



Lösungsblatt zur Prüfung im Fach
Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Sommersemester 2021

am 19.08.2021, 16:00 – 17:30 Uhr

Punktetabelle

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	insgesamt
Punkte	29	9	8	10	13	10	11	90
erreicht								

Notentabelle

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (29 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

- a) Ist die Differentialgleichung $\ddot{y} + \dot{y} = \ddot{u} + \ddot{u} + \dot{u}$ linear? (1 Punkt)

☒ Ja

☐ Nein

- b) Ein PT1-Glied kann durch die Differentialgleichung $\ddot{y} + \dot{y} = u$ beschrieben werden. (1 Punkt)

☐ Wahr

☒ Falsch

- c) Bei welchen Verschaltungen können die Pole des Gesamtsystems von den Polen der Einzelsysteme abweichen? (1 Punkt)

☐ Reihenschaltung

☐ Parallelschaltung

☒ Rückführung

- d) Die Systeme mit Übertragungsfunktion $G(s)$ und $\tilde{G}(s) = 10 \cdot G(s)$ haben identische Phasengänge. (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

- e) Wenn ein lineares, zeitinvariantes System mit dem Eingangssignal $u_1(t)$ aus Abbildung 1 angeregt wird, konvergiert der Systemausgang y_1 gegen den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 2$. Gegen welchen Grenzwert konvergiert der Systemausgang $y_2(t)$ für das Eingangssignal $u_2(t)$ aus Abbildung 1? (2 Punkte)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \boxed{-4}$$

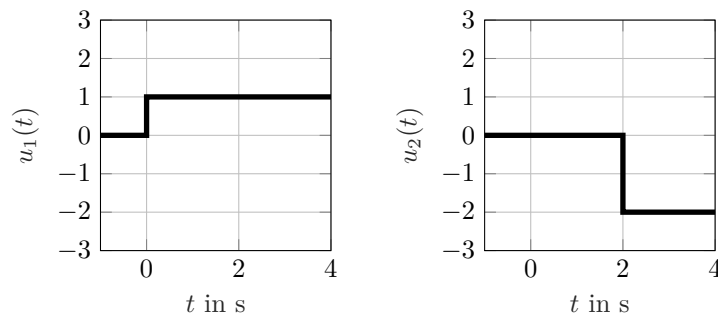


Abbildung 1: Eingangssignale $u_i(t)$ $i = 1, 2$

- f) Eine mögliche Ausgangsmatrix eines Systems mit 3 Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$) und einem skalaren Ausgang ($y \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$) ist gegeben durch (1 Punkt)

☐ $\underline{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

☒ $\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- g) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{s^2 + 1}{2s^3 + 4s^2 + 8s + 10} \cdot \frac{5}{s + 1}$$

☒ Ja

☐ Nein

- h) Welche Aussage(n) über die Impulsantwort der Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{8s^3 + s^2 + 17s + 3}{4s^4 + s^2 + s}$$

trifft / treffen zu? (2 Punkte)

☒ $\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = 3$

☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = 17$

☒ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 2$

☐ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 0$

- i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in dB/Dek des Frequenzgangs der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an! (1 Punkt)

$$G_3(s) = \frac{-1}{s^3 - 13s^2 + 26s + 40} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_3(\omega)}{d\omega} = \boxed{-60 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

- j) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel des Phasengangs $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an!

Hinweis: Ein Pol der Übertragungsfunktion liegt bei $s_1 = -1$. (3 Punkte)

$$G_3(s) = \frac{-1}{s^3 - 13s^2 + 26s + 40} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_3(\omega) = \boxed{-90^\circ}$$

- k) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = t + \cos(t)$, das mit dem Eingang $u(t) = t$, $t \geq 0$ angeregt wird! (3 Punkte)

$$\begin{aligned} \square y(t) &= \frac{1}{6}t^3 + 2\sin(t)t - \cos(t) & \square y(t) &= \frac{5}{6}t^3 + 2\sin(t)t - \cos(t) \\ \boxtimes y(t) &= \frac{1}{6}t^3 - \cos(t) + 1 & \square y(t) &= \frac{5}{6}t^3 - \cos(t) + 1 \\ \square y(t) &= \frac{1}{6}t^3 + 2\sin(t)t - \cos(t) + 1 & \square y(t) &= \frac{5}{6}t^3 + 2\sin(t)t - \cos(t) + 1 \end{aligned}$$

