UNIVERSITÄT STUTTGART
Institut für Systemdynamik

Prüfung im Fach **Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik**
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Wintersemester 2021/22 am 04.03.2022, 12:00 – 13:30 Uhr

Bitte tragen Sie auf diesem Doppelblatt Ihren Namen, Ihre Fachrichtung und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Lösungsblätter mit Ihrem Namen und legen Sie diese Blätter in das Doppelblatt ein.

Name, Vorname: _____

Studiengang: _____ Matr.-Nr: _____

Zugelassen sind alle nicht-elektronischen Hilfsmittel sowie ein nicht-vernetzbarer nicht-grafikfähiger Taschenrechner. Zugelassene Taschenrechner sind in einer Liste vermerkt, die vorab vom Institut für Systemdynamik zur Verfügung gestellt wurde.

Zur Kenntnis genommen: _____(Unterschrift)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	28	
2	9	
3	8	
4	11	
5	13	
6	10	
7	11	
insgesamt	90	

Korrektur: _____

Prüfer: _____

Einsicht: _____

Note: _____

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (28 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Ist das Übertragungsverhalten der Differentialgleichung $\ddot{y} + 2t\dot{y} + y = \ddot{u} + 2t\dot{u} + u$ zeitinvariant? (1 Punkt)

☐ Ja

☐ Nein

b) Die Eigenwerte eines Systems in kanonischer Normalform und die Eigenwerte des gleichen Systems in Regelungs-Normalform sind grundsätzlich unterschiedlich. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

c) Ist ein Totzeitglied linear? (1 Punkt)

☐ Ja

☐ Nein

d) Die Systeme mit Übertragungsfunktion $G(s)$ und $\tilde{G}(s) = 5 \cdot G(s)$ haben identische Amplitudengänge. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

e) Ein lineares, zeitinvariantes System mit verschwindenden Anfangsbedingungen wird mit dem Eingangssignal $u_1(t) = 3\sigma(t)$ angeregt. Der zugehörige Systemausgang $y_1(t)$ ist links in Abbildung 1 dargestellt. Für ein zweites Eingangssignal, bei dem sich auch um ein sprungförmiges Signal bei $t = 0$ handelt, ergibt sich der Systemausgang $y_2(t)$ der rechts in Abbildung 1 dargestellt ist. Nennen Sie das Eingangssignal $u_2(t)$. (2 Punkte)

$$u_2(t) = \boxed{}\ \sigma(t)$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

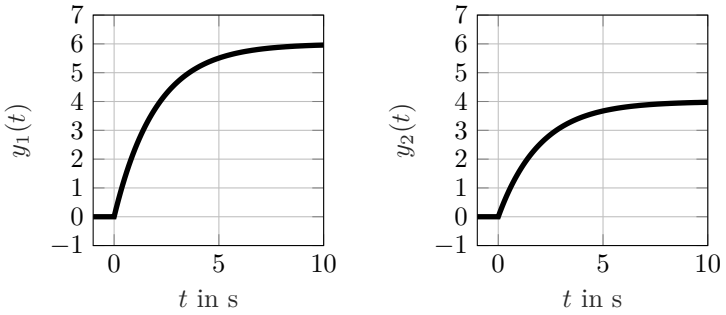


Abbildung 1: Ausgangssignale $y_i(t),\ i = 1, 2$

f) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{3}{9s^3 + 6s^2 + 12s + 15}$$

☐ Ja

☐ Nein

g) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{32s^8 + 1}{8s^9 + 4s^8 + 2}.$$

(i) Welche Aussage trifft auf die Impulsantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☐ $\lim_{t\to 0} g_2(t) = 8$ ☐ $\lim_{t\to 0} g_2(t) = 4$

