



Lösungsblatt zur Prüfung im Fach
Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Wintersemester 2020/2021

am 05.03.2021, 12:00 – 13:30 Uhr

Punktetabelle

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	insgesamt
Punkte	28	9	11	12	11	7	12	90
erreicht								

Notentabelle

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (28 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Welche Differentialgleichung ist linear? (1 Punkt)

☐ $\ddot{y} + 2\dot{y}y + y = 0$

☒ $\dot{x} - x = a^2u$

b) Lineare Systeme mit einem Pol in der rechten offenen Halbebene sind immer instabil. (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

c) Ein PT1-Glied ist schwingfähig. (1 Punkt)

☐ Wahr

☒ Falsch

d) Eine Reihenschaltung von asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen kann instabil sein. (1 Punkt)

☐ Wahr

☒ Falsch

e) Die Zustandsraumdarstellung eines SISO-Systems mit einem Zustand ist eindeutig. (1 Punkt)

☐ Wahr

☒ Falsch

- f) Schaubild 1 zeigt drei Sprungantworten eines unbekannten Systems. Die Sprunghöhe des Eingangssignals waren hierbei:

$$u_1(t) = \sigma(t), \quad u_2(t) = 2\sigma(t), \quad u_3(t) = u_1(t) + u_2(t).$$

Kann das unbekannte System linear sein? (1 Punkt)

☐ Ja

☒ Nein

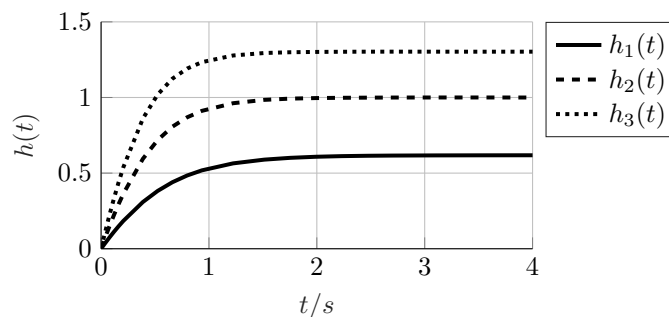


Abbildung 1: Sprungantworten h_1 , h_2 und h_3 des Systems

- g) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{s^2 - 1}{s^4 + 10s^3 + s^2 + 4s + 2}$$

☐ Ja

☒ Nein

- h) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \rightarrow \infty$ an! (2 Punkte)

$$G_2(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 1)(s - 1)} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_2(\omega) = \boxed{-90^\circ}$$

$$G_3(s) = \frac{(s + 1)(s - 4)(s + 100)}{(s - 5)(s + 10)(s - 100)(s + 500)} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_3(\omega) = \boxed{90^\circ}$$

- i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in dB/Dek der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \rightarrow \infty$ an! (2 Punkte)

$$G_2(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 1)(s - 1)} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_2(\omega)}{d\omega} = \boxed{-20 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

$$G_3(s) = \frac{(s + 1)(s - 4)(s + 100)}{(s - 5)(s + 10)(s - 100)(s + 500)} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_3(\omega)}{d\omega} = \boxed{-20 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

j) Gegeben seien folgende Signale $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$

$$y_1(t) = 2t^2, \quad y_2(t) = 0.5e^{-2t}, \quad y_3(t) = \sin(4t),$$

welche die Lösung ihrer zugrundeliegenden linearen zeitinvarianten Differentialgleichungen mit $u(t) = \delta(t)$ sind. Hierbei verschwinden die Anfangsbedingungen, d.h. es gilt $y_i(0) = \dot{y}_i(0) = \ddot{y}_i(0) = \dots = 0$.

(i) Welche Bezeichnungen für die Signale $y_i(t)$ sind korrekt? (1 Punkt)

- ☐ Sprungantwort ☒ Impulsantwort
☒ Gewichtsfunktion ☐ Übertragungsfunktion

(ii) Treffen Sie ein Aussage über die Stabilität der jeweiligen Systeme! (1.5 Punkte)

- System 1: ☐ asymptotisch stabil ☐ grenzstabil ☒ instabil
System 2: ☒ asymptotisch stabil ☐ grenzstabil ☐ instabil
System 3: ☐ asymptotisch stabil ☒ grenzstabil ☐ instabil

(iii) Wie viel Zustände haben die Systeme? (1.5 Punkte)

- System 1: ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3
System 2: ☐ 0 ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3
System 3: ☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3

(iv) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte der Ausgangssignale! (3 Punkte)

System 1:

$\frac{4}{s^3}$

System 2:

$\frac{0.5}{s+2}$

System 3:

$\frac{4}{s^2+16}$

(v) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung, die von den jeweiligen Funktionen y_i gelöst wird! (3 Punkte)

System 1:

$\ddot{y} = 4u$

System 2:

$\dot{y} + 2y = 0.5u$

System 3:

$\ddot{y} + 16y = 4u$

k) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$\sin(2\dot{y} - y^2) = \ln(u)$$

um die Ruhelagen $y_0 = \sqrt{\pi}$, $\dot{y}_0 = 0$, $u_0 = 1$! (2 Punkte)

