^{n-1} u\,[n-1]$$

j) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $H_3[z]$. Für welche α ist das System stabil? Wie beeinflusst β die Stabilität des Systems?

Lösung (2 Punkte):
ROC: kausales System, daher $|z| > \frac{\alpha}{5}$.
Einheitskreis liegt für $|\alpha| < 5$ im ROC.
β beeinflusst die Stabilität des Systems nicht.

k) Im Folgenden sei das Eingangssignal durch

$$x_3[n] = \begin{cases} \frac{n}{9}\left(\frac{9}{4}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie die z-Transformation des zugehörigen Ausgangssignals $Y_3(z)$.

Lösung (3 Punkte): Transformation von $x_3[n]$ in Z-Bereich und Berechnung von $Y_3(z)$

$$Y_3(z) = H_3(z) \cdot X_3(z) = \frac{1}{20} \frac{\alpha\beta z}{\left(z - \frac{\alpha}{5}\right)^2 \left(z - \frac{9}{4}\right)^2}$$

l) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen Diagramm von $Y_3(z)$ mit $\alpha = \frac{5}{2}$ und $\beta = 20$ und geben Sie den zugehörigen Konvergenzbereich für $Y_3(z)$ an.

Lösung (2 Punkte):
Pole: $z_{1,2} = \frac{9}{4}, z_{3,4} = \frac{\alpha}{5} = \frac{1}{2}$
Nullstellen: $z_1 = 0$
ROC: $|z| > \frac{9}{4}$

m) Handelt es sich bei $y_3[n]$ um eine stabile Folge? Kurze Begründung!

Lösung (1 Punkte):
Nein, da der Einheitskreis nicht im Konvergenzsbereich liegt.

Aufgabe 4 Filterentwurf (20 Punkte)

Ein amplitudenmoduliertes analoges Signal wird zunächst analog demoduliert. Anschließend soll es mit einer digitalen Schaltung abgetastet und weiterverarbeitet werden. Nach der analogen Demodulation enthält das Signal

- das Nutzsignal $X_N(\Omega)$ von $\frac{1}{10}\pi$ bis $\frac{2}{10}\pi$,
- Überreste der Trägerfrequenz $X_T(\Omega)$ bei $\frac{6}{10}\pi$ und
- hochfrequentes Rauschen $X_R(\Omega)$ ab $\frac{8}{10}\pi$.

Der Frequenzbereich ist dabei auf die Abtastfrequenz des AD-Wandlers normiert.

a) Skizzieren Sie die Amplituden $|X_N(\Omega)|$, $|X_T(\Omega)|$ und $|X_R(\Omega)|$ des demodulierten Signals im normierten Frequenzbereich auf dem Intervall $\Omega = [-3\pi, 3\pi]$. Gehen Sie dabei für alle Signale von einer Amplitude von 1 aus.

Lösung (2 Punkte):
Skizze Signalanteile in einem Schaubild, mit Achsenskalierung.

b) Welcher Signalanteil macht die eindeutige Abtastung des demodulierten Signals unmöglich? Wie nennt sich dieses Problem? Bis zu welcher Frequenz kann das Signal theoretisch eindeutig aus der Abtastung zurückgewonnen werden?

Lösung (2 Punkte): Rauschanteil macht eindeutige Abtastung unmöglich, Stichwort Aliasing. Das Signal kann bis $\Omega = \pi$ (Nyquistfrequenz) eindeutig aus Abtastung zurückgewonnen werden.

c) Um eine eindeutige Abtastung zu ermöglichen, soll ein analoges Vorfilter mit hoher Güte verwendet werden. Welche Paarung aus Filtertyp und Grenz- bzw. Mittenfrequenz kommt dafür in Frage?

Lösung (2 Punkte):

- ○ Hochpass mit $\Omega_g = \frac{9}{10}\pi$
- ○ Hochpass mit $\Omega_g = \frac{10}{9}\pi$
- ● Tiefpass mit $\Omega_g = \frac{9}{10}\pi$
- ○ Tiefpass mit $\Omega_g = \frac{10}{9}\pi$
- ○ Bandsperre mit $\Omega_m = \frac{6}{10}\pi$ und $\Delta\Omega = \frac{1}{10}\pi$
- ○ Bandsperre mit $\Omega_m = \frac{10}{6}\pi$ und $\Delta\Omega = \frac{2}{10}\pi$
- ○ Bandpass mit $\Omega_m = \frac{6}{10}\pi$ und $\Delta\Omega = \frac{1}{10}\pi$
- ○ Bandpass mit $\Omega_m = \frac{10}{6}\pi$ und $\Delta\Omega = \frac{2}{10}\pi$