(ii) Nennen Sie die Laplace-Transformierte der Sprungantwort des Systems bei verschwindenen Anfangsbedingungen. (1 Punkt)

$$H_2(s) = \boxed{}$$

h) Geben Sie die asymptotische Steigung der Amplitudengänge $\frac{\mathrm{d}A_1(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$ und $\frac{\mathrm{d}A_2(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$ in dB/Dek des Frequenzgangs der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \to \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_3(s) = \frac{s^2 + s + 9}{(s+5)(s+1)(s+10)} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_3(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \boxed{}$$

$$G_4(s) = \frac{s-5}{s+10} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_4(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \boxed{}$$

i) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Phasengänge $\varphi_3(\omega)$ und $\varphi_4(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \to \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_3(s) = \frac{s^2 + s + 9}{(s+5)(s+1)(s+10)} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_3(\omega) = \boxed{}$$

$$G_4(s) = \frac{s - 5}{s + 10} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_4(\omega) = \boxed{}$$

j) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort $y(t)$ eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = \mathrm{e}^{-t}$, das mit dem Eingang $u(t) = (1-t)(1-\sigma(t-1)),\ t \geq 0$, angeregt wird. (3 Punkte)

☐ $y(t) = \mathrm{e}^{-t+1} - 2\mathrm{e}^{-t}$ ☐ $y(t) = \mathrm{e}^{t-1} - 2\mathrm{e}^{t}$

☐ $y(t) = 2\mathrm{e}^{-t+1} - 4\mathrm{e}^{-t}$ ☐ $y(t) = 2\mathrm{e}^{t-1} - 4\mathrm{e}^{t}$

k) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$e^{\ddot{y}} + 2\dot{y} + \ln(y - \dot{y}) = u$$

um die Ruhelage $y_S = 1$, $u_S = 1$. (3 Punkte)

☐ $\Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$ ☐ $2\Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$

☐ $\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} = \Delta u$ ☐ $\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} = \Delta u$

☐ $\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$ ☐ $\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

l) Gegeben sei folgendes Blockschaltbild:

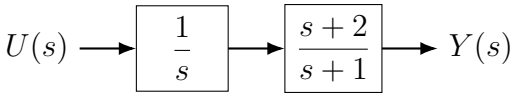


Abbildung 2: Blockschaltbild

(i) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen an. (1 Punkt)

$$G(s) = \boxed{}$$

(ii) Wie viele Zustände hat das System? (1 Punkt)

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

(iii) Wie lautet eine Zustandsraumdarstellung des Systems? (2 Punkte)

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \;\; y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \;\; y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + u$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \;\; y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \;\; y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}$

m) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 3) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 4) zu. (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	**Sprungantwort**	**Bode-Diagramm**
$G_1(s) = \dfrac{3}{s^2 + s + 4}$		
$G_2(s) = \dfrac{(s+4)(s+3)}{s^2 + 4s + 4}$		
$G_3(s) = \dfrac{3}{s^2 + 2s + 1}$		
$G_4(s) = \dfrac{30(s+0.1)}{(s+1)(s+3)}$		

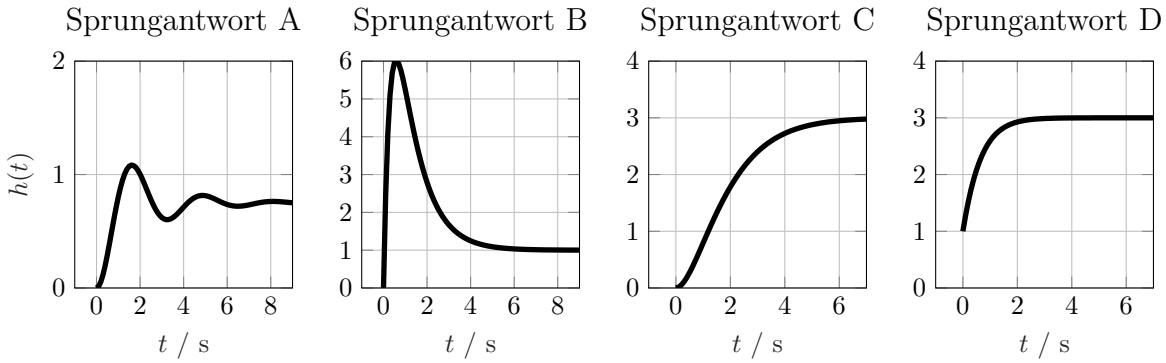


Abbildung 3: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s),\ i = 1 \ldots 4$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

