UNIVERSITÄT STUTTGART
Institut für Systemdynamik

Lösungsblatt zur Prüfung im Fach
Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Wintersemester 2021/22 am 04.03.2022, 12:00 – 13:30 Uhr

Punktetabelle

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	insgesamt
Punkte	28	9	8	11	13	10	11	90
erreicht								

Notentabelle

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (28 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Ist das Übertragungsverhalten der Differentialgleichung $\dddot{y} + 2t\dot{y} + y = \ddot{u} + 2t\dot{u} + u$ zeitinvariant? (1 Punkt)

☐ Ja

☑ Nein

b) Die Eigenwerte eines Systems in kanonischer Normalform und die Eigenwerte des gleichen Systems in Regelungs-Normalform sind grundsätzlich unterschiedlich. (1 Punkt)

☐ Wahr

☑ Falsch

c) Ist ein Totzeitglied linear? (1 Punkt)

☑ Ja

☐ Nein

d) Die Systeme mit Übertragungsfunktion $G(s)$ und $\tilde{G}(s) = 5 \cdot G(s)$ haben identische Amplitudengänge. (1 Punkt)

☐ Wahr

☑ Falsch

e) Ein lineares, zeitinvariantes System mit verschwindenden Anfangsbedingungen wird mit dem Eingangssignal $u_1(t) = 3\sigma(t)$ angeregt. Der zugehörige Systemausgang $y_1(t)$ ist links in Abbildung 1 dargestellt. Für ein zweites Eingangssignal, bei dem sich auch um ein sprungförmiges Signal bei $t = 0$ handelt, ergibt sich der Systemausgang $y_2(t)$ der rechts in Abbildung 1 dargestellt ist. Nennen Sie das Eingangssignal $u_2(t)$. (2 Punkte)

$$u_2(t) = \boxed{2}\ \sigma(t)$$

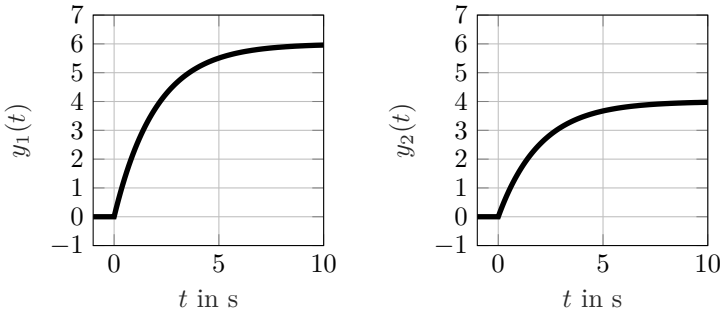


Abbildung 1: Ausgangssignale $y_i(t),\ i = 1, 2$

f) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{3}{9s^3 + 6s^2 + 12s + 15}$$

☐ Ja

☑ Nein

g) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{32s^8 + 1}{8s^9 + 4s^8 + 2}.$$

(i) Welche Aussage trifft auf die Impulsantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☐ $\lim_{t\to 0} g_2(t) = 8$ ☑ $\lim_{t\to 0} g_2(t) = 4$

(ii) Nennen Sie die Laplace-Transformierte der Sprungantwort des Systems bei verschwindenen Anfangsbedingungen. (1 Punkt)

$$H_2(s) = \boxed{\frac{32s^8 + 1}{8s^{10} + 4s^9 + 2s}}$$

h) Geben Sie die asymptotische Steigung der Amplitudengänge $\frac{\mathrm{d}A_1(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$ und $\frac{\mathrm{d}A_2(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$ in dB/Dek des Frequenzgangs der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \to \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_3(s) = \frac{s^2 + s + 9}{(s+5)(s+1)(s+10)} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_3(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \boxed{-20\,\mathrm{dB\,Dek^{-1}}}$$

$$G_4(s) = \frac{s-5}{s+10} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_4(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \boxed{0\,\mathrm{dB\,Dek^{-1}}}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

i) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Phasengänge $\varphi_3(\omega)$ und $\varphi_4(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \to \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_3(s) = \frac{s^2 + s + 9}{(s+5)(s+1)(s+10)} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_3(\omega) = \boxed{-90^\circ}$$

$$G_4(s) = \frac{s-5}{s+10} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_4(\omega) = \boxed{0^\circ}$$

j) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort $y(t)$ eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = \mathrm{e}^{-t}$, das mit dem Eingang $u(t) = (1-t)(1-\sigma(t-1)),\ t \geq 0$, angeregt wird. (3 Punkte)

☑ $y(t) = \mathrm{e}^{-t+1} - 2\mathrm{e}^{-t}$ ☐ $y(t) = \mathrm{e}^{t-1} - 2\mathrm{e}^{t}$

☐ $y(t) = 2\mathrm{e}^{-t+1} - 4\mathrm{e}^{-t}$ ☐ $y(t) = 2\mathrm{e}^{t-1} - 4\mathrm{e}^{t}$

k) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$e^{\ddot{y}} + 2\dot{y} + \ln(y - \dot{y}) = u$$

um die Ruhelage $y_S = 1$, $u_S = 1$. (3 Punkte)

☐ $\Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$ ☐ $2\Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$

☐ $\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} = \Delta u$ ☐ $\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} = \Delta u$

☑ $\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$ ☐ $\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$

l) Gegeben sei folgendes Blockschaltbild:

