



UNIVERSITÄT STUTTGART
Institut für Systemdynamik

Prüfung im Fach **Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik**

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer

Sommersemester 2021

am 19.08.2021, 16:00 – 17:30 Uhr

Bitte tragen Sie auf diesem Doppelblatt Ihren Namen, Ihre Fachrichtung und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Lösungsblätter mit Ihrem Namen und legen Sie diese Blätter in das Doppelblatt ein.

Name, Vorname: _____

Studiengang: _____ Matr.-Nr: _____

Zugelassen sind alle nicht-elektronischen Hilfsmittel sowie ein nicht-vernetzbarer nicht-grafikfähiger Taschenrechner. Zugelassene Taschenrechner sind in einer Liste vermerkt, die vorab vom Institut für Systemdynamik zur Verfügung gestellt wurde.

Zur Kenntnis genommen: _____ (Unterschrift)

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	29	
2	9	
3	8	
4	10	
5	13	
6	10	
7	11	
insgesamt	90	

Korrektur: _____

Prüfer: _____

Einsicht: _____

Note: _____

Matrikelnummer: _____

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

- a) Ist die Differentialgleichung $\ddot{y} + \dot{y} = \ddot{u} + \dot{u}$ linear? (1 Punkt)
- ☐ Ja
- ☐ Nein
- b) Ein PT1-Glied kann durch die Differentialgleichung $\ddot{y} + \dot{y} = u$ beschrieben werden. (1 Punkt)
- ☐ Wahr
- ☐ Falsch
- c) Bei welchen Verschaltungen können die Pole des Gesamtsystems von den Polen der Einzelsysteme abweichen? (1 Punkt)
- ☐ Reihenschaltung
- ☐ Parallelschaltung
- ☐ Rückführung
- d) Die Systeme mit Übertragungsfunktion $G(s)$ und $\tilde{G}(s) = 10 \cdot G(s)$ haben identische Phasengänge. (1 Punkt)
- ☐ Wahr
- ☐ Falsch
- e) Wenn ein lineares, zeitinvariantes System mit dem Eingangssignal $u_1(t)$ aus Abbildung 1 angeregt wird, konvergiert der Systemausgang y_1 gegen den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 2$. Gegen welchen Grenzwert konvergiert der Systemausgang $y_2(t)$ für das Eingangssignal $u_2(t)$ aus Abbildung 1? (2 Punkte)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) =$$

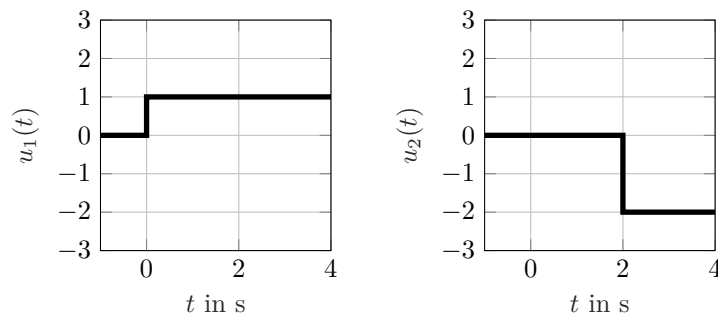


Abbildung 1: Eingangssignale $u_i(t)$ $i = 1, 2$

- f) Eine mögliche Ausgangsmatrix eines Systems mit 3 Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$) und einem skalaren Ausgang ($y \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$) ist gegeben durch (1 Punkt)

☐ $\underline{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

☐ $\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- g) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{s^2 + 1}{2s^3 + 4s^2 + 8s + 10} \cdot \frac{5}{s + 1}$$

- ☐ Ja
- ☐ Nein

- h) Welche Aussage(n) über die Impulsantwort der Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{8s^3 + s^2 + 17s + 3}{4s^4 + s^2 + s}$$

trifft / treffen zu? (2 Punkte)

- ☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = 3$
- ☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = 17$
- ☐ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 2$
- ☐ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 0$

- i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in dB/Dek des Frequenzgangs der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an! (1 Punkt)

$$G_3(s) = \frac{-1}{s^3 - 13s^2 + 26s + 40} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_3(\omega)}{d\omega} = \boxed{}$$

- j) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel des Phasengangs $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an!