☐ $-2\Delta\dot{y} + 2\Delta y = -\Delta u$

☐ $2\Delta\dot{y} + \sqrt{\pi}\Delta y = \Delta u$

☐ $-2\Delta\dot{y} - \sqrt{\pi}\Delta y = \Delta u$

☐ $2\Delta\dot{y} - 2\sqrt{\pi}\Delta y = -\Delta u$

☒ $-2\Delta\dot{y} + 2\sqrt{\pi}\Delta y = \Delta u$

☐ $-2\Delta\dot{y} - 2\Delta y = -\Delta u$

l) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Impulsantworten (Abbildung 2) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 3) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Impulsantwort	Bode-Diagramm
$G_1(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 6}$	C	D
$G_2(s) = \frac{s}{s^2 + \pi^2}$	A	C
$G_3(s) = \frac{2s - 25}{2s^2 + 4s + 50}$	B	B
$G_4(s) = \frac{15(s + 1)}{s(s + 3)(s + 5)}$	D	A

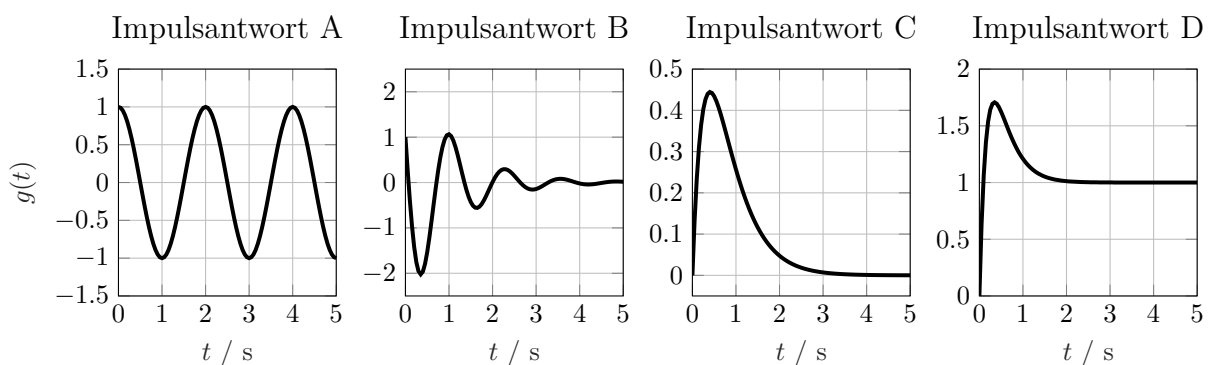


Abbildung 2: Impulsantworten A - D der Übertragungsfunktionen

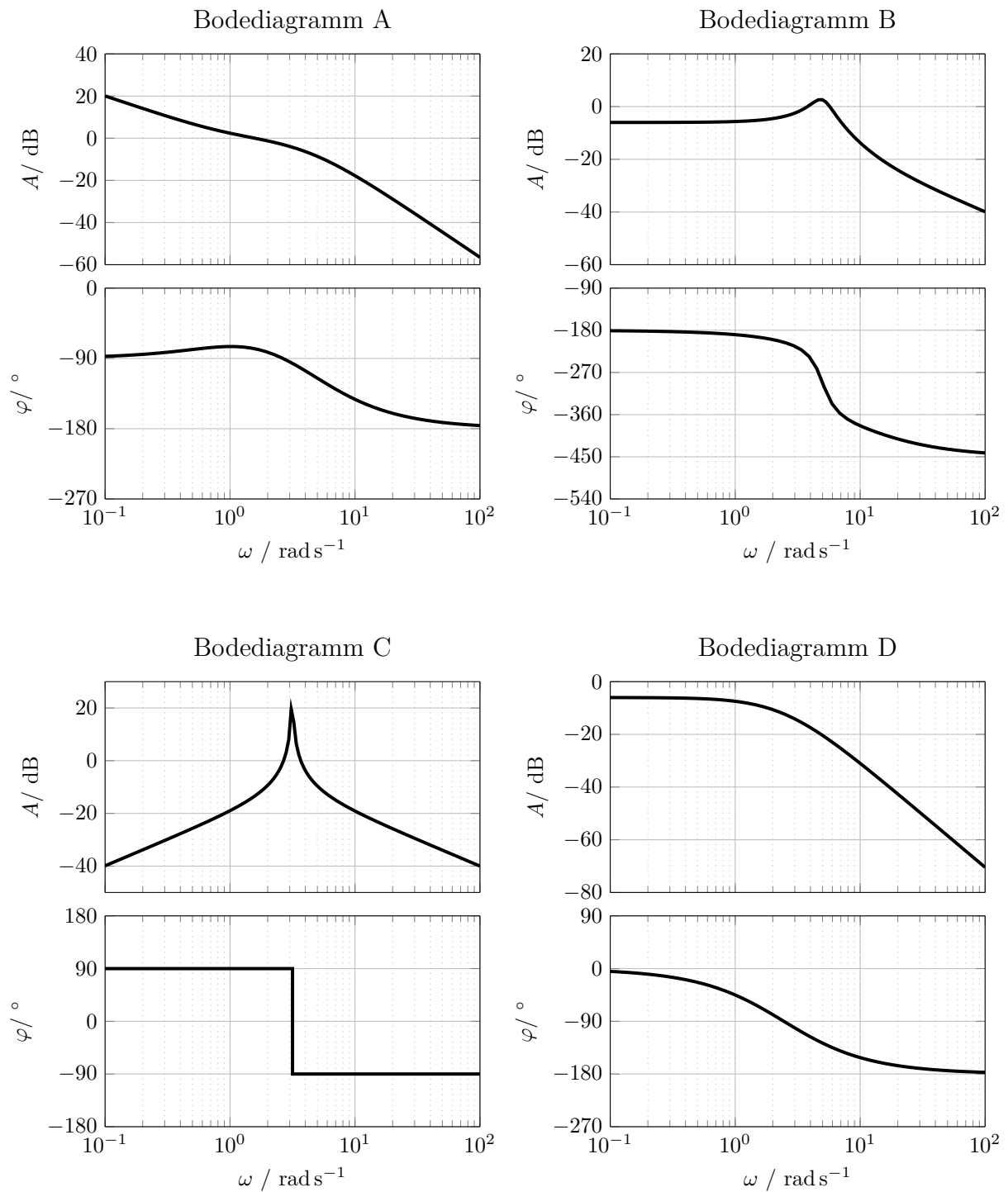


Abbildung 3: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingang $W(s)$ und Ausgang $Y(s)$. Es handelt sich hierbei um ein Zustandsregelkreis.

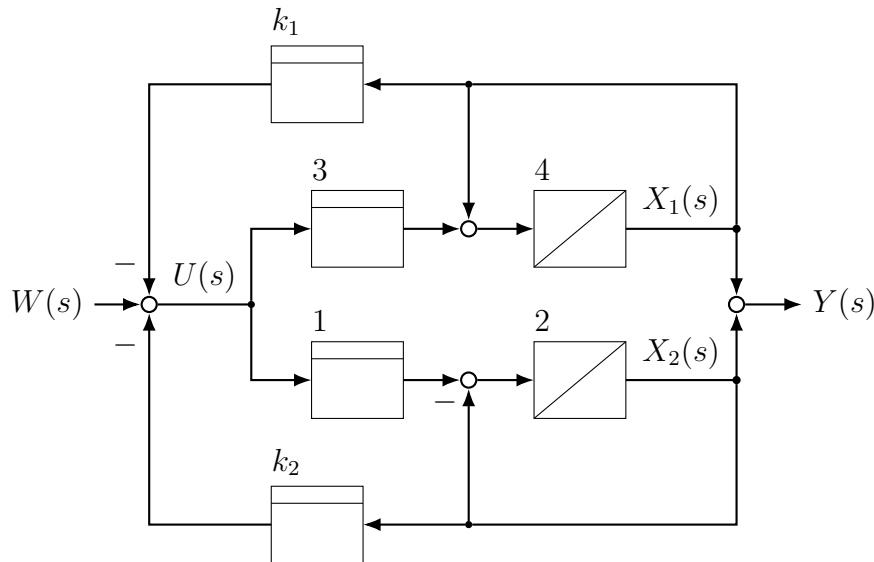


Abbildung 4: Blockschaltbild

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s) = X_1(s)/U(s)$, $G_2(s) = X_2(s)/U(s)$ und der Strecke $G_s(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen! (3 Punkte)