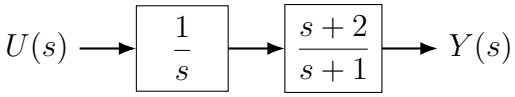


Abbildung 2: Blockschaltbild

(i) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen an. (1 Punkt)

$$G(s) = \boxed{\frac{s+2}{s(s+1)}}$$

(ii) Wie viele Zustände hat das System? (1 Punkt)

☐ 0 ☐ 1 ☑ 2 ☐ 3

(iii) Wie lautet eine Zustandsraumdarstellung des Systems? (2 Punkte)

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + u$

☑ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

m) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 3) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 4) zu. (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	**Sprungantwort**	**Bode-Diagramm**
$G_1(s) = \dfrac{3}{s^2+s+4}$	A	C
$G_2(s) = \dfrac{(s+4)(s+3)}{s^2+4s+4}$	D	D
$G_3(s) = \dfrac{3}{s^2+2s+1}$	C	B
$G_4(s) = \dfrac{30(s+0.1)}{(s+1)(s+3)}$	B	A

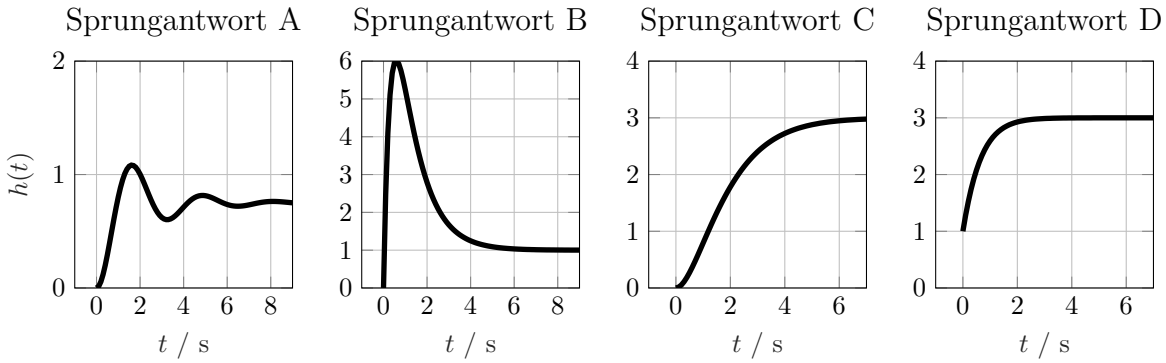


Abbildung 3: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s),\ i = 1 \ldots 4$