Hinweis: Ein Pol der Übertragungsfunktion liegt bei $s_1 = -1$. (3 Punkte)

$$G_3(s) = \frac{-1}{s^3 - 13s^2 + 26s + 40} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_3(\omega) = \boxed{}$$

- k) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = t + \cos(t)$, das mit dem Eingang $u(t) = t$, $t \geq 0$ angeregt wird! (3 Punkte)

$$\begin{aligned} \square y(t) &= \frac{1}{6}t^3 + 2\sin(t)t - \cos(t) & \square y(t) &= \frac{5}{6}t^3 + 2\sin(t)t - \cos(t) \\ \square y(t) &= \frac{1}{6}t^3 - \cos(t) + 1 & \square y(t) &= \frac{5}{6}t^3 - \cos(t) + 1 \\ \square y(t) &= \frac{1}{6}t^3 + 2\sin(t)t - \cos(t) + 1 & \square y(t) &= \frac{5}{6}t^3 + 2\sin(t)t - \cos(t) + 1 \end{aligned}$$

- l) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \cos(2\dot{y} - y) = \ln(u)$$

um die Ruhelage $y_S = -\frac{\pi}{2}$, $u_S = 1$! (3 Punkte)

$$\begin{aligned} \square \Delta \ddot{y} - 2\Delta \dot{y} + \Delta y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u & \square \Delta \ddot{y} - 2\Delta \dot{y} + \Delta y &= \Delta u \\ \square \Delta \ddot{y} + \Delta y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u & \square \Delta \ddot{y} + \Delta y &= \Delta u \\ \square \Delta \ddot{y} - 2\Delta \dot{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u & \square \Delta \ddot{y} - 2\Delta \dot{y} &= \Delta u \end{aligned}$$

- m) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{5}{(s+3)(s+2)}.$$

- (i) Spalten Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in ihre einzelnen Moden auf! (2 Punkte)

$$G(s) = \frac{\boxed{}}{s+2} + \frac{\boxed{}}{s+3}$$

- (ii) Wählen Sie Zustandsgrößen $X_i(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$, die zu einer modalen Zustandsraumdarstellung für $G(s)$ führen! (2 Punkte)

$$X_1(s) = \boxed{}$$

$$X_2(s) = \boxed{}$$

- n) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 2) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 3) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Sprungantwort	Bode-Diagramm
$G_1(s) = \frac{s+21}{s^2+6s+7}e^{-2s}$		
$G_2(s) = \frac{s+12}{(s+1)(s+2)^2}$		
$G_3(s) = \frac{s+10}{s^2+4s-5}$		
$G_4(s) = \frac{3s^2}{s^2+10s+1}$		

