



UNIVERSITÄT STUTTGART
Institut für Systemdynamik

Prüfung im Fach **Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik**

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer

Sommersemester 2022

am 15.08.2022, 12:00 – 13:30 Uhr

Bitte tragen Sie auf diesem Doppelblatt Ihren Namen, Ihre Fachrichtung und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Lösungsblätter mit Ihrem Namen und legen Sie diese Blätter in das Doppelblatt ein.

Name, Vorname: _____

Studiengang: _____ Matr.-Nr: _____

Zugelassen sind alle nicht-elektronischen Hilfsmittel sowie ein nicht-vernetzbarer nicht-grafikfähiger Taschenrechner. Zugelassene Taschenrechner sind in einer Liste vermerkt, die vorab vom Institut für Systemdynamik zur Verfügung gestellt wurde.

Zur Kenntnis genommen: _____ (Unterschrift)

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	29	
2	9	
3	8	
4	12	
5	13	
6	8	
7	11	
insgesamt	90	

Korrektur: _____

Prüfer: _____

Einsicht: _____

Note: _____

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (29 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen. In dieser Aufgabe werden keine Teilergebnisse oder Rechenwege bepunktet.

- a) Welche Eigenschaften besitzt das System $\ddot{y} + 2t\dot{y} + y = \ddot{u} + 2t\dot{u} + u$? (1 Punkt)
- ☐ Linear
- ☐ Zeitinvariant
- b) Die Sprungantwort eines unbekannten Systems konvergiert gegen einen endlichen, konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$, also $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = c$. Kann das System asymptotisch stabil sein? (1 Punkt)
- ☐ Wahr
- ☐ Falsch
- c) Das Vorzeichen eines Pols hat im Bodediagramm Einfluss auf den Amplitudengang. (1 Punkt)
- ☐ Wahr
- ☐ Falsch
- d) Eine Reihenschaltung von asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen kann instabil sein. (1 Punkt)
- ☐ Wahr
- ☐ Falsch
- e) Abbildung 1 zeigt drei Sprungantworten eines unbekannten Systems. Die Sprunghöhen des Eingangssignals waren hierbei:

$$u_1(t) = \sigma(t), \quad u_2(t) = 2\sigma(t), \quad u_3(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

Kann das unbekannte System linear sein? (2 Punkte)

- ☐ Ja
- ☐ Nein

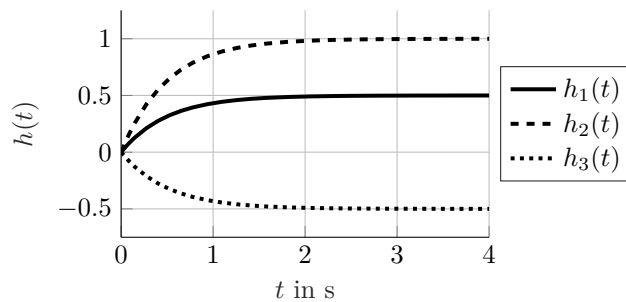


Abbildung 1: Sprungantworten $h_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ des Systems

f) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{s - 2}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} \cdot \frac{5}{s + 1}$$

☐ Ja

☐ Nein

g) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{5s^2 + s + 10}{10s^3 + 1}.$$

(i) Welche Aussage trifft auf die Impulsantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☐ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 0.5$ ☐ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 2$

(ii) Welche Aussage trifft auf die Sprungantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 10$ ☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 0.1$

h) Geben Sie eine Differentialgleichung zu der Übertragungsfunktion

$$G_3(s) = \frac{3}{s + 2} e^{-4s}$$

ohne Anfangsbedingung an. (2 Punkte)

- i) Geben Sie die asymptotische Steigung der Amplitudengänge $\frac{dA_4(\omega)}{d\omega}$ und $\frac{dA_5(\omega)}{d\omega}$ in dB/Dek des Frequenzgangs der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_4(s) = \frac{2}{s^2} \cdot \frac{s+5}{s^2+7s+12}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} = \boxed{}$$

$$G_5(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{s^3+6s^2+3s-10}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_5(\omega)}{d\omega} = \boxed{}$$