- Bestimmen Sie nun die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises $G(s) = Y(s)/W(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen! Vereinfachen Sie hierbei die Brüche soweit es geht. (3 Punkte)
- Für welche Werte von k_1 und k_2 ist das System asymptotisch stabil? Zeichnen Sie den Stabilitätsbereich in ein k_1 - k_2 -Koordinatensystem! (3 Punkte)

Lösung Aufgabe 2.

- Es lassen sich folgende Gleichungen aufstellen um die Übertragungsfunktionen berechnen zu können:

Übertragungsfunktion $G_1(s)$

$$X_1 = \frac{4}{s}(3U + X_1) \quad (1)$$

$$sX_1 = 12U + 4X_1 \quad (2)$$

$$(s - 4)X_1 = 12U \Rightarrow X_1 = \frac{12}{s - 4}U = G_1(s)U \quad (3)$$

Übertragungsfunktion $G_2(s)$

$$X_2 = \frac{2}{s}(U - X_2) \quad (4)$$

$$sX_2 = 2U - 2X_2 \quad (5)$$

$$(s+2)X_2 = 2U \Rightarrow X_2 = \frac{2}{s+2}U = G_2(s)U \quad (6)$$

Übertragungsfunktion $G_s(s)$

$$Y = X_1 + X_2 = G_1(s)U + G_2(s)U = \left(\frac{12}{s-4} + \frac{2}{s+2}\right)U \quad (7)$$

$$Y = \frac{14s+16}{(s-4)(s+2)}U = \frac{14s+16}{s^2-2s-8}U = G_s(s)U \quad (8)$$

b) Für den Eingang $U(s)$ gilt:

$$U = W - k_1X_1 - k_2X_2 \quad (9)$$

$$U = W - (k_1G_1(s) + k_2G_2(s)) \quad (10)$$

$$(1 + k_1G_1(s) + k_2G_2(s))U = W \quad (11)$$

$$U = \frac{1}{1 + k_1G_1(s) + k_2G_2(s)}W \quad (12)$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt