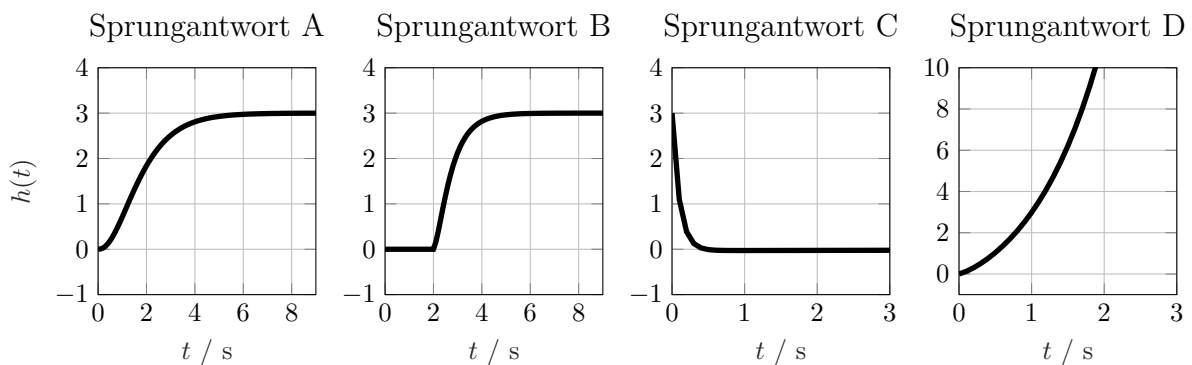


Abbildung 2: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

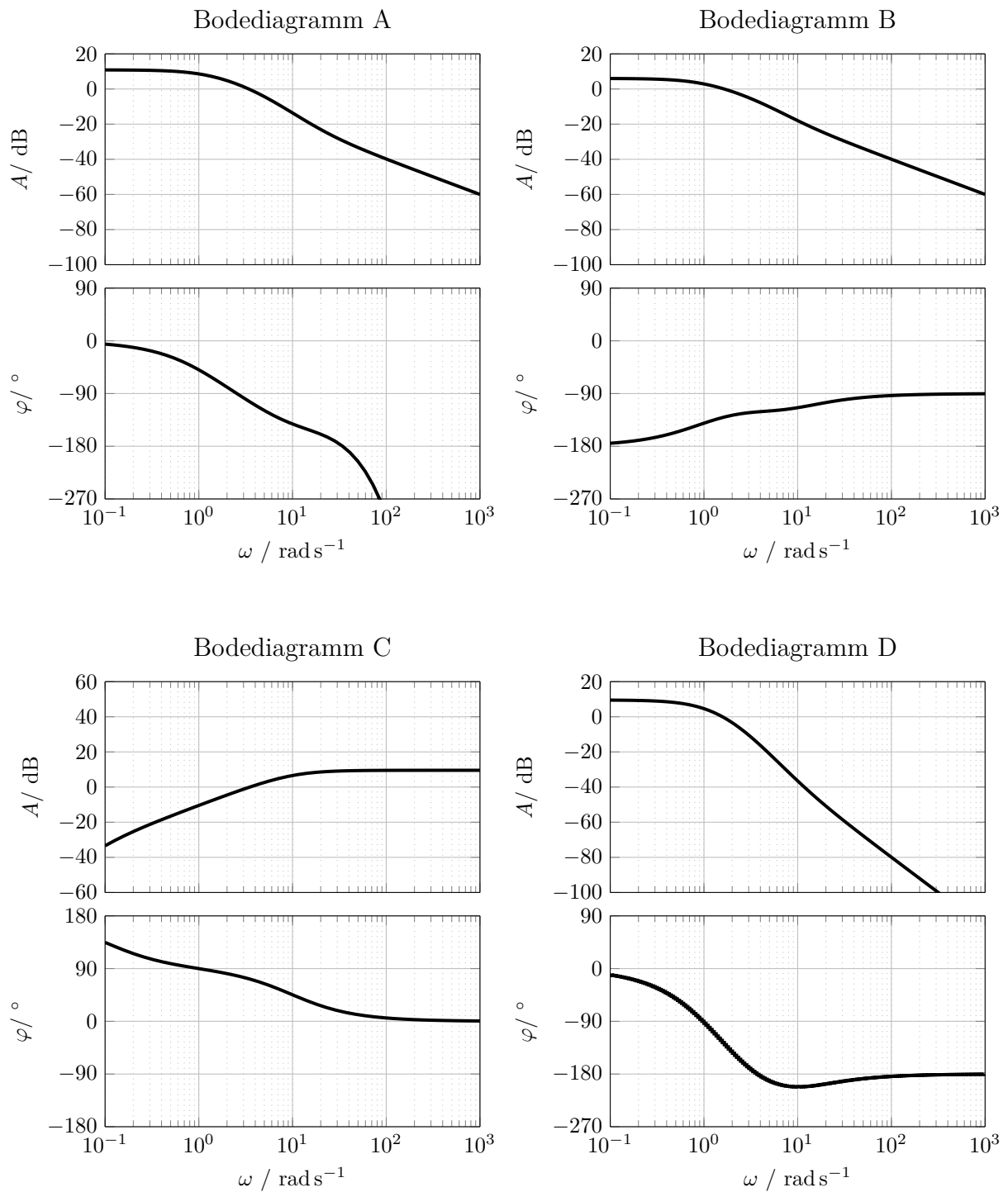


Abbildung 3: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingang $U(s)$ und Ausgang $Y(s)$.