- l) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \cos(2\dot{y} - y) = \ln(u)$$

um die Ruhelage $y_S = -\frac{\pi}{2}$, $u_S = 1$! (3 Punkte)

$$\begin{aligned} \square \Delta \ddot{y} - 2\Delta \dot{y} + \Delta y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u & \boxtimes \Delta \ddot{y} - 2\Delta \dot{y} + \Delta y &= \Delta u \\ \square \Delta \ddot{y} + \Delta y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u & \square \Delta \ddot{y} + \Delta y &= \Delta u \\ \square \Delta \ddot{y} - 2\Delta \dot{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u & \square \Delta \ddot{y} - 2\Delta \dot{y} &= \Delta u \end{aligned}$$

- m) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{5}{(s+3)(s+2)}.$$

- (i) Spalten Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in ihre einzelnen Moden auf! (2 Punkte)

$$G(s) = \frac{\boxed{5}}{s+2} + \frac{\boxed{-5}}{s+3}$$

- (ii) Wählen Sie Zustandsgrößen $X_i(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$, die zu einer modalen Zustandsraumdarstellung für $G(s)$ führen! (2 Punkte)

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+3}U(s)$$

- n) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 2) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 3) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Sprungantwort	Bode-Diagramm
$G_1(s) = \frac{s+21}{s^2+6s+7}e^{-2s}$	<i>B</i>	<i>A</i>
$G_2(s) = \frac{s+12}{(s+1)(s+2)^2}$	<i>A</i>	<i>D</i>
$G_3(s) = \frac{s+10}{s^2+4s-5}$	<i>D</i>	<i>B</i>
$G_4(s) = \frac{3s^2}{s^2+10s+1}$	<i>C</i>	<i>C</i>