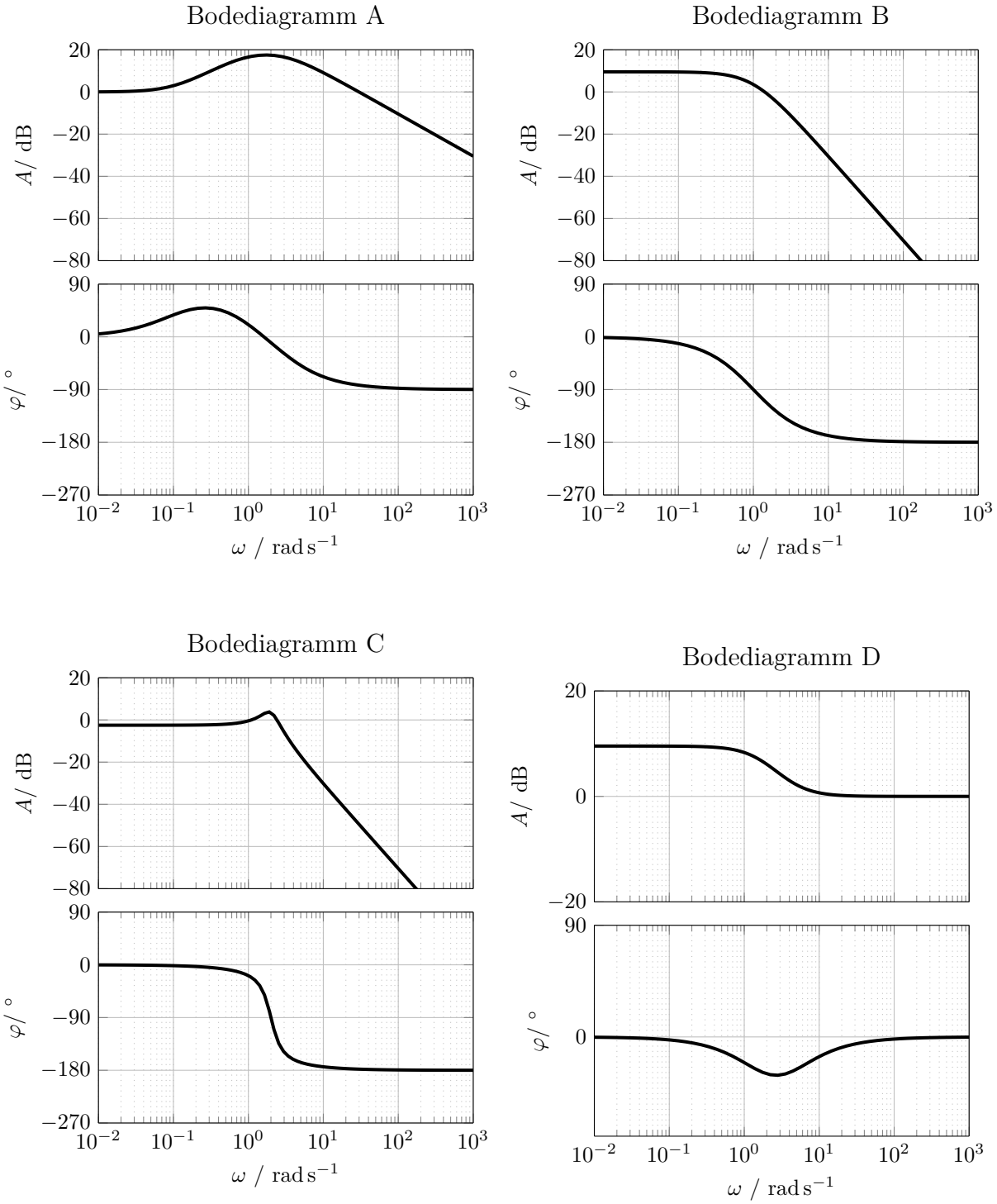


Abbildung 4: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s),\ i = 1 \ldots 4$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingängen $U(s)$ und $D(s)$ sowie Ausgang $Y(s)$.

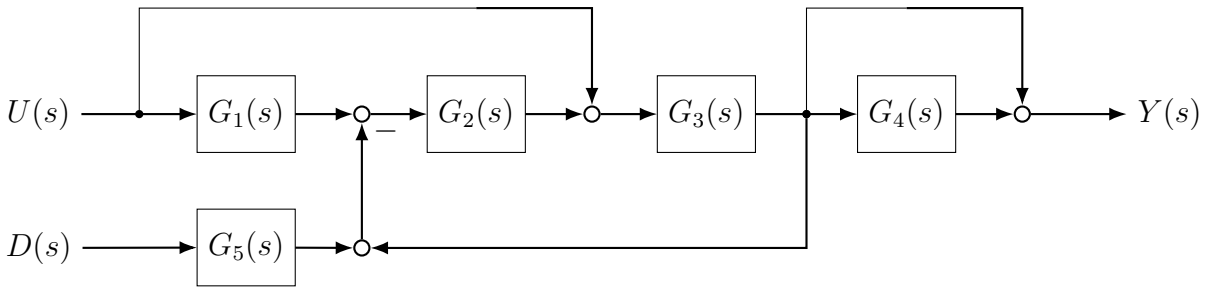


Abbildung 5: Blockschaltbild

Hinweis: Aufgabenteile a), b), c) und d) können unabhängig von den vorherigen Aufgabenteilen bearbeitet werden.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_U(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $D(s) = 0$ an. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_D(s) = Y(s)/D(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $U(s) = 0$ an. (2 Punkte)

c) Geben Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$ und $D(s)$ sowie $G_U(s)$ und $G_D(s)$ an. Sie brauchen die Terme nicht einzusetzen. (1 Punkt)

d) Im Folgenden gilt

$$G_1(s) = 1,\ G_2(s) = k_1,\ G_3(s) = \frac{k_2}{s},\ G_4(s) = G_5(s) = 0$$

für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ unbekannte Parameter sind. Setzen Sie die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme in die Gleichung für $Y(s)$ ein und vereinfachen Sie hierbei die Brüche so weit es geht. (2 Punkte)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil c) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie mit folgendem Zusammenhang weiter:

$$Y(s) = \frac{(G_2+1)G_1G_3(1-G_4)}{(1+G_1G_2G_3)}U(s) + \frac{G_1G_3(1+G_4)G_5^2}{(1-G_1G_2G_3)}D(s)$$

e) Für welche Werte von k_1, k_2 ist die verbliebene Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 2.

a) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion $G_U(s)$ wird eine Hilfsgröße eingeführt. Im Folgenden wird angenommen, dass die Signale $Y_i(s)$ die Ausgänge der Teilsystems G_i repräsentieren. Es lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$Y(s) = G_4 X_1(s) + X_1(s) \tag{1}$$
$$X_1(s) = G_3 \left[U(s) + G_2 \left[G_1 U(s) - X_1(s)\right]\right] \tag{2}$$
$$= U(s) \left[1 + G_1 G_2\right] G_3 - G_2 G_3 X_1(s) \tag{3}$$

Auflösen ergibt dann

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = 1 + G_4 \tag{4}$$
$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{(1 + G_1 G_2) G_3}{1 + G_2 G_3} \tag{5}$$

Die Gesamtübertragungsfunktion ist damit

$$G_U(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)} \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{(1 + G_1 G_2) G_3 (1 + G_4)}{1 + G_2 G_3} \tag{6}$$

b) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion $G_D(s)$ kann diesselbe Hilfsgröße wieder verwendet werden. Es lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$Y(s) = G_4 X_1(s) + X_1(s) \tag{7}$$
$$X_1(s) = -G_2 G_3 X_1(s) - G_2 G_3 G_5 D(s) \tag{8}$$

Auflösen ergibt dann

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = 1 + G_4 \tag{9}$$
$$\frac{X_1(s)}{D(s)} = -\frac{G_2 G_3 G_5}{1 + G_2 G_3} \tag{10}$$