$$Y = G_s(s)U = \frac{G_s(s)}{1 + k_1G_1(s) + k_2G_2(s)}W \quad (13)$$

$$= \frac{\frac{14s+16}{(s-4)(s+2)}}{1 + k_1\frac{12}{s-4} + k_2\frac{2}{s+2}}W \quad (14)$$

$$= \frac{14s+16}{s^2-2s-8 + 12k_1(s+2) + 2k_2(s-4)}W \quad (15)$$

$$= \frac{14s+16}{\underbrace{s^2 + (12k_1 + 2k_2 - 2)s + 24k_1 - 8k_2 - 8}_{G(s)}}W \quad (16)$$

c) Für die asymptotische Stabilität wird das Hurwitz-Kriterium verwendet. Hierfür muss

$$12k_1 + 2k_2 - 2 > 0, \quad (17)$$

$$24k_1 - 8k_2 - 8 > 0, \quad (18)$$

gelten. Aufgelöst nach k_2 ergeben sich zwei Geradenungleichungen, welche sich in ein $k_1 - k_2$ -Koordinatensystem einzeichnen lassen.

$$k_2 > -6k_1 + 1 \quad (19)$$

$$k_2 < 3k_1 - 1 \quad (20)$$

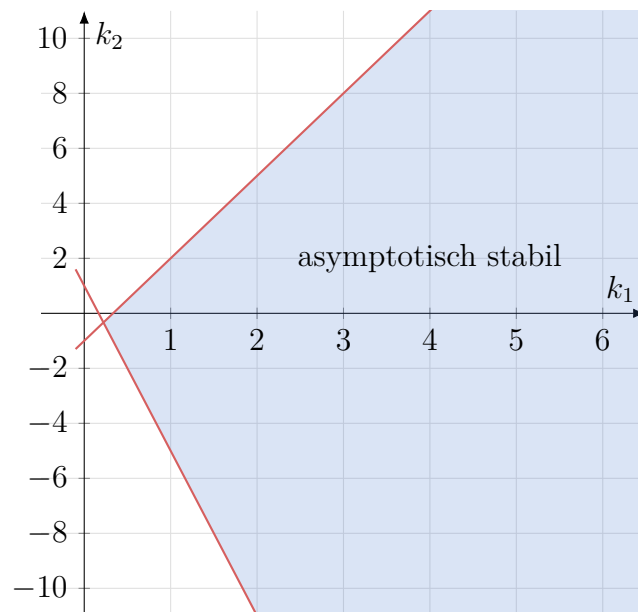


Abbildung 5: Stabilitätsbereich des geschlossenen Kreises $G(s)$

Aufgabe 3. (11 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_3 : \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, & \underline{x}_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

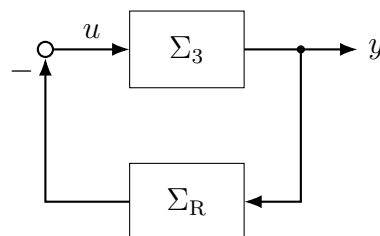
beschrieben.

- Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\underline{A}$ und beurteilen Sie die Stabilität des Systems Σ_3 ! (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! (2 Punkte)
- Geben Sie eine alternative Zustandsraumdarstellung des Systems Σ_3 an! (2 Punkte)

Das gegebene System wird nun mit einem Regler

$$\Sigma_R : \quad y_R = k \cdot u_R, \quad k \in \mathbb{R}$$

gemäß des unten stehenden Blockschaltbilds verschaltet. Es gilt also $u = -ky$.



- Schließen Sie den Kreis mit Hilfe des Regelgesetzes und leiten Sie damit die Zustandsraumdarstellung des Gesamtsystems her! (2 Punkte)

Hinweis: Das Produkt eines Spaltenvektors mit einem Zeilenvektor wird dyadisches Produkt genannt und berechnet sich zu:

$$a \otimes b = a \cdot b^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{bmatrix}$$

- Welche Bedingung muss für die Verstärkung k des Reglers Σ_R gelten, sodass der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist? (3 Punkte)

Lösung Aufgabe 3.

- a) Das charakteristische Polynom der Systemmatrix $\underline{A}$ lautet $s^2 + 3s - 10$. Die Eigenwerte der Matrix berechnen sich daraus zu $s_1 = -5$, $s_2 = 2$. Das System ist instabil, da ein Eigenwert einen Realteil > 0 hat.
- b) Die Übertragungsfunktion berechnet sich aus der Zustandsraumdarstellung durch

$$\begin{aligned} G(s) &= \underline{c}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{b} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 & -6 \\ 3 & s+7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-4)(s+7)+18} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+7 & 6 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s+4}{s^2+3s-10} \end{aligned}$$

- c) Anhand der Koeffizienten der Übertragungsfunktion lässt sich direkt eine Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform angeben:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, & \underline{x}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}. \end{aligned}$$

- d) Im geschlossenen Kreis gilt

$$u = -ky = -k\underline{c} \underline{x}$$

Die folgenden Schritte können entweder für die in der Aufgabenstellung gegebene Zustandsraumdarstellung oder für die in c) gefundene alternative Zustandsraumdarstellung durchgeführt werden.