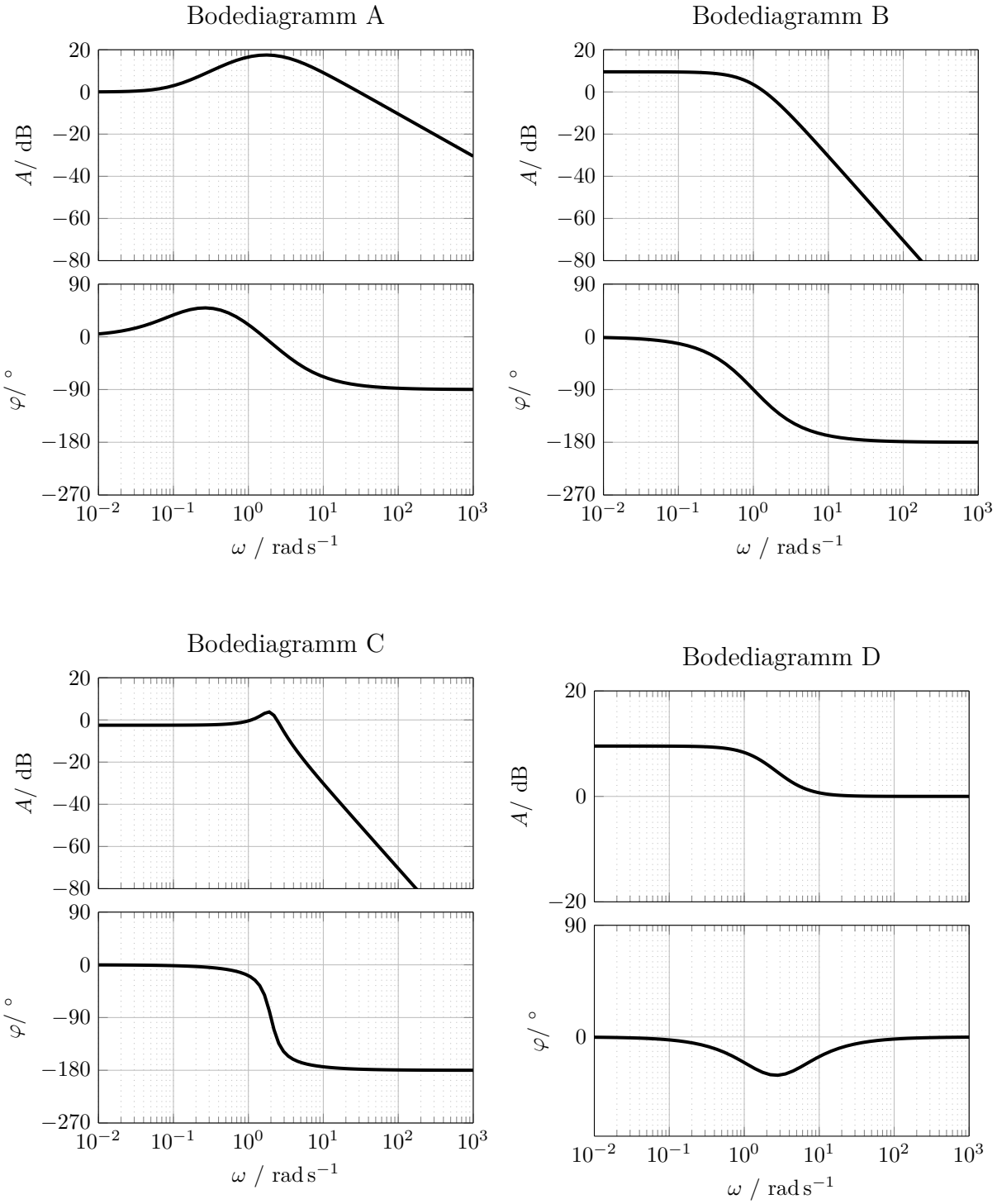


Abbildung 4: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s),\ i = 1 \ldots 4$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingängen $U(s)$ und $D(s)$ sowie Ausgang $Y(s)$.