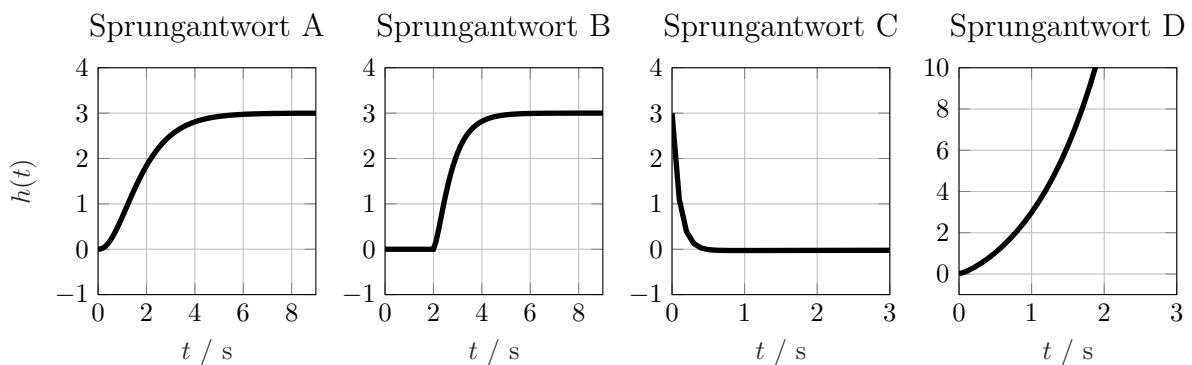


Abbildung 2: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

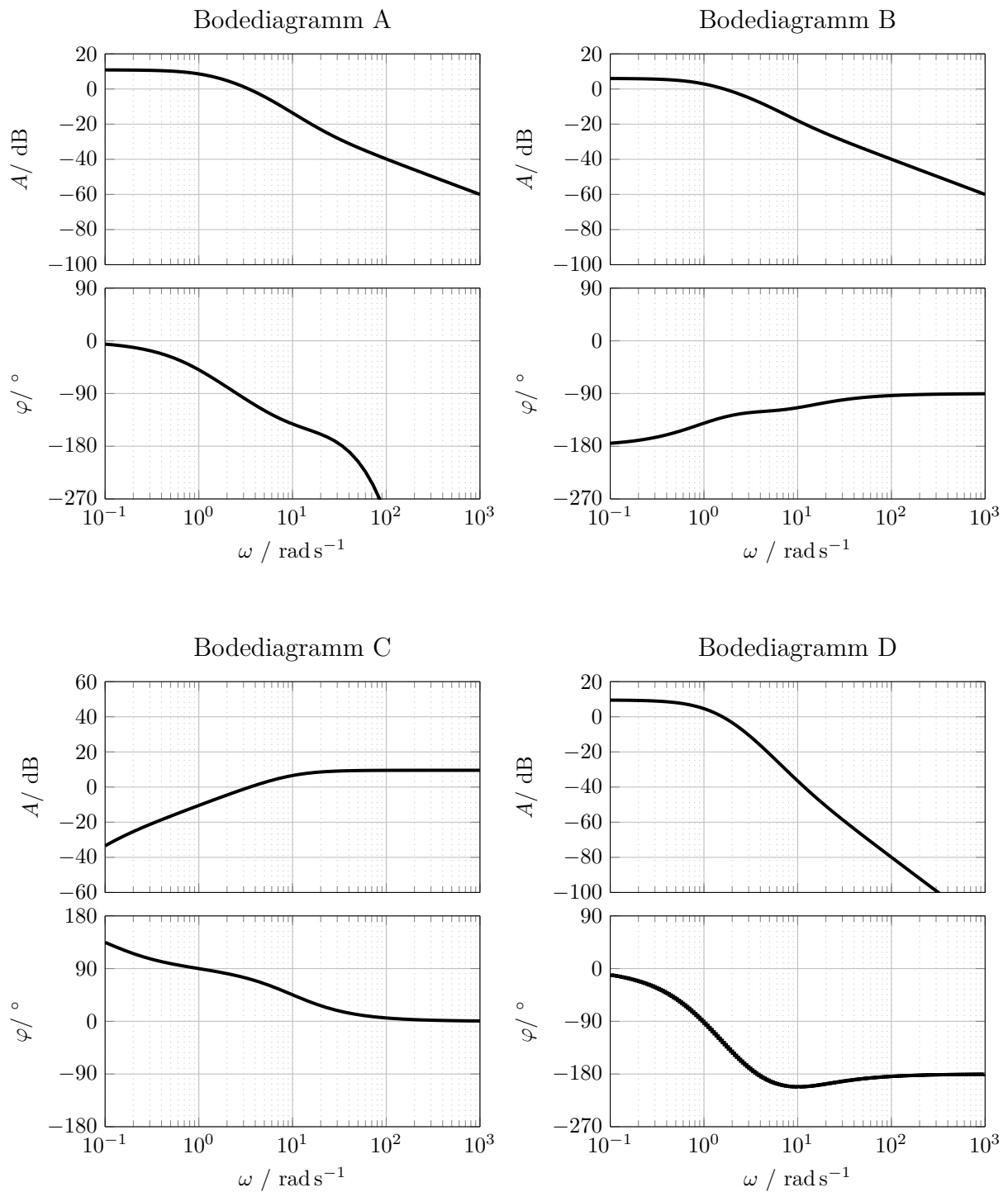


Abbildung 3: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingang $U(s)$ und Ausgang $Y(s)$.

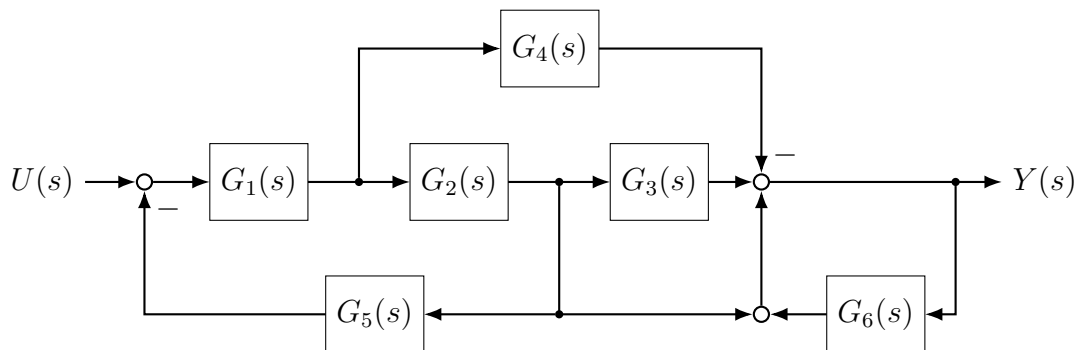


Abbildung 4: Blockschaltbild

Hinweis: Aufgabenteile b) und c) können unabhängig von a) bearbeitet werden.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen! (4 Punkte)
- Im Folgenden gilt

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+a)(s+2)}, \quad G_2(s) = G_4(s) = \frac{1}{s+2}, \quad G_3(s) = G_5(s) = 1, \quad G_6(s) = 0$$

für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Parameter ist. Setzen Sie die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme in die Übertragungsfunktion $G(s)$ der Strecke ein und vereinfachen Sie hierbei die Brüche so weit es geht! (2 Punkte)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil a) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie mit folgender Übertragungsfunktion weiter:

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_5}{(1 + G_1 G_2 G_3)(1 + G_6)}$$

- Für welche Werte von a ist das System asymptotisch stabil? (3 Punkte)

Lösung Aufgabe 2.