Variante 1: Mit gegebener Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}
 \underline{\dot{x}} &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \underline{x} - k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \underline{x} \\
 &= \begin{bmatrix} 4-k & 6-k \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \underline{x} \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}.
 \end{aligned}$$

Variante 2: Mit Zustandsraumdarstellung aus c)

$$\begin{aligned}
 \underline{\dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} - k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) \underline{x} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10-4k & -3-k \end{bmatrix} \underline{x} \\
 y &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}.
 \end{aligned}$$

- e) Es wird zunächst das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises bestimmt. Auch hier wird die Vorgehensweise für beide Varianten aus dem vorigen Aufgabenteil aufgezeigt.

Variante 1

$$\begin{aligned}
 \det(\underline{A} - s\underline{I}) &= \det \left(\begin{bmatrix} 4-k-s & 6-k \\ -3 & -7-s \end{bmatrix} \right) \\
 &= (4-k-s)(-7-s) + 3(6-k) \\
 &= s^2 + (k+3)s - 10 + 4k.
 \end{aligned}$$

Variante 2

$$\begin{aligned}\det(\underline{A} - s\underline{I}) &= \det\left(\begin{bmatrix} -s & 1 \\ 10 - 4k & -3 - k - s \end{bmatrix}\right) \\ &= (-s)(-3 - k - s) - (10 - 4k) \\ &= s^2 + (k + 3)s - 10 + 4k.\end{aligned}$$

Beide Zustandsraumdarstellungen führen also auf dasselbe charakteristische Polynom. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Eigenwerte invariant bezüglich einer Koordinatentransformation sind.

Die Berechnung für den geschlossenen Kreis, insbesondere dessen Determinante, ist bei Variante 2 einfacher und übersichtlicher. Die Zustandsraumdarstellung in Variante 2 liegt in Regelungsnormalform vor, welche besonders gut für den Reglerentwurf geeignet ist.

Damit das vorliegende System 2. Ordnung asymptotisch stabil ist, muss für das charakteristische Polynom die Vorzeichenbedingung erfüllt sein. Dafür muss

1. $3 + k > 0 \quad \Rightarrow k > -3$
2. $-10 + 4k > 0 \quad \Rightarrow k > 2.5,$

also insgesamt $k > 2.5$.

Aufgabe 4. (12 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch die folgende lineare Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \alpha \ddot{y}(t) + \omega^2 \dot{y}(t) + \alpha \omega^2 y(t) = \ddot{u}(t) + \omega \dot{u}(t) + (\omega^2 + \alpha \omega) u(t)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = -1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = 0, \quad u(0) = \frac{1}{2}, \quad \dot{u}(0) = 0$$

und Parametern $\alpha, \omega > 0$ beschrieben.

Hinweis: Aufgabenteil d) kann unabhängig von den vorigen gelöst werden.

- a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an! (3 Punkte)
- b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an! (1 Punkt)
- c) Eine Nullstelle des Nenners der Übertragungsfunktion lautet $s = -\alpha$. Berechnen Sie die weiteren Nullstellen des Nenners! Welche Aussage über die Stabilität des Systems können Sie anhand dieses Ergebnisses treffen? Begründen Sie Ihre Aussage! (3 Punkte)
- d) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems! (4 Punkte)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil c) nicht lösen konnten, bestimmen Sie die Impulsantwort von

$$\hat{G}(s) = \frac{s^2 + (2\alpha + \omega)s + \alpha^2 - \omega\alpha + \omega^2}{((s + \alpha)^2 + \omega^2)(s - \alpha)}$$

- e) Beurteilen Sie anhand der Impulsantwort die Stabilität des Systems! (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 4.

- a) Die Laplace-Transformation angewandt auf beide Seiten der DGL ergibt

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) - s^2 y(0) + \alpha(s^2 Y(s) - s y(0)) + \omega^2(s Y(s) - y(0)) + \alpha \omega^2 Y(s) \\ = s^2 U(s) - s u(0) + \omega(s U(s) - u(0)) + (\omega^2 - \alpha \omega) U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s)(s^3 + \alpha s^2 + \omega^2 s + \alpha \omega^2) + s^2 + \alpha s + \omega^2 = U(s)(s^2 + \omega s + \omega^2 + \alpha \omega) - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\omega \end{aligned}$$

Damit gilt

$$Y(s) = \frac{s^2 + \omega s + \omega^2 + \alpha \omega}{s^3 + \alpha s^2 + \omega^2 s + \alpha \omega^2} U(s) + \frac{-s^2 - (\alpha + \frac{1}{2})s - \omega^2 - \frac{1}{2}\omega}{s^3 + \alpha s^2 + \omega^2 s + \alpha \omega^2}$$

b)

$$G(s) \frac{s^2 + \omega s + \omega^2 + \alpha\omega}{s^3 + \alpha s^2 + \omega^2 s + \alpha\omega^2}$$

c) Polynomdivision führt auf

$$s^3 + \alpha s^2 + \omega^2 s + \alpha\omega^2 = (s + \alpha)(s^2 + \omega^2).$$