Die Gesamtübertragungsfunktion ist damit

$$G_D(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)} \frac{X_1(s)}{D(s)} = -\frac{G_2 G_3 G_5 (1 + G_4)}{1 + G_2 G_3} \tag{11}$$

c) Der Ausgang $Y(s)$ ergibt sich aus dem Einfluss beider Eingänge deren Übertragungsfunktionen zuvor berechnet wurden. Das heißt

$$Y(s) = G_U(s) U(s) + G_D(s) D(s) \tag{12}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

d) Einsetzen der Übertragungsfunktionen aus a) und b) ergibt

$$Y(s) = \frac{(1 + G_1G_2)G_3(1 + G_4)}{1 + G_2G_3}U(s) - \frac{G_2G_3G_5(1 + G_4)}{1 + G_2G_3}D(s) \tag{13}$$

Mit den Übertragungsfunktionen aus der Aufgabenstellung ergibt sich dann

$$Y(s) = \frac{\frac{k_1k_2}{s} + \frac{k_2}{s}}{1 + \frac{k_1k_2}{s}}U(s) = \frac{k_1k_2 + k_2}{s + k_1k_2}U(s) \tag{14}$$

Alternative Lösung: Einsetzen der Übertragungsfunktionen führt zu der gleichen Übertragungsfunktion (14).

e) Für die asymptotische Stabilität des Ausgangsverhaltens wird das Vorzeichen des einzigen Pols $s_1 = -k_1k_2$ der Übertragungsfunktion $\frac{Y(s)}{U(s)}$ untersucht. Für asymptotische Stabilität muss gelten:

$$s_1 = -k_1k_2 < 0 \tag{15}$$

Damit gibt es 2 Fälle in denen das Ausgangsverhalten asymptotische stabil ist.
1.Fall: $k_1, k_2 > 0$
2.Fall: $k_1, k_2 < 0$.

Aufgabe 3. (8 Punkte)

Die Übertragungsfunktion eines linearen, zeitinvarianten Systems lautet

$$G_1(s) = \frac{80\,s}{s^2 + 100} + \frac{1}{4s}.$$

Hinweis: Aufgabenteile b), d) und e) können unabhängig von den vorherigen bearbeitet werden.

a) Ist das System asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil? Bergründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Impulsantwort für $t \to \infty$ gegen keinen Grenzwert konvergiert. (1 Punkt)

Im Folgenden wird die Übertragungsfunktion modifiziert zu

$$G_2(s) = \frac{80\,(s+1)}{(s+1)^2 + 100} + \frac{1}{4\,s}.$$

d) Wie verändert sich dadurch die in Aufgabenteil b) bestimmte Impulsantwort? Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf von $g_2(t)$. (2 Punkte)

e) Geben Sie die Differentialgleichung zur Übertragungsfunktion $G_2(s)$ an. Die unbekannten Anfangsbedingungen können dabei zu Null gesetzt werden. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 3.

a) Die Pole des Systems liegen bei $s_{1,2} = \pm 10\,i$ und $s_3 = 0$. Das konjugiert komplexe Polpaar hat den Realteil 0 und ist damit grenzstabil. Auch der einfache Pol $s_3 = 0$ ist grenzstabil. Damit ist das System insgesamt grenzstabil.

b) Für die Impulsantwort gilt $g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$. Laplace-Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe der Korrespondenzen führt auf

$$g(t) = 80\cos(10\,t) + \frac{1}{4}.$$

c) Der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)$ ist nicht definiert. Der Cosinus-Term konvergiert nicht sondern schwingt für alle Zeiten.

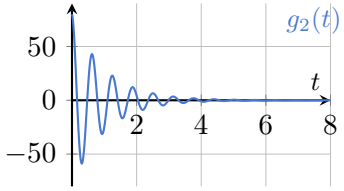
Anmerkung: Der Endwertsatz der Laplace-Transformation ist hier nicht anwendbar. Dieser ist nur definiert wenn ein endlicher Grenzwert der Funktion im Zeitbereich (hier $g(t)$) existiert (siehe Anmerkung Hilfsblatt). Laut Aufgabenstellung ist dies jedoch nicht der Fall.

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

d) Der hintere Term bleibt unverändert, der zu einer Konstante $\frac{1}{4}$ führt. Im vorderen Teil hingegen wird gemäß Dämpfungsregel der Laplace-Transformation eine Dämpfung eingeführt, die im Zeitbereich zu einer Multiplikation mit $\mathrm{e}^{-1 \cdot t}$ führt. Dies bewirkt ein Abklingen der Schwingung.

Alternative: Anstelle der Dämpfungsregel könnte man auch die geänderte Korrespondenz verwenden, was ebenfalls auf den Term $\mathrm{e}^{-\frac{t}{1}} \cos \omega\, t$ führt.