d) Zur Rückgewinnung des Nutzsignals soll nach erfolgter Abtastung ein digitales Filter entworfen werden. Es soll durch Hintereinanderschaltung von einem oder mehreren der zur Verfügung stehenden Filter

$$H_1(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\Omega| < \frac{7}{10}\pi \\ 0 & \text{für } \frac{7}{10}\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$H_2(\Omega) = \begin{cases} 3e^{-10j\Omega} & \text{für } \frac{2}{10}\pi < |\Omega| < \frac{6}{10}\pi \\ 0 & \text{für } |\Omega| \leq \frac{2}{10}\pi \quad \text{und} \quad \frac{6}{10}\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$H_3(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\Omega| < \frac{2}{10}\pi \\ 1 & \text{für } \frac{2}{10}\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$H_4(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{3}{10}\pi < |\Omega| < \frac{7}{10}\pi \\ 3e^{-10j\Omega} & \text{für } |\Omega| \leq \frac{3}{10}\pi \quad \text{und} \quad \frac{7}{10}\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

realisiert werden.

Wählen Sie einen oder mehrere der gegebenen Filter aus und schalten Sie diese gegebenenfalls so hintereinander, dass nur das Nutzsignal am Filterausgang erhalten bleibt. Skizzieren Sie den Amplituden-Frequenzgang $|H_i(\Omega)|$ für $|\Omega| < \pi$ der ausgewählten Filter und $|H(\Omega)|$ für $|\Omega| < \pi$ des resultierenden Filters. Um welchen Filtertyp handelt es sich dabei jeweils bei den ausgewählten Filtern? Die Signalphasen und -amplituden müssen dabei nicht erhalten bleiben.

Lösung (4 Punkte):
Korrekte Verschaltung: $H(\Omega) = H_1(\Omega) \cdot H_4(\Omega)$
Skizze idealer TP.
Es handelt sich bei $H_1(\Omega)$ um einen Tiefpassfilter.
Skizze ideale Bandsperre
Es handelt sich bei $H_4(\Omega)$ um eine Bandsperre.
Skizze idealer Tiefpass
Es handelt sich bei $H(\Omega)$ um einen Tiefpassfilter.

e) Geben Sie die Übertragungsfunktion $H(\Omega)$ des resultierenden Filters an.

Lösung (2 Punkte):

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= H_1(\Omega) \cdot H_4(\Omega) \\ &= \begin{cases} 3e^{-10j\Omega} & \text{für } |\Omega| \leq \frac{3}{10}\pi \\ 0 & \text{für } \frac{3}{10}\pi < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

f) Berechnen Sie die Impulsantwort $h[n]$.

Lösung (3 Punkte): Zeitverschiebung & Korr. 9:

$$h[n] = 3\frac{\sin\left(\frac{3}{10}\pi(n-10)\right)}{\pi(n-10)}$$

g) Das Nutzsignal vor der Filterung lautet im Zeitbereich:

$$x[n] = \cos\left(\frac{2}{10}\pi n + \frac{1}{10}\pi\right) + 9\delta[n-10].$$

Bestimmen Sie das zugehörige Ausgangssignal $y[n]$.

Lösung (5 Punkte):
Lösung durch Aufteilung in Kosinusschwingung und Einheitsimpuls. Antwort auf ersteres über Auswertung der Übertragungsfunktion. Letzteres kann mit Faltung berechnet werden. Andere Lösungswege möglich.

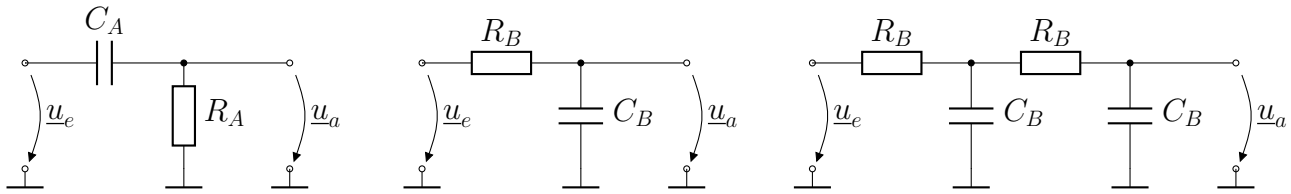
$$y[n] = h[n] * x[n]$$

$$y[n] = 3\cos\left(\frac{2}{10}\pi n + \frac{2}{10}\pi - 2\pi\right) + 27\frac{\sin\left(\frac{3}{10}\pi(n-20)\right)}{\pi(n-20)}$$

Aufgabe 5 Analogfilter (33 Punkte)

Die Aufgabenteile 1, 2, 3 und 4 können **u**nabhängig voneinander gelöst werden.