- Zur Herleitung der Übertragungsfunktion $G(s)$ werden zwei Hilfsgrößen eingeführt. Das Signal $Y_1(s)$ repräsentiert den Ausgang des Teilsystems G_1 und das Signal $Y_2(s)$ entspricht dem Ausgang des Teilsystems $G_2(s)$. Es lassen sich folgende Gleichungen

aufstellen:

$$Y = G_3 Y_2 + Y_2 - G_4 Y_1 + G_6 Y \quad (1)$$

$$Y_1 = G_1 [U - G_5 Y_2] \quad (2)$$

$$Y_2 = G_2 Y_1 \quad (3)$$

Einsetzen von (3) in (1) und (2) liefert

$$Y = G_3 G_2 Y_1 + G_2 Y_1 - G_4 Y_1 + G_6 Y \quad (4)$$

$$Y_1 = G_1 U - G_1 G_5 G_2 Y_1 \quad (5)$$

Auflösen ergibt dann

$$Y_1(s) = \frac{G_1}{G_1 G_2 G_5 + 1} U(s) \quad (6)$$

$$Y(s) = \frac{G_3 G_2 + G_2 - G_4}{1 - G_6} Y_1(s) \quad (7)$$

Die Gesamtübertragungsfunktion dieser Reihenschaltung ist damit

$$G(s) = \frac{G_1 (G_3 G_2 + G_2 - G_4)}{(1 + G_1 G_2 G_5) (1 - G_6)} \quad (8)$$

b) Einsetzen der gegebenen Übertragungsfunktionen liefert:

$$G(s) = \frac{1}{\frac{(s+a)(s+2)^2}{1 + \frac{1}{(s+a)(s+2)^2}}} \quad (9)$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+a)(s+2)^2 + 1} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{s^3 + s^2(a+4) + s(4a+4) + 4a+1} \quad (11)$$

Alternative Lösung: Einsetzen der Übertragungsfunktionen führt zu der gleichen Übertragungsfunktion (11).

c) Für die asymptotische Stabilität wird das Hurwitz-Kriterium verwendet. Hierfür muss

$$a + 4 > 0, \quad (12)$$

$$4a + 4 > 0, \quad (13)$$

$$4a + 1 > 0 \quad (14)$$

gelten. Hierbei ist (14) am konservativsten und daher für die weiteren Betrachtungen relevant. Auswertung der Beiwertebedingung liefert

$$4a^2 + 16a + 15 > 0. \quad (15)$$

Die Nullstellen dieser nach oben geöffneten Parabel liegen bei $a_1 = -\frac{5}{2}$ und bei $a_2 = -\frac{3}{2}$. Demnach muss a die Bedingungen

$$4a + 1 > 0, \quad (16)$$

$$a \notin \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right] \quad (17)$$

erfüllen und somit ist das System asymptotisch stabil, wenn $a > -\frac{1}{4}$.

Aufgabe 3. (8 Punkte)

Die Impulsantwort eines linearen, zeitinvarianten Systems lautet

$$g(t) = e^{-7t} - \frac{3}{4}e^{-t} \cos(t) - \frac{1}{4}e^{-t} \sin(t), \quad t \geq 0$$

- a) Beurteilen Sie anhand der Impulsantwort die Stabilität des Systems! Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! Geben Sie diese ohne Doppelbrüche und auf einen Hauptnenner gebracht an! (3 Punkte)
- c) Beurteilen Sie anhand der Übertragungsfunktion die Stabilität des Systems! Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)
- d) Gegen welchen Wert konvergiert die Sprungantwort des Systems für $t \rightarrow \infty$? (1 Punkt)
- e) Geben Sie eine Differentialgleichung des Systems an! Die unbekannten Anfangsbedingungen können dabei zu Null gesetzt werden. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 3.