Skizze (nur qualitativer Verlauf ist zum Erhalt der Punkte erforderlich):



e) Zunächst wird die Übertragungsfunktion auf einen Hauptnenner gebracht

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{320\, s(s+1) + (s+1)^2 + 100}{4s\left((s+1)^2 + 100\right)} \\ &= \frac{320s^2 + 320s + s^2 + 2s + 101}{4s\left(s^2 + 2s + 101\right)} \\ &= \frac{321s^2 + 322s + 101}{4s^3 + 8s^2 + 404s} \end{aligned}$$

Die dazugehörige Differentialgleichung lautet

$$4\dddot{y} + 8\ddot{y} + 404\dot{y} = 321\ddot{u} + 322\dot{u} + 101u$$

Aufgabe 4. (11 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die folgende Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 11\,\dot{y} + 28\,y = -a\ddot{u} - 7\,\dot{u} - 4\,u$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 1$$

und dem Parameter $a \geq 0$ beschrieben.
Hinweis: Aufgabenteil b) kann unabhängig von Aufgabenteil a) bearbeitet werden.

a) Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems an. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie nicht anzugeben. (1 Punkt)

b) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ und dem Parameter a an. (2 Punkte)

c) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an. (1 Punkt)

Im Folgenden gilt $a = 0$.

d) Zerlegen Sie die Übertragungfunktion in ihre einzelnen Moden, d.h.

$$Y(s) = \underbrace{\left(\sum_i \frac{z_i}{s + p_i}\right)}_{G(s)} U(s)$$

mit Zählerpolynom z_i und Polstellen p_i. (2 Punkte)

e) Ausgehend von der zerlegten Übertragungsfunktion aus d) lassen sich Zustandsgrößen definieren als

$$X_i(s) = \frac{z_i}{s + p_i} U(s).$$

Transformieren Sie diese Zustandsgrößen $X_i(s)$ in den Zeitbereich und stellen Sie damit Differentialgleichungen für die einzelnen Moden auf. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie nicht anzugeben. (3 Punkte)

f) Geben Sie eine modale Zustandsraumdarstellung des Systems an. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie hier auch nicht anzugeben. (2 Punkte)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Lösung Aufgabe 4.

a) Die Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -28 & -11 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -4-(-a)\cdot 28 & -7-(-a)\cdot 11 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -a \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} 28a-4 & 11a-7 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -a \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

ergibt sich direkt aus den Koeffizienten der Differentialgleichung.

b) Anwendung der Laplace-Transformation auf beide Seiten der DGL ergibt

$$\begin{aligned} & (s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 11(sY(s) - y(0)) + 28Y(s) \\ & \quad = -a(s^2U(s) - su(0) - \dot{u}(0)) - 7(sU(s) - u(0)) - 4U(s) \\ \Leftrightarrow \quad & (s^2 + 11s + 28)Y(s) - 2s - 22 = (-as^2 - 7s - 4)U(s) - a(-1).\end{aligned}$$

Umstellen nach $Y(s)$ ergibt

$$Y(s) = \frac{-as^2 - 7s - 4}{s^2 + 11s + 28}U(s) + \frac{2s + 22 + a}{s^2 + 11s + 28}$$

c) Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = \frac{-as^2 - 7s - 4}{s^2 + 11s + 28}.$$

d) Die Aufteilung der Übertragungsfunktion in Moden erfolgt mittels Partialbruchzerlegung. Die Pole berechnen sich zu $s_1 = -4,\ s_2 = -7$. Damit gilt

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{-7s - 4}{s^2 + 11s + 28} &= \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+7} \\ \Leftrightarrow \quad -7s - 4 = A(s+7) + B(s+4) &= (A+B)s + (7A + 4B)\end{aligned}$$

Damit erhält man für die Koeffizienten $A = 8$, $B = -15$ und somit gilt

$$G(s) = \frac{8}{s+4} + \frac{-15}{s+7}.$$

e) Gemäß Aufgabenstellung sind die Zustandsgrößen definiert als

$$X_1(s) = \frac{8}{s+4}U(s), \qquad X_2(s) = \frac{-15}{s+7}U(s).$$

Die Differentialgleichungen für diese beiden Moden ergeben sich durch Laplace-Rücktransformation von

$$X_1(s)(s+4) = 8U(s), \qquad X_2(s)(s+7) = -15U(s)$$

zu

$$\dot{x}_1 + 4x_1 = 8u, \qquad \dot{x}_2 + 7x_2 = -15u.$$

f) Die zuvor aufgestellten Differentialgleichungen für die einzelnen Moden lassen sich zusammenfassen in

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 8 \\ -15 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 5. (13 Punkte)
Gegeben sei das folgende System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_1: \qquad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad \underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Hinweis: Die Aufgabenteile c) und d) können unabhängig von den anderen bearbeitet werden.

a) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathrm{e}^{\underline{A}t}$ mit einer geeigneten Methode. (4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Lösung $\underline{x}(t)$ des Systems für einen konstanten Eingang $u(t) = u_0$, $t \geq 0$. (3 Punkte)

c) Geben Sie zunächst in Abhängigkeit einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A},\ \underline{b},\ \underline{c},\ d\}$ (d.h. ohne die obigen Zahlenwerte einzusetzen) mit zwei Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$) die Berechnungsvorschrift an, mit der die Transformationsmatrix für die Transformation auf Regelungsnormalform bestimmt werden kann.
Setzen Sie dann das gegebene $\{\underline{A},\ \underline{b},\ \underline{c},\ d\}$ ein. Welches Problem tritt dabei auf, sodass keine reguläre Transformation berechnet werden kann? (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems. (2 Punkte)

e) Geben Sie zu der Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil d) eine Zustandsraumdarstellung an. Vergleichen Sie diese mit der ursprünglichen Zustandsraumdarstellung Σ_1. Was fällt Ihnen auf? (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 5.