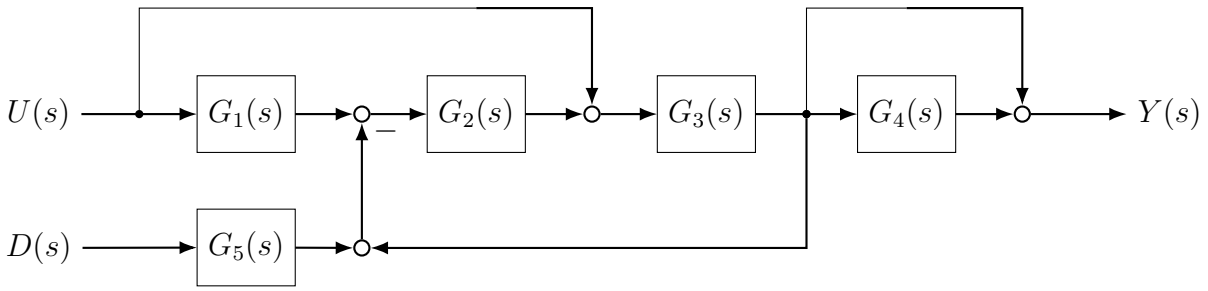


Abbildung 5: Blockschaltbild

Hinweis: Aufgabenteile a), b), c) und d) können unabhängig von den vorherigen Aufgabenteilen bearbeitet werden.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_U(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $D(s) = 0$ an. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_D(s) = Y(s)/D(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $U(s) = 0$ an. (2 Punkte)

c) Geben Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$ und $D(s)$ sowie $G_U(s)$ und $G_D(s)$ an. Sie brauchen die Terme nicht einzusetzen. (1 Punkt)

d) Im Folgenden gilt

$$G_1(s) = 1,\ G_2(s) = k_1,\ G_3(s) = \frac{k_2}{s},\ G_4(s) = G_5(s) = 0$$

für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ unbekannte Parameter sind. Setzen Sie die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme in die Gleichung für $Y(s)$ ein und vereinfachen Sie hierbei die Brüche so weit es geht. (2 Punkte)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil c) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie mit folgendem Zusammenhang weiter:

$$Y(s) = \frac{(G_2+1)G_1G_3(1-G_4)}{(1+G_1G_2G_3)}U(s) + \frac{G_1G_3(1+G_4)G_5^2}{(1-G_1G_2G_3)}D(s)$$

e) Für welche Werte von k_1, k_2 ist die verbliebene Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (1 Punkt)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 3. (8 Punkte)

Die Übertragungsfunktion eines linearen, zeitinvarianten Systems lautet

$$G_1(s) = \frac{80\,s}{s^2 + 100} + \frac{1}{4s}.$$

Hinweis: Aufgabenteile b), d) und e) können unabhängig von den vorherigen bearbeitet werden.

a) Ist das System asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil? Bergründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Impulsantwort für $t \to \infty$ gegen keinen Grenzwert konvergiert. (1 Punkt)

Im Folgenden wird die Übertragungsfunktion modifiziert zu

$$G_2(s) = \frac{80\,(s+1)}{(s+1)^2 + 100} + \frac{1}{4\,s}.$$

d) Wie verändert sich dadurch die in Aufgabenteil b) bestimmte Impulsantwort? Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf von $g_2(t)$. (2 Punkte)

e) Geben Sie die Differentialgleichung zur Übertragungsfunktion $G_2(s)$ an. Die unbekannten Anfangsbedingungen können dabei zu Null gesetzt werden. (2 Punkte)

Aufgabe 4. (11 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die folgende Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 11\,\dot{y} + 28\,y = -a\ddot{u} - 7\,\dot{u} - 4\,u$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 1$$

und dem Parameter $a \geq 0$ beschrieben.
Hinweis: Aufgabenteil b) kann unabhängig von Aufgabenteil a) bearbeitet werden.

a) Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems an. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie nicht anzugeben. (1 Punkt)

b) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ und dem Parameter a an. (2 Punkte)

c) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an. (1 Punkt)

Im Folgenden gilt $a = 0$.

d) Zerlegen Sie die Übertragungfunktion in ihre einzelnen Moden, d.h.

$$Y(s) = \underbrace{\left(\sum_i \frac{z_i}{s + p_i}\right)}_{G(s)} U(s)$$

mit Zählerpolynom z_i und Polstellen p_i. (2 Punkte)

e) Ausgehend von der zerlegten Übertragungsfunktion aus d) lassen sich Zustandsgrößen definieren als

$$X_i(s) = \frac{z_i}{s + p_i} U(s).$$

Transformieren Sie diese Zustandsgrößen $X_i(s)$ in den Zeitbereich und stellen Sie damit Differentialgleichungen für die einzelnen Moden auf. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie nicht anzugeben. (3 Punkte)

f) Geben Sie eine modale Zustandsraumdarstellung des Systems an. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie hier auch nicht anzugeben. (2 Punkte)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 5. (13 Punkte)