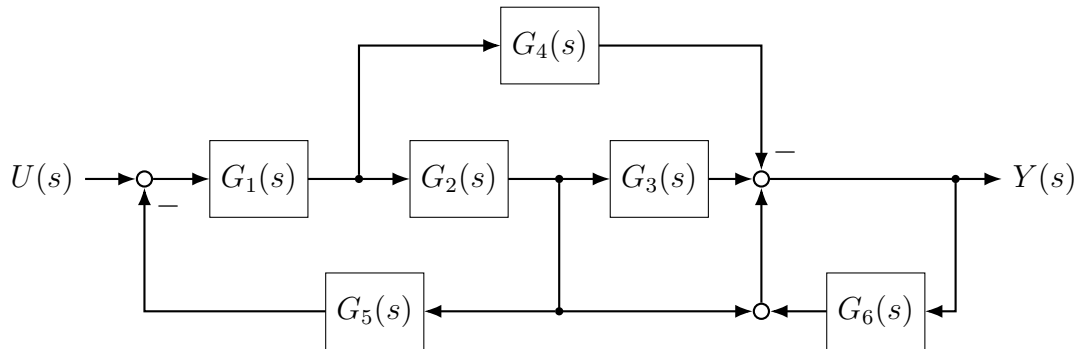


Abbildung 4: Blockschaltbild

Hinweis: Aufgabenteile b) und c) können unabhängig von a) bearbeitet werden.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen! (4 Punkte)
- Im Folgenden gilt

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+a)(s+2)}, \quad G_2(s) = G_4(s) = \frac{1}{s+2}, \quad G_3(s) = G_5(s) = 1, \quad G_6(s) = 0$$

für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Parameter ist. Setzen Sie die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme in die Übertragungsfunktion $G(s)$ der Strecke ein und vereinfachen Sie hierbei die Brüche so weit es geht! (2 Punkte)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil a) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie mit folgender Übertragungsfunktion weiter:

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_5}{(1 + G_1 G_2 G_3)(1 + G_6)}$$

- Für welche Werte von a ist das System asymptotisch stabil? (3 Punkte)

Aufgabe 3. (8 Punkte)

Die Impulsantwort eines linearen, zeitinvarianten Systems lautet

$$g(t) = e^{-7t} - \frac{3}{4}e^{-t} \cos(t) - \frac{1}{4}e^{-t} \sin(t), \quad t \geq 0$$

- a) Beurteilen Sie anhand der Impulsantwort die Stabilität des Systems! Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! Geben Sie diese ohne Doppelbrüche und auf einen Hauptnenner gebracht an! (3 Punkte)
- c) Beurteilen Sie anhand der Übertragungsfunktion die Stabilität des Systems! Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)
- d) Gegen welchen Wert konvergiert die Sprungantwort des Systems für $t \rightarrow \infty$? (1 Punkt)
- e) Geben Sie eine Differentialgleichung des Systems an! Die unbekannten Anfangsbedingungen können dabei zu Null gesetzt werden. (2 Punkte)

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch die folgende lineare Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = u(t - T_t)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = -1, \dot{y}(0) = 1,$$

und dem Parameter $T_t > 0$ beschrieben.

- Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ und dem Parameter T_t an! (3 Punkte)
- Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an und berechnen Sie anschließend die Impulsantwort $g(t)$ in Abhängigkeit von T_t ! (3 Punkte)

Im Folgenden wird die im System vorhandene Totzeit durch eine Padé-Approximation 1. Ordnung

$$e^{as} \approx G_P(s) = \frac{1 + \frac{a}{2}s}{1 - \frac{a}{2}s}$$

approximiert.

- Geben Sie die Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$ mit approximierter Totzeit $G_P(s)$ an! (1 Punkt)
- Nun soll der Einfluss der Approximation auf die Impulsantwort des Systems untersucht werden. Berechnen Sie die Impulsantwort $\tilde{g}(t)$ des Systems $\tilde{G}(s)$ mit $T_t = 2$! (3 Punkte)

Aufgabe 5. (13 Punkte)

Gegeben sei das folgende System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_1 : \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Hinweis: Die Aufgabenteile c) und d) können unabhängig von den anderen bearbeitet werden.