- a) Da $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ ist das System asymptotisch stabil.
- b) Die Übertragungsfunktion $G(s)$ ist die Laplace-Transformierte der Impulsantwort $g(t)$. Mit Hilfe der Korrespondenzen ergibt sich

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s+7} - \frac{3}{4} \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{s+7} + \frac{-\frac{3}{4}s-1}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{s^2+2s+2 - \frac{3}{4}s^2 - \frac{25}{4}s - 7}{(s+7)(s^2+2s+2)} \\ &= \frac{s^2-17s-20}{4(s+7)(s^2+2s+2)}. \end{aligned}$$

- c) Die Polstelle $s_1 = -7$ der Übertragungsfunktion lässt sich direkt ablesen und ist asymptotisch stabil, da $\operatorname{Re}\{s_1\} < 0$. Für das verbleibende Polynom $s^2 + 2s + 2$ ist die Vorzeichenbedingung erfüllt, woraus asymptotische Stabilität folgt. Alternativ können auch dessen Pole ausgerechnet werden zu $s_{2,3} = -1 \pm i$, welche ebenfalls einen Realteil kleiner Null haben. Damit ist das System insgesamt asymptotisch stabil.
Alternative falls der Nenner der Übertragungsfunktion ausmultipliziert wurde: Mit der Vorzeichenbedingung und dem Hurwitz-Kriterium für Polynome 3. Ordnung folgt asymptotische Stabilität.

d) Mit dem Grenzwertsatz der Laplace-Transformation gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = -\frac{5}{14}$$

e) Zwischen Ein- und Ausgang besteht gemäß Übertragungsfunktion der Zusammenhang

$$\begin{aligned} Y(s) \cdot 4(s+7)(s^2+2s+2) &= U(s)(s^2-17s-20) \\ \Leftrightarrow Y(s) \cdot 4(s^3+9s^2+16s+14) &= U(s)(s^2-17s-20). \end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Laplace-Rücktransformation die dazugehörige DGL

$$4\ddot{y} + 36\ddot{y} + 64\dot{y} + 56y = \ddot{u} - 17\dot{u} - 20u.$$

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch die folgende lineare Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = u(t - T_t)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = -1, \dot{y}(0) = 1,$$

und dem Parameter $T_t > 0$ beschrieben.

- Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ und dem Parameter T_t an! (3 Punkte)
- Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an und berechnen Sie anschließend die Impulsantwort $g(t)$ in Abhängigkeit von T_t ! (3 Punkte)

Im Folgenden wird die im System vorhandene Totzeit durch eine Padé-Approximation 1. Ordnung

$$e^{as} \approx G_P(s) = \frac{1 + \frac{a}{2}s}{1 - \frac{a}{2}s}$$

approximiert.

- Geben Sie die Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$ mit approximierter Totzeit $G_P(s)$ an! (1 Punkt)
- Nun soll der Einfluss der Approximation auf die Impulsantwort des Systems untersucht werden. Berechnen Sie die Impulsantwort $\tilde{g}(t)$ des Systems $\tilde{G}(s)$ mit $T_t = 2$! (3 Punkte)

Lösung Aufgabe 4.

- Anwendung der Laplace-Transformation auf beide Seiten der DGL ergibt

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) &= e^{-T_t s} U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s)(s^2 + 4s + 4) + s - 1 + 4 &= e^{-T_t s} U(s) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$Y(s) = \frac{e^{-T_t s}}{s^2 + 4s + 4} U(s) - \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 4}$$

- Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = \frac{e^{-T_t s}}{s^2 + 4s + 4}.$$

Die zugehörige Impulsantwort ergibt sich durch Rücktransformation mit der Korrespondenztabelle und Zeitverschiebung zu

$$g(t) = (t - T_t)e^{-2(t-T_t)}$$

c) Einsetzen von

$$e^{-T_t s} = \frac{1 - \frac{T_t}{2}s}{1 + \frac{T_t}{2}s},$$

liefert

$$\tilde{G}(s) = \frac{1 - \frac{T_t}{2}s}{(s+2)^2 \left(1 + \frac{T_t}{2}s\right)}.$$

d) Zur Rücktransformation muss eine Partialbruchzerlegung in Abhängigkeit von $T_t = 2$ durchgeführt werden. Also

$$\tilde{G}(s) = \frac{1-s}{(s+2)^2(1+s)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{1+s}$$

Durchmultiplizieren mit $(s+2)^2(1+s)$ liefert nach einem Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 3A + B + 4C &= -1 \\ 2A + B + 4C &= 1 \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Koeffizienten $A = -2$, $B = -3$ und $C = 2$ und somit gilt:

$$\tilde{G}(s) = \frac{-2}{s+2} + \frac{-3}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+1}$$

Das Gesamtergebnis ist somit

$$\tilde{g}(t) = -2e^{-2t} - 3te^{-2t} + 2e^{-t}.$$

Aufgabe 5. (13 Punkte)

Gegeben sei das folgende System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_1 : \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Hinweis: Die Aufgabenteile c) und d) können unabhängig von den anderen bearbeitet werden.

- Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Lösung $\underline{x}(t)$ des Systems für einen konstanten Eingang $u(t) = u_0$, $t \geq 0$! (3 Punkte)
- Geben Sie zunächst in Abhängigkeit einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ (d.h. ohne die obigen Zahlenwerte einzusetzen) mit zwei Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$) die Berechnungsvorschrift an, mit der die Transformationsmatrix für die Transformation auf Regelungsnormform bestimmt werden kann!
Setzen Sie dann das gegebene $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ ein! Welches Problem tritt dabei auf, sodass keine reguläre Transformation berechnet werden kann? (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems! (2 Punkte)
- Geben Sie zu der Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil d) eine Zustandsraumdarstellung an! Vergleichen Sie diese mit der ursprünglichen Zustandsraumdarstellung Σ_1 . Was fällt Ihnen auf? (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 5.

- Variante 1:** Mittels inverser Laplace-Transformation $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\}$:

$$\begin{aligned} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ -9 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ 9 & s+3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ \frac{9}{(s+3)(s+4)} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ \frac{9}{s+3} - \frac{9}{s+4} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

wobei eine Partialbruchzerlegung des (2,1)-Eintrags durchgeführt wurde.

$$\begin{aligned}\frac{9}{(s+3)(s+4)} &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+4} \\ \Leftrightarrow 9 &= A(s+4) + B(s+3) \\ \Leftrightarrow 9 &= s(A+B) + 4A + 3B \quad \Rightarrow A = -B \\ \Rightarrow 9 &= -4B + 3B \quad \Rightarrow B = -9, \quad \Rightarrow A = 9\end{aligned}$$

Laplace-Rücktransformation in den Zeitbereich führt auf die Transitionsmatrix

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 9e^{-3t} - 9e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

b) Die Lösung der Zustandsgleichung lautet

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= e^{A(t-t_0)} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \underline{B} u(\tau) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-3t} \\ 18e^{-3t} - 18e^{-4t} + e^{-4t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-4(t-\tau)} u_0 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-3t} \\ 18e^{-3t} - 17e^{-4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \left[e^{-4(t-\tau)} \right]_{\tau=0}^t u_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-3t} \\ 18e^{-3t} - 17e^{-4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{u_0}{4} (1 - e^{-4t}) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Variante 2: Mittels Ähnlichkeits-Transformation

c) Die allgemeine Formel für die Transformationsmatrix $\underline{T}_R$ zur Transformation auf Regelungsnormalform lautet für ein System mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$

$$\underline{T}_R = \begin{bmatrix} \underline{s}_R^T \\ \underline{s}_R^T \underline{A} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Dabei bezeichnet $\underline{s}_R^T$ die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix, also

$$\underline{s}_R^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{A} \underline{B} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Für das vorliegende System ist letzteres

$$\underline{s}_R^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Die Matrix $\begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{A} \underline{B} \end{bmatrix}$ hat jedoch keinen vollen Rang, sodass ihre Inverse nicht existiert. Damit kann keine reguläre Transformation $\underline{T}_R$ berechnet werden.

d) Die Übertragungsfunktion berechnet sich gemäß Formel als

$$\begin{aligned} G(s) &= \underline{c}^T (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b} + d \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ \frac{9}{s+3} - \frac{9}{s+4} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} = \frac{2}{s+4}. \end{aligned}$$

Das ursprüngliche System hat zwei Zustände ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$), die dazugehörige Übertragungsfunktion jedoch nur eine Polstelle.

Interpretation (in der Klausur nicht erforderlich): Eine Übertragungsfunktion beschreibt das Übertragungsverhalten vom Systemeingang („Anregung“) zum Systemausgang („Messwert“). Der Zustand x_1 hängt jedoch nicht von u ab, weder direkt über $\underline{b}$, noch indirekt über x_2 . Daher ist x_1 nicht Teil des Übertragungsverhaltens von u nach y und damit auch nicht der Übertragungsfunktion.

e) Zu der Übertragungsfunktion aus d) lautet die Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{x}_R &= -4x_R + u \\ y &= 2x_R. \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass diese Darstellung nur einen Zustand hat, wohingegen Σ_1 zwei Zustände hat.