Gegeben sei das folgende System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_1: \qquad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad \underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Hinweis: Die Aufgabenteile c) und d) können unabhängig von den anderen bearbeitet werden.

a) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathrm{e}^{\underline{A}t}$ mit einer geeigneten Methode. (4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Lösung $\underline{x}(t)$ des Systems für einen konstanten Eingang $u(t) = u_0$, $t \geq 0$. (3 Punkte)

c) Geben Sie zunächst in Abhängigkeit einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A},\ \underline{b},\ \underline{c},\ d\}$ (d.h. ohne die obigen Zahlenwerte einzusetzen) mit zwei Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$) die Berechnungsvorschrift an, mit der die Transformationsmatrix für die Transformation auf Regelungsnormalform bestimmt werden kann.
Setzen Sie dann das gegebene $\{\underline{A},\ \underline{b},\ \underline{c},\ d\}$ ein. Welches Problem tritt dabei auf, sodass keine reguläre Transformation berechnet werden kann? (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems. (2 Punkte)

e) Geben Sie zu der Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil d) eine Zustandsraumdarstellung an. Vergleichen Sie diese mit der ursprünglichen Zustandsraumdarstellung Σ_1. Was fällt Ihnen auf? (2 Punkte)

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Die Interaktion von Licht mit Materie ist ein grundlegendes Problem der Quantenoptik. Insbesondere soll im Folgenden untersucht werden wie ein Elektron auf elektromagnetische Strahlung

$$E(t) = \hat{E}\,\cos\left(\omega_F\, t\right) \tag{1}$$

mit Amplitude $\hat{E}$ und Kreisfrequenz ω_F reagiert. Quantenphysikalisch wird in diesem Zusammenhang von einem *Zwei-Niveau-System* ausgegangen: Es gibt einen Grund- sowie einen angeregten Zustand. Wird das Elektron mit seiner charakteristischen Resonanzfrequenz ω_R bestrahlt, geht es in den angeregten Zustand über – um direkt wieder in seinen Grundzustand zurückzufallen. Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Grundzustand vorzufinden, ist gegeben durch $|\alpha|^2$, während $|\beta|^2$ die Wahrscheinlichkeit beschreibt, das Elektron im angeregten Zustand zu finden. Offensichtlich gilt $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Die Wahrscheinlichkeiten gehorchen den komplexwertigen gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{j}{2}\hat{E}\,\beta - \frac{j}{2}(\omega_F - \omega_R)\alpha,\\ \dot{\beta} &= \frac{j}{2}\hat{E}\,\alpha + \frac{j}{2}(\omega_F - \omega_R)\beta.\end{aligned} \tag{2}$$

Es wird davon ausgegangen, dass sich das Elektron anfangs im Grundzustand befindet:

$$\alpha(0) = 1,\ \beta(0) = 0 \tag{3}$$

a) Stellen Sie eine nichtlineare Zustandsraumdarstellung für das Gesamtsystem auf. Verwenden Sie dazu den Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix}\alpha, & \beta\end{bmatrix}^\top$, den Eingang $u = \omega_F$, und den Ausgang $y = \beta$. Geben Sie auch die Anfangsbedingungen an. (3 Punkte)

b) Linearisieren Sie das System um den allgemeinen Arbeitspunkt $\underline{x}_S$ mit dem Eingang $u_S = \omega_R$. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Pole des linearisierten Systems. Wie interpretieren Sie deren Lage? (1 Punkt)

d) Die in System (2) angegebenen Systemgleichungen wurden durch das Anwenden einer Koordinaten-Transformation hergeleitet. Bestimmen Sie mithilfe der inversen Koordinaten-Transformation

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \alpha\,\mathrm{e}^{\frac{j}{2}(\omega_F-\omega_R)t},\\ \tilde{\beta} &= \beta\,\mathrm{e}^{-\frac{j}{2}(\omega_F-\omega_R)t}\end{aligned}$$

die ursprünglichen dynamischen Gleichungen. Transformieren Sie ebenfalls die Anfangsbedingung (3). (3 Punkte)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 7. (11 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + s^{-1} + 1 + 1^{-1}}{s^3 + 0.1\,s^2 + 100\,s + 10}\ .$$