Die beiden weiteren Nullstellen des Nenners sind also $s_{2,3} = \pm\omega i$. Damit hat die Übertragungsfunktion die asymptotisch stabile Polstelle $s_1 = -\alpha$ und die grenzstabile, konjugiert komplexe Polstelle $s_{2,3} = \pm\omega i$, woraus insgesamt Grenzstabilität folgt.

d) Mit Hilfe der zuvor berechneten Polstellen ist die Faktorisierung des Nenners bereits bekannt, womit eine Partialbruchzerlegung durchgeführt wird:

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + \omega s + (\omega^2 + \alpha\omega)}{(s + \alpha)(s^2 + \omega^2)} &= \frac{A}{s + \alpha} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2} \\ s^2 + \omega s + (\omega^2 + \alpha\omega) &= A(s^2 + \omega^2) + (Bs + C)(s + \alpha) \\ s^2 + \omega^2 + \omega s + \alpha\omega &= (A + B)s^2 + (B\alpha + C)s + (A\omega^2 + C\alpha) \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die drei Bedingungen

$$A + B = 1 \quad (1a)$$

$$B\alpha + C = \omega \quad (1b)$$

$$A\omega^2 + C\alpha = \omega^2 + \alpha\omega \quad (1c)$$

Gleichung (1c) legt den Ansatz $A = 1$, $C = \omega$ nahe. Durch Einsetzen von A und C in (1a) und (1b), sieht man, dass beide erfüllt sind für $B = 0$.

Die zerlegte Übertragungsfunktion lautet damit

$$G(s) = \frac{1}{s + \alpha} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Laplace-Rücktransformation mit Hilfe der Korrespondenzen führt auf

$$g(t) = e^{-\alpha t} + \sin(\omega t).$$

Ergebnis mit alternativer Übertragungsfunktion $\hat{G}(s)$:

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + (2\alpha + \omega)s + \alpha^2 - \omega\alpha + \omega^2}{((s + \alpha)^2 + \omega^2)(s + \alpha)} &= \frac{\hat{A}}{s - \alpha} + \frac{\hat{B}s + \hat{C}}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \\ s^2 + (2\alpha + \omega)s + \alpha^2 - \omega\alpha + \omega^2 &= \hat{A}((s + \alpha)^2 + \omega^2) + (\hat{B}s + \hat{C})(s - \alpha) \\ s^2 + (2\alpha + \omega)s + \alpha^2 - \omega\alpha + \omega^2 &= (\hat{A} + \hat{B})s^2 + (\hat{A}2\alpha - \hat{B}\alpha + \hat{C})s + (\hat{A}\alpha^2 + \hat{A}\omega^2 - \hat{C}\alpha) \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die drei Bedingungen

$$\hat{A} + \hat{B} = 1 \quad (2a)$$

$$\hat{A}2\alpha - \hat{B}\alpha + \hat{C} = 2\alpha + \omega \quad (2b)$$

$$\hat{A}\alpha^2 + \hat{A}\omega^2 - \hat{C}\alpha = \alpha^2 - \alpha\omega + \omega^2 \quad (2c)$$

Gleichung (2c) legt den Ansatz $A = 1$, $C = \omega$ nahe. Durch Einsetzen von A und C in (2a) und (2b), sieht man, dass beide erfüllt sind für $B = 0$.

Die zerlegte Übertragungsfunktion lautet damit

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{s - \alpha} + \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

Laplace-Rücktransformation mit Hilfe der Korrespondenzen führt auf

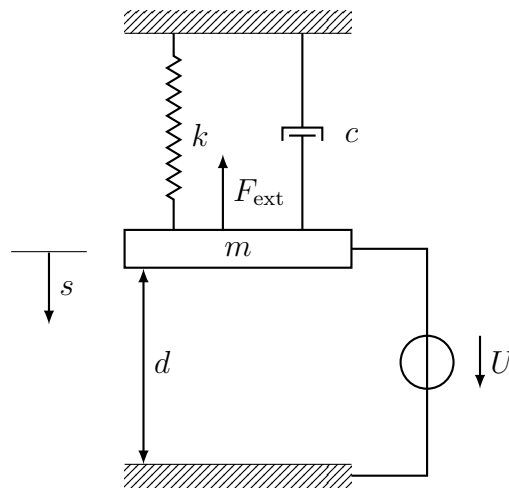
$$\hat{g}(t) = e^{\alpha t} + e^{-\alpha t} \sin(\omega t).$$

- e) Ergebnis mit ursprünglicher Übertragungsfunktion $G(s)$: Es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} = 0$, sodass dieser Term mit der Zeit abklingt. Der zweite Term beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude konstant bleibt. Das System ist damit grenzstabil, wie bereits in Aufgabenteil c) gezeigt wurde.

Ergebnis mit alternativer Übertragungsfunktion $\hat{G}(s)$: Beim zweiten Term ist $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} = 0$, sodass die Amplitude mit der Zeit abnimmt und die Sinus-Schwingung abklingt. Der erste Term $e^{\alpha t}$ ist jedoch instabil, sodass für das System $\hat{G}(s)$ Instabilität folgt.