a) **Variante 1:** Mittels inverser Laplace-Transformation $\mathrm{e}^{\underline{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\{(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\}$:

$$(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+4 & -8 \\ 0 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+4)(s+6)} \begin{bmatrix} s+6 & 8 \\ 0 & s+4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} & \frac{8}{(s+4)(s+6)} \\ 0 & \frac{1}{s+6} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} & \frac{4}{s+4} - \frac{4}{s+6} \\ 0 & \frac{1}{s+6} \end{bmatrix},$$

wobei eine Partialbruchzerlegung des (2,1)-Eintrags durchgeführt wurde.

$$\begin{aligned}\frac{8}{(s+4)(s+6)} &= \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+6} \\ &\Leftrightarrow 8 = A(s+6) + B(s+4) \\ &\Leftrightarrow 8 = s(A+B) + 6A + 4B \qquad \Rightarrow A = -B \\ &\Rightarrow 8 = 6A - 4A \qquad \Rightarrow A = 4, \quad \Rightarrow B = -4\end{aligned}$$

Laplace-Rücktransformation in den Zeitbereich führt auf die Transitionsmatrix

$$\mathrm{e}^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-4t} & 4\left(\mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-6t}\right) \\ 0 & \mathrm{e}^{-6t} \end{bmatrix}.$$

b) Die Lösung der Zustandsgleichung lautet

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \mathrm{e}^{\underline{A}(t-t_0)}\underline{x}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-4t} + 8\left(\mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-6t}\right) \\ 2\mathrm{e}^{-6t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^{-4(t-\tau)}u_0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= \begin{bmatrix} 9\mathrm{e}^{-4t} - 8\mathrm{e}^{-6t} \\ 2\mathrm{e}^{-6t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\left[\mathrm{e}^{-4(t-\tau)}\right]_{\tau=0}^{t} u_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9\mathrm{e}^{-4t} - 8\mathrm{e}^{-6t} \\ 2\mathrm{e}^{-6t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3u_0}{4}(1 - \mathrm{e}^{-4t}) \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Variante 2: Mittels Ähnlichkeits-Transformation

c) Die allgemeine Formel für die Transformationsmatrix $\underline{T}_\mathrm{R}$ zur Transformation auf Regelungsnormalform lautet für ein System mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

$$\underline{T}_\mathrm{R} = \begin{bmatrix} \underline{s}_\mathrm{R}^T \\ \underline{s}_\mathrm{R}^T \underline{A} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Dabei bezeichnet $\underline{s}_\mathrm{R}^T$ die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix, also

$$\underline{s}_\mathrm{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{A}\,\underline{B} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Für das vorliegende System ist letzteres

$$\underline{s}_{\mathrm{R}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Die Matrix $[\underline{B} \quad \underline{A}\,\underline{B}]$ hat jedoch keinen vollen Rang, sodass ihre Inverse nicht existiert. Damit kann keine reguläre Transformation $\underline{T}_{\mathrm{R}}$ berechnet werden.

d) Die Übertragungsfunktion berechnet sich gemäß Formel als

$$\begin{aligned} G(s) &= \underline{c}^T (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b} + d \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} & \frac{4}{s+4} - \frac{4}{s+6} \\ 0 & \frac{1}{s+6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{15}{s+4}. \end{aligned}$$

Das ursprüngliche System hat zwei Zustände ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$), die dazugehörige Übertragungsfunktion jedoch nur eine Polstelle.
Interpretation (in der Klausur nicht erforderlich): Eine Übertragungsfunktion beschreibt das Übertragungsverhalten vom Systemeingang („Anregung“) zum Systemausgang („Messwert“). Der Zustand x_2 hängt jedoch nicht von u ab, weder direkt über $\underline{b}$, noch indirekt über x_1. Daher ist x_2 nicht Teil des Übertragungsverhaltens von u nach y und damit auch nicht der Übertragungsfunktion.

e) Zu der Übertragungsfunktion aus d) lautet die Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\mathrm{R}} &= -4x_{\mathrm{R}} + u \\ y &= 15x_{\mathrm{R}}. \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass diese Darstellung nur einen Zustand hat, wohingegen Σ_1 zwei Zustände hat.
Interpretation (in der Klausur nicht erforderlich): Da die Übertragungsfunktion aus d) nur eine Polstelle hat, hat die dazugehörige RNF auch nur einen Zustand. Der Teil der Systemdynamik, der nicht am Übertragungsverhalten beteiligt ist, fiel beim Aufstellen der Übertragungsfunktion weg. Für das reduzierte System ist die RNF definiert, während für das ursprüngliche System keine RNF exisistiert.