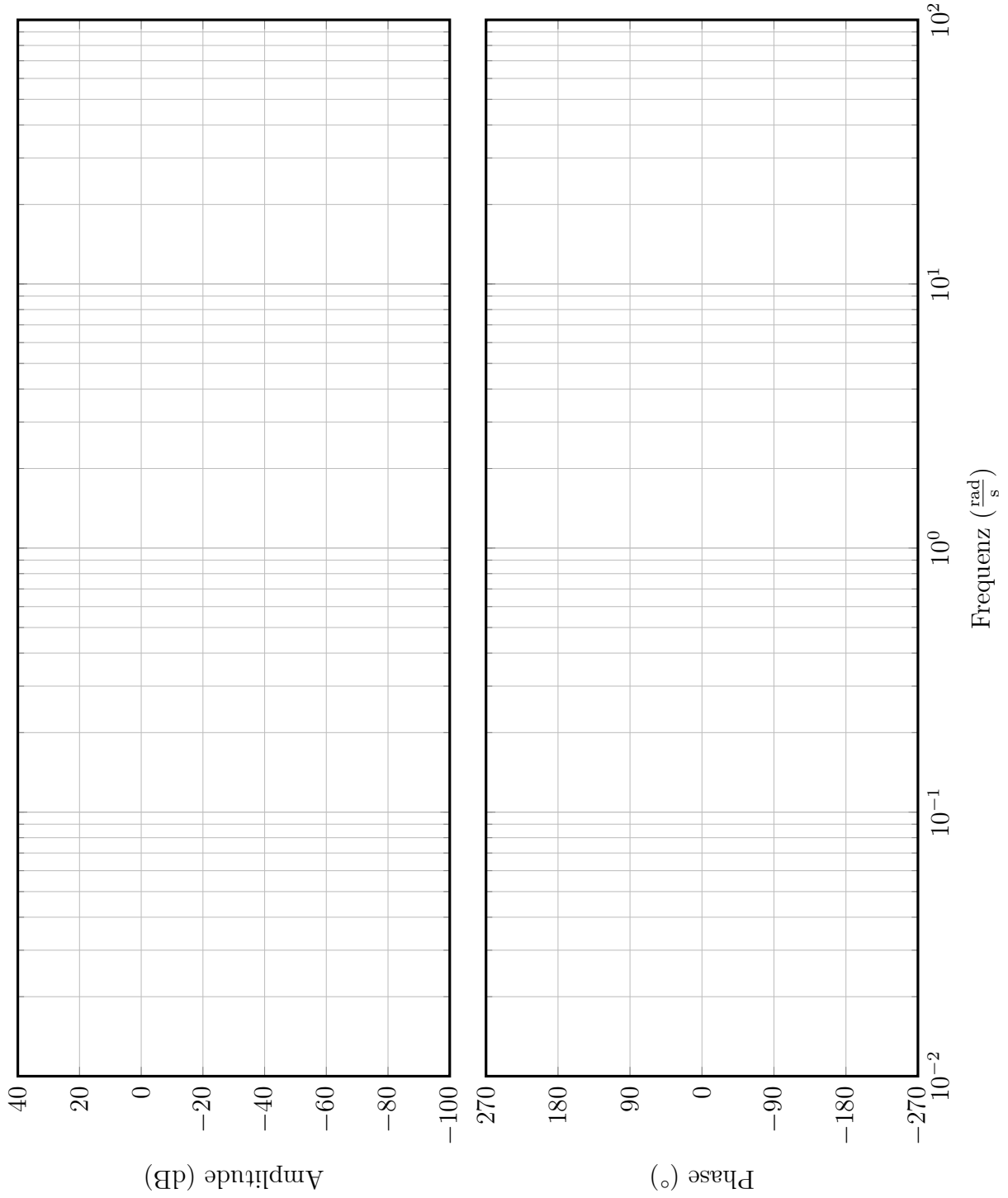
a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar). *Hinweis: Ein Pol der Übertragungsfunktion liegt bei* $s_1 = -0.1$. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplituden- und Phasengang des Systems. (4 Punkte)

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs. Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (5 Punkte)

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 15 und 16 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 16 bewertet.



Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 15 und 16 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 16 bewertet.