- a) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (4 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Lösung $\underline{x}(t)$ des Systems für einen konstanten Eingang $u(t) = u_0$, $t \geq 0$! (3 Punkte)
- c) Geben Sie zunächst in Abhängigkeit einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ (d.h. ohne die obigen Zahlenwerte einzusetzen) mit zwei Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$) die Berechnungsvorschrift an, mit der die Transformationsmatrix für die Transformation auf Regelungsnormalform bestimmt werden kann!
Setzen Sie dann das gegebene $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ ein! Welches Problem tritt dabei auf, sodass keine reguläre Transformation berechnet werden kann? (2 Punkte)
- d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems! (2 Punkte)
- e) Geben Sie zu der Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil d) eine Zustandsraumdarstellung an! Vergleichen Sie diese mit der ursprünglichen Zustandsraumdarstellung Σ_1 . Was fällt Ihnen auf? (2 Punkte)

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Aufgrund des unbeständigen Sommerwetters dieses Jahr wird eine Grillparty nach drinnen verlegt und stattdessen Grillgut im Backofen zubereitet.

Der Ofen wurde bereits auf eine konstante Temperatur $T_U = \text{const.}$ vorgeheizt. Das Grillgut darin gart bereits und hat eine Start-Temperatur $T(t = 0) = T_0$. Durch Konvektion entsteht ein Wärmestrom

$$\dot{Q}_K = c_1 A (T_U - T)$$

in das Grillgut hinein. Dabei ist A die Oberfläche des Grillguts und c_1 eine Konstante.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Grill-Funktion angeschaltet, die die Seitenwände des Ofens erwärmt, sodass durch Wärmestrahlung ein zusätzlicher Wärmestrom

$$\dot{Q}_S = \epsilon \sigma A (T_G^4 - T^4)$$

in das Grillgut hinein entsteht. Dabei bezeichnet die Konstante ϵ den Emissionsgrad des Grillguts und σ eine Naturkonstante. Zur Modellierung des Prozesses wird die Enthalpie

$$H = m c_p T$$

des Grillguts betrachtet, mit spezifischer Wärmekapazität $c_p = \text{const.}$, Masse $m = \text{const.}$, und Temperatur T des Grillguts.

- a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Temperatur T des Grillguts auf, indem Sie die gegebenen Wärmeströme sowie die Ableitung der Enthalpie in die Enthalpiebilanz

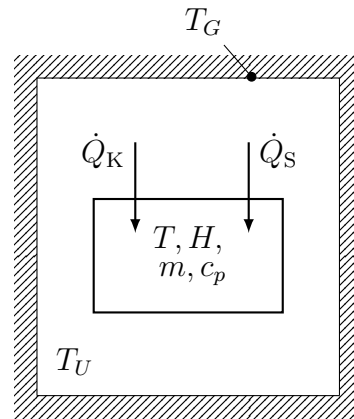
$$\dot{H} = \sum_i \dot{Q}_i$$

einsetzen! (1 Punkt)

Auch das Aufheizen des Grills wird durch eine Differentialgleichung beschrieben

$$\vartheta^2 \ddot{T}_G + \frac{7}{5} \vartheta \dot{T}_G + T_G = \alpha u, \quad T_G(t = 0) = \dot{T}_G(t = 0) = 0,$$

worin T_G die Temperatur des Grills ist, u die vom Benutzer vorgegebene Eingangsspannung, und α, ϑ Konstanten > 0 .



- b) Stellen Sie eine nichtlineare Zustandsraumdarstellung für das Gesamtsystem auf! Verwenden Sie dazu den Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix} T_U - T, & T_G, & \dot{T}_G \end{bmatrix}$, den Eingang u , und den Ausgang $y = T_G$. Geben Sie auch die Anfangsbedingung an. (4 Punkte)
- c) Linearisieren Sie das System um die allgemeine Ruhelage $\underline{x}_S, u_S$! (3 Punkte)
- d) Bestimmen Sie die Eingangsspannung u_0 , für die die Ruhelage $x_{1,0} = 0$ erreicht wird! (2 Punkte)

Aufgabe 7. (11 Punkte)