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Die Interaktion von Licht mit Materie ist ein grundlegendes Problem der Quantenoptik. Insbesondere soll im Folgenden untersucht werden wie ein Elektron auf elektromagnetische Strahlung

$$E(t) = \hat{E}\,\cos\left(\omega_F\, t\right) \tag{16}$$

mit Amplitude $\hat{E}$ und Kreisfrequenz ω_F reagiert. Quantenphysikalisch wird in diesem Zusammenhang von einem *Zwei-Niveau-System* ausgegangen: Es gibt einen Grund- sowie einen angeregten Zustand. Wird das Elektron mit seiner charakteristischen Resonanzfrequenz ω_R bestrahlt, geht es in den angeregten Zustand über – um direkt wieder in seinen Grundzustand zurückzufallen. Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Grundzustand vorzufinden, ist gegeben durch $|\alpha|^2$, während $|\beta|^2$ die Wahrscheinlichkeit beschreibt, das Elektron im angeregten Zustand zu finden. Offensichtlich gilt $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Die Wahrscheinlichkeiten gehorchen den komplexwertigen gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{j}{2}\hat{E}\,\beta - \frac{j}{2}(\omega_F - \omega_R)\alpha,\\ \dot{\beta} &= \frac{j}{2}\hat{E}\,\alpha + \frac{j}{2}(\omega_F - \omega_R)\beta.\end{aligned} \tag{17}$$

Es wird davon ausgegangen, dass sich das Elektron anfangs im Grundzustand befindet:

$$\alpha(0) = 1,\ \beta(0) = 0 \tag{18}$$

a) Stellen Sie eine nichtlineare Zustandsraumdarstellung für das Gesamtsystem auf. Verwenden Sie dazu den Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix}\alpha, & \beta\end{bmatrix}^\top$, den Eingang $u = \omega_F$, und den Ausgang $y = \beta$. Geben Sie auch die Anfangsbedingungen an. (3 Punkte)

b) Linearisieren Sie das System um den allgemeinen Arbeitspunkt $\underline{x}_S$ mit dem Eingang $u_S = \omega_R$. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Pole des linearisierten Systems. Wie interpretieren Sie deren Lage? (1 Punkt)

d) Die in System (17) angegebenen Systemgleichungen wurden durch das Anwenden einer Koordinaten-Transformation hergeleitet. Bestimmen Sie mithilfe der inversen Koordinaten-Transformation

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \alpha\,\mathrm{e}^{\frac{j}{2}(\omega_F-\omega_R)t},\\ \tilde{\beta} &= \beta\,\mathrm{e}^{-\frac{j}{2}(\omega_F-\omega_R)t}\end{aligned}$$

die ursprünglichen dynamischen Gleichungen. Transformieren Sie ebenfalls die Anfangsbedingung (18). (3 Punkte)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Lösung Aufgabe 6.

a) Einsetzen liefert:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\frac{j}{2}\begin{bmatrix}\omega_R x_1 + \hat{E}x_2 - ux_1\\ \hat{E}x_1 - \omega_R x_2 + ux_2\end{bmatrix}}_{=f}, \quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$y = x_2 \tag{20}$$

b) Die Linearisierungsvorschrift lautet $\Delta\dot{x} = f(x_S,\, u_S) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_S,\, u_S}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x_S,\, u_S}\Delta u$

$$f(x_S,\, u_S) = \frac{j}{2}\begin{bmatrix}\hat{E}x_{2,S}\\ \hat{E}x_{1,S}\end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_S,\, u_S} = \frac{j}{2}\begin{bmatrix}0 & \hat{E}\\ \hat{E} & 0\end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x_S,\, u_S} = \frac{j}{2}\begin{bmatrix}-x_{1,S}\\ x_{2,S}\end{bmatrix} \tag{23}$$

Die Ausgangsgleichung ist bereits linear.

c) Pole aus Systemmatrix:

$$\begin{bmatrix}s & -\frac{i}{2}\hat{E}\\ -\frac{j}{2}\hat{E} & s\end{bmatrix} \longrightarrow s^2 + \frac{1}{4}\hat{E}^2 = 0 \tag{24}$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = \pm j\frac{\hat{E}}{2} \tag{25}$$

konj. komplexes Polpaar $\rightarrow$ System schwingt zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand

d) Differenzieren der Transformationsvorschrift liefert

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\alpha}} &= \frac{j}{2}\,\hat{E}\,\mathrm{e}^{j(\omega_F-\omega_R)t}\,\tilde{\beta}\\ \dot{\tilde{\beta}} &= \frac{j}{2}\,\hat{E}\,\mathrm{e}^{-j(\omega_F-\omega_R)t}\,\tilde{\alpha}.\end{aligned} \tag{26}$$

Ebenso ergibt sich für die Anfangsbedingung

$$\tilde{\alpha}(0) = \alpha(0) = 1,\, \tilde{\beta}(0) = \beta(0) = 0. \tag{27}$$

Anmerkung: Da $|\mathrm{e}^{jx}| = 1$ beschreibt $|\tilde{\alpha}|^2$ ebenso wie $|\alpha|^2$ die Wahrscheinlichkeit des Elektrons im Grundzustand zu sein.

Aufgabe 7. (11 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + s^{-1} + 1 + 1^{-1}}{s^3 + 0.1\,s^2 + 100\,s + 10}\ .$$

a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar). *Hinweis: Ein Pol der Übertragungsfunktion liegt bei* $s_1 = -0.1$. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplituden- und Phasengang des Systems. (4 Punkte)

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs. Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (5 Punkte)

Lösung Aufgabe 7.

a) Ausklammern von s^{-1} im Zähler und faktorisieren im Nenner liefert:

$$s^{-1}\frac{1}{s+0.1}(s+1)(s+1)\frac{1}{s^2+100} \tag{28}$$

b) Mit $s = j\omega$ ergibt sich der Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\frac{1}{j\omega+0.1}(j\omega+1)(j\omega+1)\frac{1}{100-\omega^2} \tag{29}$$

$$= \frac{-j}{\omega}\frac{0.1-j\omega}{\omega^2+0.01}(1-\omega^2+2j\omega)\frac{1}{100-\omega^2} \tag{30}$$

der Amplitudengang

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\omega^2+0.01}}\sqrt{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}\frac{1}{100-\omega^2} \tag{31}$$

und der Phasengang

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{atan2}\left(2w, 1-\omega^2\right) - \operatorname{atan}(10\omega) \tag{32}$$