Teil 1: (11 Punkte)



(a) Filter A (b) Filter B (c) Direkte Verschaltung

Abbildung 5

Betrachten Sie zunächst das in Abbildung 5a dargestellte Filter A.

a) Geben Sie an, ob es sich um ein aktives oder um ein passives Filter handelt.

Lösung (1 Punkte): Passives Filter

b) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\underline{A}_\mathrm{A}(j\omega)$ von Filter A, sowie Typ und Ordnung des Filters.

Lösung (3 Punkte):
Einfacher Spannungsteiler:

$$\underline{A}_\mathrm{A}(j\omega) = \frac{R_\mathrm{A}}{\frac{1}{j\omega C_\mathrm{A}} + R_\mathrm{A}} = \frac{j\omega C_\mathrm{A} R_\mathrm{A}}{1 + j\omega C_\mathrm{A} R_\mathrm{A}}$$

Hochpass, 1. Ordnung

c) Berechnen Sie den Amplitudengang $A_\mathrm{A}(\omega)$ und den Phasengang $\phi_\mathrm{A}(\omega)$ von Filter A.

Lösung (2 Punkte):

$$A_\mathrm{A}(\omega) = |\underline{A}_\mathrm{A}(j\omega)| = \frac{\omega C_\mathrm{A} R_\mathrm{A}}{\sqrt{1 + (\omega C_\mathrm{A} R_\mathrm{A})^2}}$$
$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega C_\mathrm{A} R_\mathrm{A})$$

d) Berechnen Sie die ungedämpfte Verstärkung K_A im Durchlassbereich und die Grenzfrequenz $\omega_{g,\mathrm{A}}$ von Filter A.

Lösung (2 Punkte):

$$K_\mathrm{A} = \lim_{\omega \to \infty} \underline{A}_\mathrm{A}(j\omega) = 1$$
$$\omega_{g,\mathrm{A}} = \frac{1}{R_\mathrm{A} C_\mathrm{A}}$$

e) Wie lautet die Verstärkung (in dB) und die Phase in der Grenzfrequenz.

Lösung (1 Punkte):
Die Grenzfrequenz ist gegeben durch die Frequenz, unterhalb derer die Verstärkung weniger als $K_\mathrm{A} - 3\,\mathrm{dB}$ beträgt. Die Phase beträgt 45°.

f) Für den Widerstand R_A gelte $R_\mathrm{A} = 1\,\mathrm{k\Omega}$. Berechnen Sie die Kapazität C_A des Kondensators so, dass für die Grenzfrequenz $f_{g,\mathrm{A}} = \frac{10}{\pi}\mathrm{Hz} \approx 3.18\,\mathrm{Hz}$ gilt.

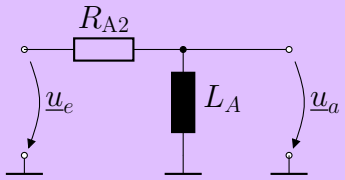
Lösung (2 Punkte):
1 Punkt Abzug bei fehlenden / falschen Einheiten:

$$\omega_{g,\mathrm{A}} = 2\pi f_{g,\mathrm{A}} = 20\,{}^{\mathrm{Rad}}/_{\mathrm{s}}$$
$$\omega_{g,\mathrm{A}} = \frac{1}{R_\mathrm{A} C_\mathrm{A}}$$
$$C_\mathrm{A} = \frac{1}{\omega_{g,\mathrm{A}} R_\mathrm{A}} = \frac{1}{20\,{}^{1}/_{\mathrm{s}} \cdot 10\,\mathrm{k\Omega}} = 0,005\,{}^{\mathrm{s}}/_{\mathrm{k\Omega}} = 5\,\mu\mathrm{F}$$

Teil 2: (3 Punkte)

g) Geben Sie die Schaltung für ein passives Filter gleichen Typs und gleicher Ordnung wie Filter A an, für die kein Kondensator benötigt wird. Wie lautet die Übertragungsfunktion ihres Filters?