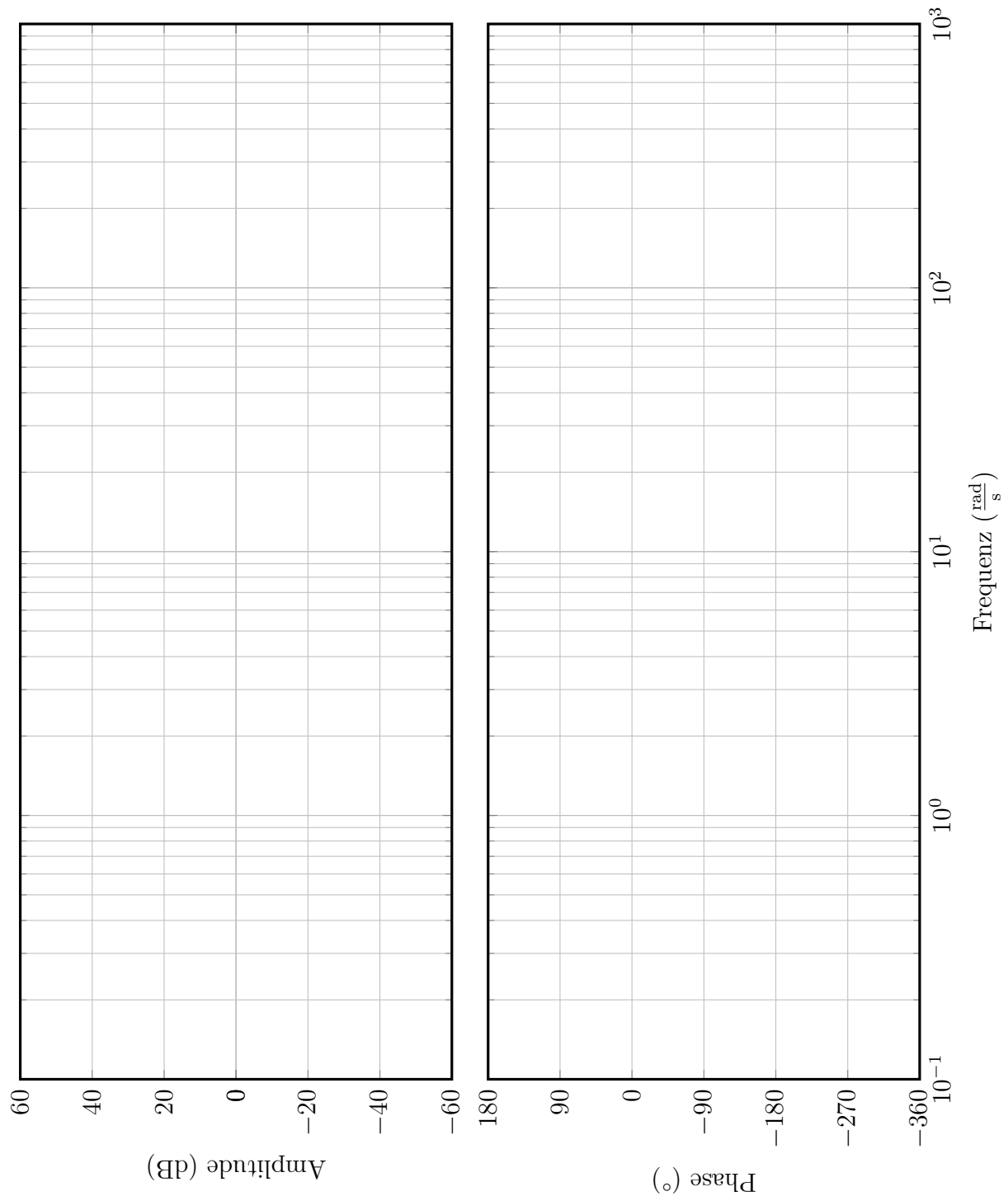
Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\frac{7}{5}s^2 + 7s + 140}{2s^3 + 11s^2 + 5s} .$$

- a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplituden- und Phasengang des Systems! (4 Punkte)
- c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (5 Punkte)

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 15 und 16 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 16 bewertet.



Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 15 und 16 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 16 bewertet.