Aufgabe 5. (11 Punkte)

Für einen adaptiven Mikrospiegel wird der Einsatz eines elektrostatischen Aktuators untersucht. Der Aktuator wird als ein Feder-Dämpfer-Masse System modelliert, dem außerdem eine zusätzliche externe Kraft F_{ext} aufgeprägt wird. Zwischen schwingender Masse m und einer fest fixierten Platte wird eine Spannung U angelegt. Aufgrund des elektrischen Feldes wirkt eine elektrostatische Kraft F_{el} auf die Masse, welche eine Verschiebung s der Masse erzeugt. Das elektrische Feld wird als homogen angenommen, womit die Gesetze eines Plattenkondensators gelten.



Skizze eines elektrostatischen Aktuators.

Für die elektrische Kraft gilt folgender Zusammenhang

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{C(s)U^2}{(d-s)}.$$

Sowohl die elektrische Kraft als auch die Kapazität C sind abhängig vom Abstand zwischen Masse und fixierter Platte. Der Abstand wird mit der angelegten Spannung verändert. Die Kapazität eines Plattenkondensator wird durch die Gleichung

$$C(s) = \epsilon_0 \frac{A}{(d-s)}$$

beschrieben. ϵ_0 ist eine Naturkonstante (Dielektrizitätskonstante) und A ist die Oberfläche der Masse. Weiterhin gilt

$$F_{\text{besch}} = m\ddot{s}, \quad F_{\text{feder}} = ks, \quad F_{\text{daempfer}} = c\dot{s}, \quad F_{\text{ext}} = ps^2,$$

mit der Konstanten $p > 0$. Für die weiteren Betrachtungen wird die Gewichtskraft vernachlässigt.

- a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Masse m mittels Impulssatz auf, indem Sie die gegebenen Kraftgesetze in den Impulssatz

$$F_{\text{beschl}} + F_{\text{feder}} + F_{\text{daempfer}} - F_{\text{el}} + F_{\text{ext}} = 0$$

einsetzen. (1 Punkt)

- b) Überführen Sie das System in eine Zustandsraumdarstellung mit geeigneten Zuständen $\underline{x}$ und dem Eingang $u = U$! (2 Punkte)

Nehmen Sie im Folgenden an, dass

$$m = 1, \quad k = 1, \quad d = 2, \quad c = 10 \quad \text{und} \quad \epsilon_0 A = 4$$

- c) Linearisieren Sie das System um die allgemeine Ruhelage $(\underline{x}_S, u_S)$ mit $x_S \geq 0$! (3 Punkte)
- d) Leiten Sie eine Bedingung für p her, damit lokale asymptotische Stabilität für die Ruhelage $(\underline{x}_S, u_S)$ gewährleistet ist! (3 Punkte)
- e) Es sei nun zusätzlich $p = 2$. Berechnen Sie die Ruhelagen $\underline{x}_S$ des nichtlinearen Systems aus Aufgabeteil b) für $u_S = 0$. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 5.

- a) Das Kräftegleichgewicht lautet: ((1 Punkt) für das Kräftegleichgewicht, (1 Punkt) für das Auflösen nach $\ddot{x}$ der Kraftgesetze, (1 Punkt) für hohen Leseaufwand)

$$F = -F_{\text{Feder}} - F_{\text{Daempfer}} + F_{\text{el}} - F_{\text{ext}}$$

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} - px^2 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A U^2}{(d-x)^2}$$

- b) Zustände einführen und ZRD aufstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{p}{m}x_1^2 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A u^2}{m(d-x_1)^2} \end{bmatrix} = f(x, U)$$

Anhand der Zustandsraumdarstellung kann nun das System um die Ruhelage (x_S, U_S) linearisiert werden. (1 Punkt) für das Aufstellen der Zustandsdarstellung, (2 Punkte) für die Linearisierung.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_S, U_S)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\epsilon_0}{m} \frac{AU_S^2}{(d-x_S)^3} - \frac{k}{m} - \frac{2p}{m} x_S & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial U} \right|_{(x_S, U_S)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\epsilon_0}{m} \frac{AU_S}{(d-x_S)^2} \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich das linearisierte System mit $\Delta x_1 = x_1 - x_{1,S}$, $\Delta x_2 = x_2 - x_{2,S}$ und $\Delta U = U - U_S$ zu

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} - \frac{2p}{m} x_S + \frac{\epsilon_0 AU_S^2}{m(d-x_S)^3} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\epsilon_0 AU_S}{m(d-x_S)^2} \end{bmatrix} \Delta U$$

- c) Lokale Stabilitätsbedingung durch Bestimmung der Eigenwerte der Systemmatrix A .
 1 Punkt für Ansatz, 1 Punkt für korrektes charakteristisches Polynom, 1 Punkt für korrektes Auflösen. Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{8}{(3-x_S)^3} - 2px_S - 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 + 2px_S - \frac{8}{(3-x_S)^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \left(2px_S - \frac{8}{(3-x_S)^3} + 1 \right)} < 0$$

$$\Rightarrow 2px_S - \frac{8}{(3-x_S)^3} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{1}{2x_S} \left[\frac{8}{(3-x_S)^3} - 1 \right]$$

- d) Berechnen des Polynoms 1 Punkt. Berechnung der Ruhelagen 1 Punkt. Einsetzen der gegebenen Parameter in Kräftesatz liefert

$$\ddot{x} = -x - \dot{x} - 2x^2$$

Für Ruhelage berechnen im stationären Bereich $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ liefert

$$0 = -\tilde{x}_S - 2\tilde{x}_S^2$$

Ausklammern führt zu

$$0 = -\tilde{x}_S(1 + 2\tilde{x}_S)$$

und damit $\tilde{x}_{1,S} = 0$ und $\tilde{x}_{2,S} = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 6. (7 Punkte)

Aus der Linearisierung eines mechanischen Systems ergibt sich die Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_6 : \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + u. \end{aligned}$$

- Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (5 Punkte)
- Berechnen Sie die Lösungen $\underline{x}(t)$ und $y(t)$ des Systems Σ_6 , die sich für die Anfangsbedingungen $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ergeben! Hierbei gelte $u(t) \equiv 0$. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 6.