Lösung (2 Punkte):



Übertragungsfunktion:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{j\omega L_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A} + j\omega L_\mathrm{A}}$$

h) Der Filter aus Aufgabe g) soll zur Filterung eines Kleinsignals mit Gleichspannungsanteil verwendet werden. Nennen Sie einen Nachteil dieser Schaltung.

Lösung (1 Punkte):
Der Gleichspannungsanteil erzeugt einen konstanten Verluststrom durch Widerstand und Spule.

Teil 3: (9 Punkte)

i) Abbildung 5b zeigt die Schaltung für einen passiven Tiefpass erster Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$\underline{A}_{\mathrm{B}}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R_{\mathrm{B}} C}.$$

Berechnen Sie die Gesamtübertragungsfunktion für die direkte Kombination zweier solcher Tiefpässe (siehe Abbildung 5c) und erläutern Sie anhand dieser den Unterschied zur direkten Verschaltung zweier aktiver Filter.

Lösung (9 Punkte):
Die Gesamtübertragungsfunktion kann bei passiven Filtern *nicht* durch Multiplikation der einzelnen Übertragungsfunktionen bestimmt werden.

Rechenweg:
Zuerst $\underline{u}_a$ bei bekannter Spannung $\underline{u}_c$ über dem ersten Kondensator berechnen:

$$\frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_c} = \frac{1}{1 + j\omega R_B C_B} \tag{1}$$

Spannung $\underline{u}_c$ berechnet sich aus $\underline{u}_e$ durch

$$\frac{\underline{u}_c}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + \frac{R_B}{\underline{Z}_C}} \tag{2}$$

mit

$$\underline{Z}_C = \left(\frac{1}{j\omega C_B} \middle|\middle| R_B + \frac{1}{j\omega C_B} \right) \tag{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{j\omega C_B} \cdot R_B + \frac{1}{(j\omega C_B)^2}}{\frac{2}{j\omega C_B} + R_B} \tag{4}$$

$$= \frac{1 + j\omega R_B C_B}{j2\omega C_B + (j\omega C_B)^2 R_B} \tag{5}$$

Es ergibt sich

$$\frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_c} \cdot \frac{\underline{u}_c}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + j\omega R_B C_B} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j2\omega C_B R_B + (j\omega C_B R_B)^2}{1 + j\omega R_B C_B}} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{1 + j3\omega C_B R_B + (j\omega C_B R_B)^2} \tag{7}$$

Teil 4: (10 Punkte)

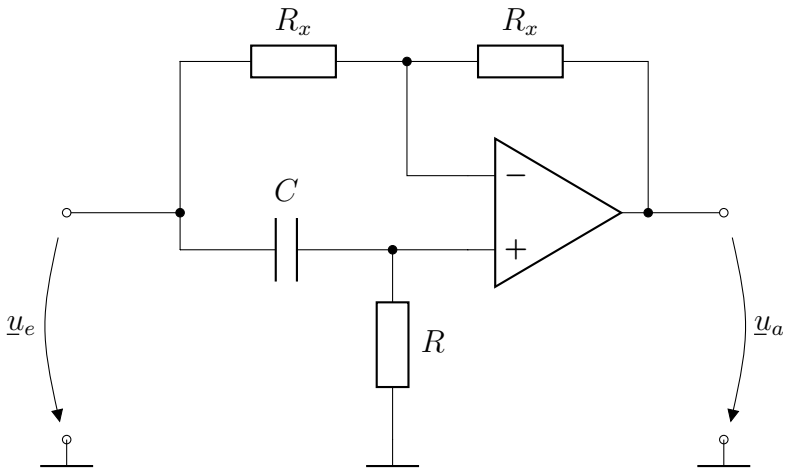


Abbildung 6: Schaltung C

Betrachten Sie den in Abbildung 6 dargestellten Verstärker (Schaltung C). Nehmen Sie im Folgenden an, dass hierfür ein *idealer* Operationsverstärker zum Einsatz kommt. Diese Schaltung soll in den folgenden Teilaufgaben analysiert werden:

j) Nennen Sie vier charakteristische Eigenschaften eines idealen Operationsverstärkers.