Auswerten der atan2-Funktion ergibt

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{atan}\left(\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\right) - \operatorname{atan}(10\omega) & 0 < \omega \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{atan}\left(\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\right) - \operatorname{atan}(10\omega) & 10 < \omega \end{cases} \tag{33}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

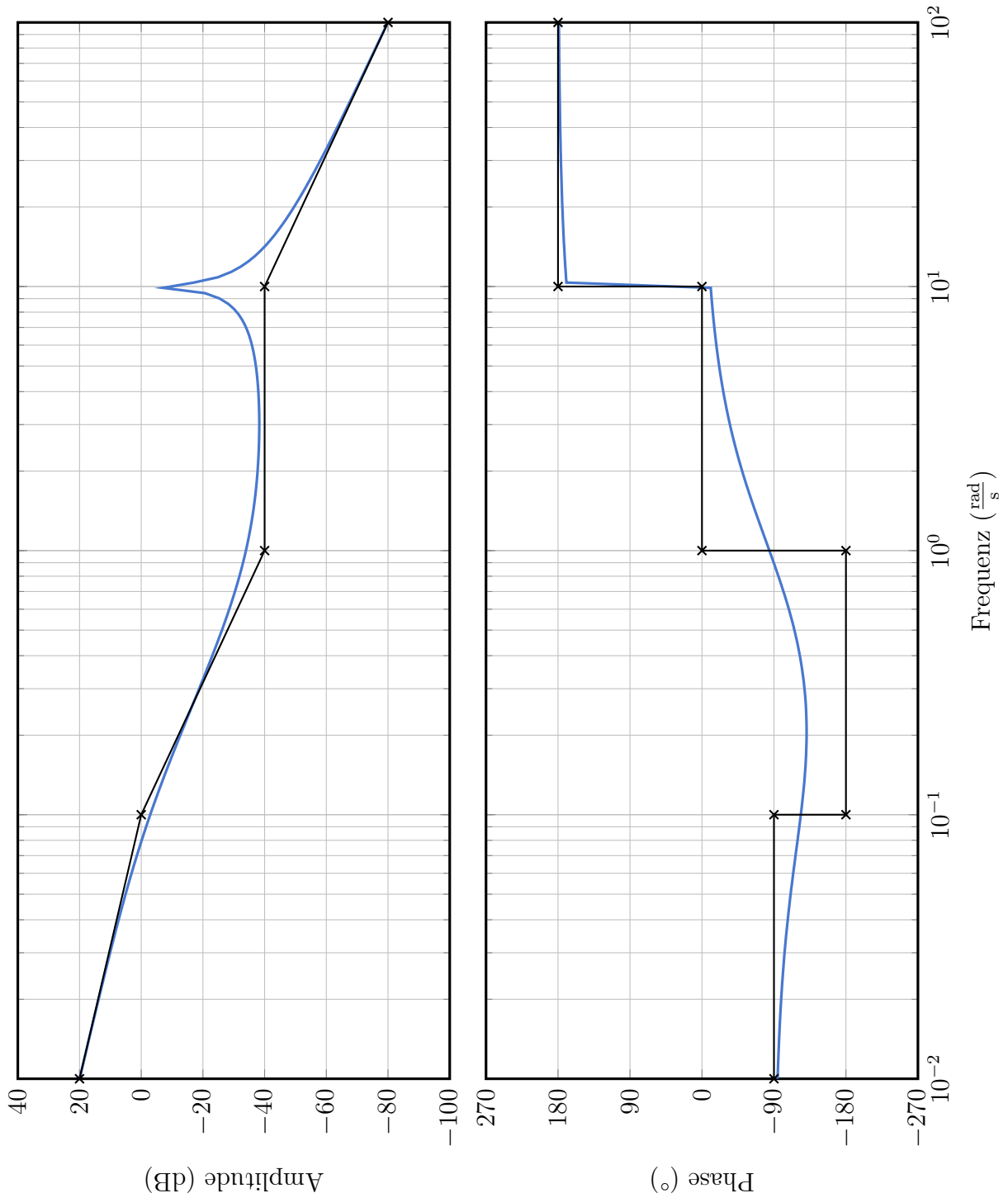
c) Für das Zeichnen werden folgende Werte benötigt

$$c = 1,\ r = -1,\ \omega_{min} = \frac{1}{10},\ G^*(0) = \frac{1}{10}$$

$$A_{\mathrm{dB}}(\omega_{min}) = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{1}{10}\right| \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}\right) = 0\,\mathrm{dB} \tag{34}$$

$$c \cdot G^*(0) = \frac{1}{10} > 0 \Rightarrow \varphi(0) = (-1) \cdot 90^\circ = -90^\circ \tag{35}$$

$$p_1 = \frac{1}{10},\ n_1 = 1,\ n_2 = 1,\ q_4 = 10 \tag{36}$$


Amplitude (dB)
40
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
Phase (°)
270
180
90
0
−90
−180
−270
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequenz $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$