- Berechnung über Laplace. Dazu

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{4} & s+1 \end{bmatrix}$$

Damit ist

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+1) + \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2} & \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2} \\ \frac{-\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{2})^2} & \frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2} \end{bmatrix}$$

mit $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2} \right\} = te^{-\frac{t}{2}}$ ergibt sich

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2} \right\} = e^{-\frac{t}{2}} + \frac{t}{2} e^{-\frac{t}{2}}$$

und

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2} \right\} = e^{-\frac{t}{2}} - \frac{t}{2} e^{-\frac{t}{2}}$$

und damit ist die Transitionsmatrix

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{t}{2} e^{-\frac{t}{2}} & te^{-\frac{t}{2}} \\ -\frac{1}{4} te^{-\frac{t}{2}} & e^{-\frac{t}{2}} - \frac{t}{2} e^{-\frac{t}{2}} \end{bmatrix}$$

- Wegen $u = 0$ ist die Lösung der Zustandsgleichung

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0.$$

Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingung und der berechneten Transitionsmatrix liefert

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{3}{2}te^{-\frac{t}{2}} \\ -\frac{3}{4}te^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \end{bmatrix}$$

Der zugehörige Ausgangsverlauf ergibt sich durch Anwendung der gegebenen Ausgleichsgleichung. Da $u = 0$ spielt der Durchgriff keine Rolle, also

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = e^{-\frac{t}{2}} + \frac{3}{2}te^{-\frac{t}{2}}.$$

Aufgabe 7. (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = \frac{81 \left(\frac{1}{9}s^2 - 1 \right)}{s^4 - \frac{15}{2}s^3 + 77s^2 + \frac{81}{2}s}.$$

- Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! (3 Punkte)
Hinweis: Die Übertragungsfunktion besitzt eine Polstelle bei $s = -\frac{1}{2}$
- Berechnen Sie Frequenzgang von $G_7(s)$ und ermitteln Sie daraus den Amplituden- und Phasengang des Systems! (5 Punkte)
- Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (4 Punkte)

Lösung Aufgabe 7.

- Die Faktorisierung der Übertragungsfunktion lautet:

$$9 \cdot s^{-1} \cdot \frac{(s-3)(s+3)}{(s+\frac{1}{2})(s^2-8s+81)} \quad (3)$$

Hierbei wurde mittels Polynomdivision der Nenner faktorisiert:

$$\begin{array}{r} s^3 - \frac{15}{2}s^2 + 77s + \frac{81}{2} = \left(s + \frac{1}{2}\right) (s^2 - 8s + 81) \\ - s^3 - \frac{1}{2}s^2 \\ \hline - 8s^2 + 77s \\ \quad 8s^2 + 4s \\ \hline \quad \quad 81s + \frac{81}{2} \\ \quad \quad - 81s - \frac{81}{2} \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

- Mit $s = j\omega$ ergibt sich der Frequenzgang

$$G(j\omega) = 9 \frac{(j\omega+3)(j\omega-3)}{j\omega(j\omega+\frac{1}{2})(81-\omega^2-8j\omega)} = -9 \frac{\omega^2+9}{j\omega(j\omega+\frac{1}{2})(81-\omega^2-8j\omega)}, \quad (4)$$

der Amplitudengang

$$A_{dB}(\omega) = 9 \frac{\omega^2+9}{\omega \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4}} \sqrt{(81-\omega^2)^2 + 8\omega^2}} \quad (5)$$

und der Phasengang

$$\varphi(\omega) = -\pi + \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{-3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \arctan(2\omega) + \psi(\omega)\right) \quad (6)$$

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-8\omega}{81 - \omega^2}\right) & \omega < 9 \\ \pi + \arctan\left(\frac{-8\omega}{81 - \omega^2}\right) & \omega \geq 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{3\pi}{2} - \arctan(2\omega) - \psi(\omega) \quad (7)$$

c) Für das Zeichnen werden folgende Werte benötigt

$$c = 9, \quad r = -1, \quad \omega_{min} = \frac{1}{2}, \quad G^*(0) = -\frac{2}{9}$$

$$A_{dB}(\omega_{min}) = 20 \cdot \log \left(\left| -9\frac{2}{9} \right| \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right) = 20 \cdot \log(4) = 12.04 \text{ dB} \quad (8)$$

$$c \cdot G^*(0) = -9 \cdot \frac{2}{9} = -2 < 0 \Rightarrow \varphi(0) = -180^\circ + (-1) \cdot 90^\circ = -270^\circ \quad (9)$$