Interpretation (in der Klausur nicht erforderlich): Da die Übertragungsfunktion aus d) nur eine Polstelle hat, hat die dazugehörige RNF auch nur einen Zustand. Der Teil der Systemdynamik, der nicht am Übertragungsverhalten beteiligt ist, fiel beim Aufstellen der Übertragungsfunktion weg. Für das reduzierte System ist die RNF definiert, während für das ursprüngliche System keine RNF existiert.

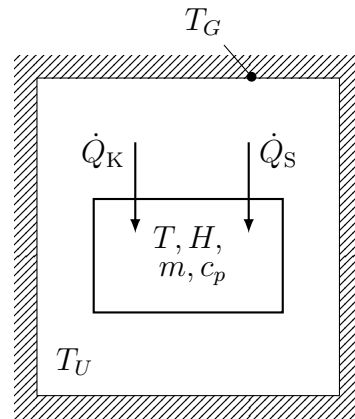
Aufgabe 6. (10 Punkte)

Aufgrund des unbeständigen Sommerwetters dieses Jahr wird eine Grillparty nach drinnen verlegt und stattdessen Grillgut im Backofen zubereitet.

Der Ofen wurde bereits auf eine konstante Temperatur $T_U = \text{const.}$ vorgeheizt. Das Grillgut darin gart bereits und hat eine Start-Temperatur $T(t = 0) = T_0$. Durch Konvektion entsteht ein Wärmestrom

$$\dot{Q}_K = c_1 A (T_U - T)$$

in das Grillgut hinein. Dabei ist A die Oberfläche des Grillguts und c_1 eine Konstante.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Grill-Funktion angeschaltet, die die Seitenwände des Ofens erwärmt, sodass durch Wärmestrahlung ein zusätzlicher Wärmestrom

$$\dot{Q}_S = \epsilon \sigma A (T_G^4 - T^4)$$

in das Grillgut hinein entsteht. Dabei bezeichnet die Konstante ϵ den Emissionsgrad des Grillguts und σ eine Naturkonstante. Zur Modellierung des Prozesses wird die Enthalpie

$$H = m c_p T$$

des Grillguts betrachtet, mit spezifischer Wärmekapazität $c_p = \text{const.}$, Masse $m = \text{const.}$, und Temperatur T des Grillguts.

- a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Temperatur T des Grillguts auf, indem Sie die gegebenen Wärmeströme sowie die Ableitung der Enthalpie in die Enthalpiebilanz

$$\dot{H} = \sum_i \dot{Q}_i$$

einsetzen! (1 Punkt)

Auch das Aufheizen des Grills wird durch eine Differentialgleichung beschrieben

$$\vartheta^2 \ddot{T}_G + \frac{7}{5} \vartheta \dot{T}_G + T_G = \alpha u, \quad T_G(t = 0) = \dot{T}_G(t = 0) = 0,$$

worin T_G die Temperatur des Grills ist, u die vom Benutzer vorgegebene Eingangsspannung, und α, ϑ Konstanten > 0 .

- b) Stellen Sie eine nichtlineare Zustandsraumdarstellung für das Gesamtsystem auf! Verwenden Sie dazu den Zustandsvektor $\underline{x} = [T_U - T, T_G, \dot{T}_G]$, den Eingang u , und den Ausgang $y = T_G$. Geben Sie auch die Anfangsbedingung an. (4 Punkte)
- c) Linearisieren Sie das System um die allgemeine Ruhelage $\underline{x}_S, u_S$! (3 Punkte)
- d) Bestimmen Sie die Eingangsspannung u_0 , für die die Ruhelage $x_{1,0} = 0$ erreicht wird! (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 6.