Lösung (2 Punkte):
0,5 Pkt. je richtiger Eigenschaft:

- Eingangswiderstand unendlich hoch
- Ausgangswiderstand null
- Verstärkung unendlich hoch
- Keine Offsetspannungen und Leckströme
- Kein Rauschen und unendlich hohe Anstiegsrate

k) Zeichnen Sie zwei geeignete Maschen zur Netzwerkanalyse der Schaltung C.
Hinweis: Dies kann direkt in Abbildung 6 auf dem Aufgabenblatt erfolgen.

Lösung (1 Punkte):
Richtig eingezeichnete Maschen: 0,5 Pkt je Masche

l) Berechnen Sie die Spannung am nichtinvertierenden Eingang (+) des Operationsverstärkers in Abhängigkeit der Eingangsspannung $\underline{u}_e$.

Lösung (1 Punkte):

$$\underline{u}_{(+)} = \underline{u}_R = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{u}_e \tag{8}$$

m) Basierend auf l), wie groß ist dies Spannung am invertierenden Eingang (-) des Operationsverstärkers?

Lösung (1 Punkte): Idealer OP-Amp $\Rightarrow U_D = 0\,\mathrm{V}$

n) Geben Sie die Ausgangsspannung $\underline{u}_\mathrm{a}(j\omega)$ in Abhängigkeit der Eingangsspannung $\underline{u}_\mathrm{e}(j\omega)$ an.
Hinweis: Die bisherigen Teilergebnisse können dazu genutzt werden.

Lösung (3 Punkte):
Der Strom vom Eingang Richtung Ausgang durch R_x berechnet sich zu

$$\underline{i}_{R_x} = \frac{\underline{u}_e - \underline{u}_R}{R_x} \tag{9}$$

und damit ergibt sich die Ausgangspannung $\underline{u}_a$ zu

$$\underline{u}_a = \underline{u}_R - i_{R_x} \cdot R_x = 2\underline{u}_R - \underline{u}_e \tag{10}$$

$$= 2\frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}\underline{u}_e - \underline{u}_e \tag{11}$$

$$= \frac{R - \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{12}$$

$$= \frac{j\omega RC - 1}{j\omega RC + 1} \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

o) Geben Sie Typ und Ordnung des Analogfilters an.

Lösung (2 Punkte):
Allpass 1. Ordnung

Aufgabe 6 Kurzfragen (17 Punkte)

a) Es existiert eine realisierbare Impulsantwort welche Null ist für $n < 0$ für das zeitdiskrete Systems.

Lösung (2 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{2}$ P
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{2}$ P

$H_1(z) = \dfrac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{2-3z^{-2}}$	● Ja	○ Nein
$H_2(z) = \dfrac{(z^{-2}-\frac{3}{2})^3}{(1-3z)^4}$	● Ja	○ Nein
$H_3(z) = \dfrac{1-6z^{-2}}{z^{-2}-\frac{1}{5}z^{-1}}$	○ Ja	● Nein
$H_4(z) = \dfrac{(2-3z^{-1})^2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$	● Ja	○ Nein

b) Das Signal ist periodisch.

Lösung (2 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{2}$ P
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{2}$ P

$x_1[n] = \cos(2n), \quad n \in \mathbb{Z}$	○ Ja	● Nein
$x_2(t) = \cos(\frac{\pi}{7}t^2), \quad t \in \mathbb{R}$	○ Ja	● Nein
$x_3(t) = \sin(\sqrt{\pi}t), \quad t \in \mathbb{R}$	● Ja	○ Nein
$x_4[n] = \sin(\frac{\pi}{7}n^2), \quad n \in \mathbb{Z}$	● Ja	○ Nein

Betrachten Sie den in Abbildung 7 dargestellten Amplitudengang.

c) Markieren Sie die zugehörige Übertragungsfunktion.

Lösung (2 Punkte):

○ $A_1(j\omega) = \dfrac{2}{1+j\omega}$	○ $A_2(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$
● $A_3(j\omega) = \dfrac{2}{1+j\omega-\omega^2}$	○ $A_4(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega-\omega^2}$
○ $A_5(j\omega) = \dfrac{-2\omega^2}{1+j\omega-\omega^2}$	○ $A_6(j\omega) = \dfrac{-\omega^2}{1+j\omega-\omega^2}$

Markieren Sie die zutreffenden Aussagen in den folgenden Teilaufgaben. Es sind keine Begründungen notwendig. Vollständig ausgefüllte Kästchen werden als nicht markiert gewertet. Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können pro System nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

d) Bestimmen Sie die Eigenschaften der folgenden Systeme:

Lösung (6 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{3}$ P
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{3}$ P

i)

$$y_1(t) = \sin(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

ii)

$$y_2[n] = \sum_{k=0}^{n} kx[n-k], \quad n \in \mathbb{Z}$$

iii)

$$y_3(t) = \frac{3}{x(t)} + \int_{-t}^{a} x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R},\ a > 0$$

System	$y_1(t)$		$y_2[n]$		$y_3(t)$	
Eigenschaft	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
Das System ist zeitdiskret.		✓	✓			✓
Das System ist speicherfrei.	✓			✓		✓
Das System ist zeitinvariant.	✓			✓		✓
Das System ist linear.		✓	✓			✓
Das System ist kausal.	✓		✓			✓
Das System ist stabil.	✓			✓		✓

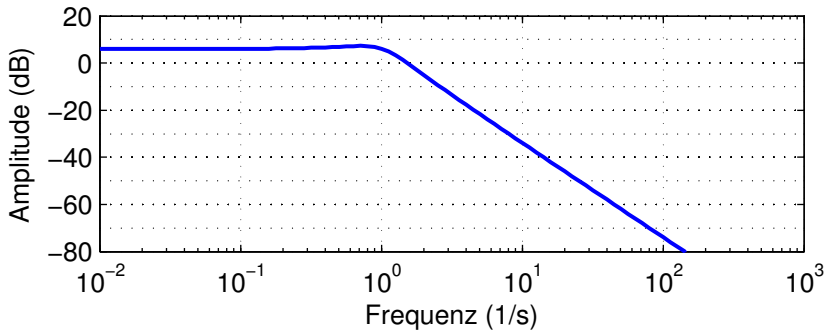
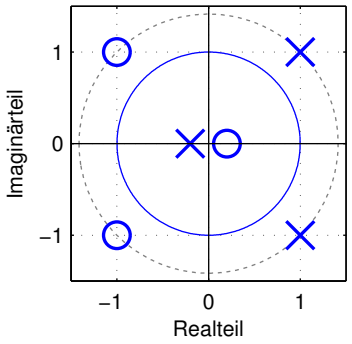
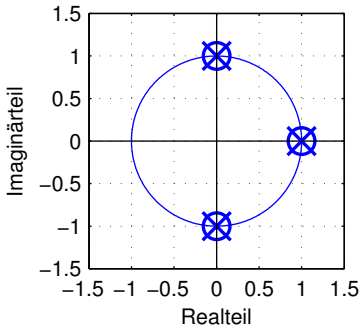


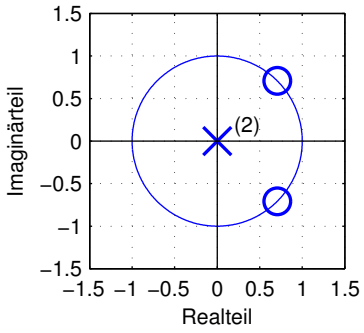
Abbildung 7: Amplitudengang



System I
ROC: $\frac{1}{5} < |z| < \sqrt{2}$



System II
ROC: $1 < |z| < \infty$



System III
ROC: $|z| > 0$

Abbildung 8: Pol-Nullstellen-Diagramme.

Abbildung 8 zeigt die Pol-Nullstellen-Diagramme von 3 reellen, zeitdiskreten LTI-Systemen. Pole sind mit "×", Nullstellen mit "○" gekennzeichnet.

e) Bestimmen Sie die zutreffenden Aussagen. Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können pro System nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden. Vollständig ausgefüllte Kästchen werden als nicht markiert gewertet.

Lösung (4 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{3}$ P
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{3}$ P

	stabil	kausal	ein Allpass	rekursiv	
System I ist	✓			✓	ja
		✓	✓		nein
System II ist		✓	✓	✓	ja
	✓				nein
System III ist	✓	✓			ja
			✓	✓	nein

f) Nehmen Sie an, dass System I weitere, nicht dargestellte, Pole besitzt. Geben Sie den Bereich der komplexen Ebene an, in dem sich diese Pole *nicht* befinden können, ohne mit den angegebenen Eigenschaften in Konflikt zu stehen.

Lösung (1 Punkte):
Pole können nicht im Konvergenzradius liegen, also ist der gesuchte Bereich $\{z||z| > \sqrt{2} \vee |z| < 1/5\}$