- a) Einsetzen der gegebenen Wärmeströme sowie zeitliches Ableiten der gegebenen Enthalpie führt auf

$$mc_p \dot{T} = c_1 A (T_U - T) + \varepsilon \sigma A (T_G^4 - T^4).$$

- b) Die gegebene Differentialgleichung wird nach $\ddot{T}_G$ umgestellt

$$\ddot{T}_G = -\frac{7}{5\vartheta} \dot{T}_G - \frac{1}{\vartheta^2} T_G + \frac{\alpha}{\vartheta^2} u,$$

woraus sich mit der gegebenen Definition der Zustände die zweite und dritte Zeile der Zustandsraumdarstellung formulieren lassen. Für die DGL für $T_U - T$ ist außerdem zu beachten, dass $T = T_U - x_1$. Damit ergibt sich

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \frac{c_1 A}{mc_p} x_1 + \frac{\varepsilon \sigma A}{mc_p} (x_2^4 - (T_U - x_1)^4) \\ x_3 \\ -\frac{1}{\vartheta^2} x_2 - \frac{7}{5\vartheta} x_3 + \frac{\alpha}{\vartheta^2} u \end{bmatrix}, \quad \underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} T_U - T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = x_2.$

- c) Mit dem Ansatz

$$\Delta \underline{\dot{x}} = \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_S, u_S} \Delta \underline{x} + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial u} \right|_{\underline{x}_S, u_S} \Delta u$$

$$y = \left. \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_S, u_S} \Delta \underline{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\underline{x}_S, u_S} u$$

lautet die Linearisierung

$$\Delta \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \frac{c_1 A}{mc_p} + \frac{\varepsilon \sigma A}{mc_p} \cdot 4(T_U - x_1)^3 & \frac{\varepsilon \sigma A}{mc_p} \cdot 4x_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\vartheta^2} & -\frac{5}{7\vartheta} \end{bmatrix} \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha}{\vartheta^2} \end{bmatrix} \Delta u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta \underline{x}$$

- d) Nach Einsetzen von $x_{1,0} = 0$ folgt aus den einzelnen Zeilen der Zustandsraumdarstellung:

$$(1): \quad 0 = 0 + \frac{\varepsilon \sigma A}{m c_p} \left(x_2^4 - (T_U - 0)^4 \right) \quad \Rightarrow x_{2,0} = T_U$$

$$(2): \quad 0 = x_{3,0}$$

$$(3): \quad 0 = -\frac{1}{\vartheta^2} x_{2,0} + \frac{\alpha}{\vartheta^2} u_0 \quad \Rightarrow u_0 = \underline{\underline{\frac{x_{2,0}}{\alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{T_U}{\alpha}}}$$

Aufgabe 7. (11 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\frac{7}{5}s^2 + 7s + 140}{2s^3 + 11s^2 + 5s}.$$

- a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplituden- und Phasengang des Systems! (4 Punkte)
- c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (5 Punkte)

Lösung Aufgabe 7.

- a) Ausklammern von $\frac{7}{5}$ im Zähler und $2s$ im Nenner liefert:

$$\frac{7}{10}s^{-1} \frac{s^2 + 5s + 100}{(s + 5)(s + 0.5)} \quad (18)$$

wobei die Nullstellen von $2s^2 + 11s + 5$ durch -5 und $-\frac{1}{2}$ gegeben sind.

- b) Mit $s = j\omega$ ergibt sich der Frequenzgang

$$G(j\omega) = -\frac{7}{10\omega}j \frac{100 - \omega^2 + 5j\omega}{(j\omega + 5)(j\omega + 0.5)}, \quad (19)$$

der Amplitudengang

$$A(\omega) = \frac{7}{10\omega} \frac{\sqrt{(100 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}}{\sqrt{25 + \omega^2} \sqrt{\frac{1}{4} + \omega^2}} \quad (20)$$

und der Phasengang

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \text{atan2}\left(5\omega, 100 - \omega^2\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega}{5}\right) - \text{atan}(2\omega) \quad (21)$$

Auswerten der atan2-Funktion ergibt

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \text{atan}\left(\frac{5\omega}{100 - \omega^2}\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega}{5}\right) - \text{atan}(2\omega) & 0 < \omega \leq 10 \\ \frac{\pi}{2} + \text{atan}\left(\frac{5\omega}{100 - \omega^2}\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega}{5}\right) - \text{atan}(2\omega) & 10 < \omega \end{cases} \quad (22)$$

c) Für das Zeichnen werden folgende Werte benötigt

$$c = \frac{7}{10}, \quad r = -1, \quad \omega_{min} = \frac{1}{2}, \quad G^*(0) = 40$$

$$A_{dB}(\omega_{min}) = 20 \cdot \log \left(\left| \frac{7}{10} 40 \right| \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right) = 35 \text{ dB} \quad (23)$$

$$c \cdot G^*(0) = \frac{7}{10} 40 > 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0^\circ + (-1) \cdot 90^\circ = -90^\circ \quad (24)$$