- j) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Phasengänge $\varphi_3(\omega)$ und $\varphi_4(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an. (4 Punkte)

Hinweis: Eine Nullstelle des Nennerpolynoms von $G_5(s)$ ist $s_1 = 1$.

$$G_4(s) = \frac{2}{s^2} \cdot \frac{s+5}{s^2+7s+12}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_4(\omega) = \boxed{}$$

$$G_5(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{s^3+6s^2+3s-10}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_5(\omega) = \boxed{}$$

- k) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \cos(\dot{y}) \ln(y) = u^2$$

um die Ruhelage $y_S = e$, $u_S = 1$. (3 Punkte)

$$\square \Delta \ddot{y} + e \Delta y = 2 \Delta u \quad \square \Delta \ddot{y} + \Delta \dot{y} + e \Delta y = -2 \Delta u$$

$$\square \Delta \ddot{y} + \Delta \dot{y} + e \Delta y = 2 \Delta u \quad \square \Delta \ddot{y} + \frac{1}{e} \Delta y = 2 \Delta u$$

1) Gegeben sei das System Σ_6 mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}\Sigma_6 : \quad 3\dot{x}_1 &= -6x_1 + 3x_2 + 6u \\ \dot{x}_2 &= -2(x_2 + u) \\ y &= x_1 - x_2.\end{aligned}$$

(i) Wie lautet das Zustandsraummodell in Matrix-Schreibweise? (2 Punkte)

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

(ii) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (1 Punkt)

- ☐ asymptotisch stabil
- ☐ instabil
- ☐ grenzstabil

(iii) Existiert eine eindeutige Zustandsraumtransformation $x = Tz$ um das System Σ_6 durch die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}\end{aligned}$$

zu beschreiben? (1 Punkt)

- ☐ Ja
- ☐ Nein

- m) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 2) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 3) zu. (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Sprungantwort	Bode-Diagramm
$G_1(s) = \frac{5}{s+5}e^{-s}$		
$G_2(s) = \frac{11}{2s^2+4s+11}$		
$G_3(s) = \frac{4s^2}{2(s+0.5)(s+1)}$		
$G_4(s) = \frac{s^2+10s}{s^2+15s+50}$		

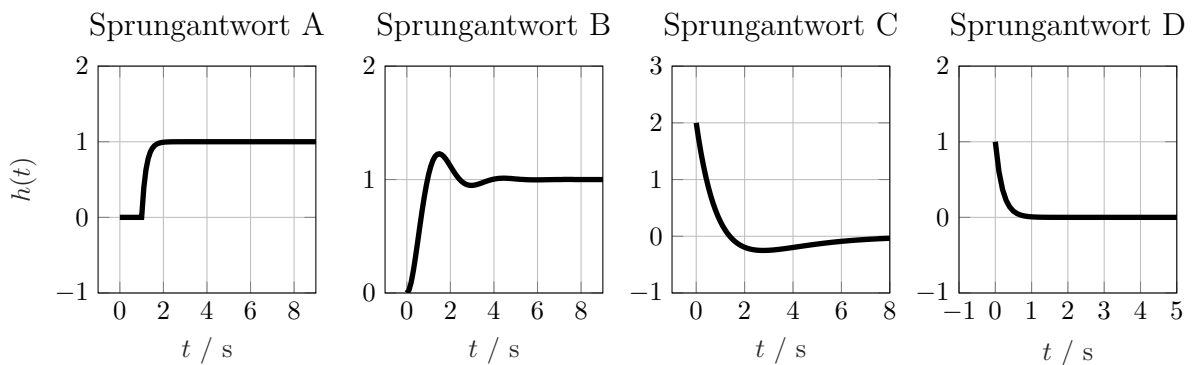


Abbildung 2: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

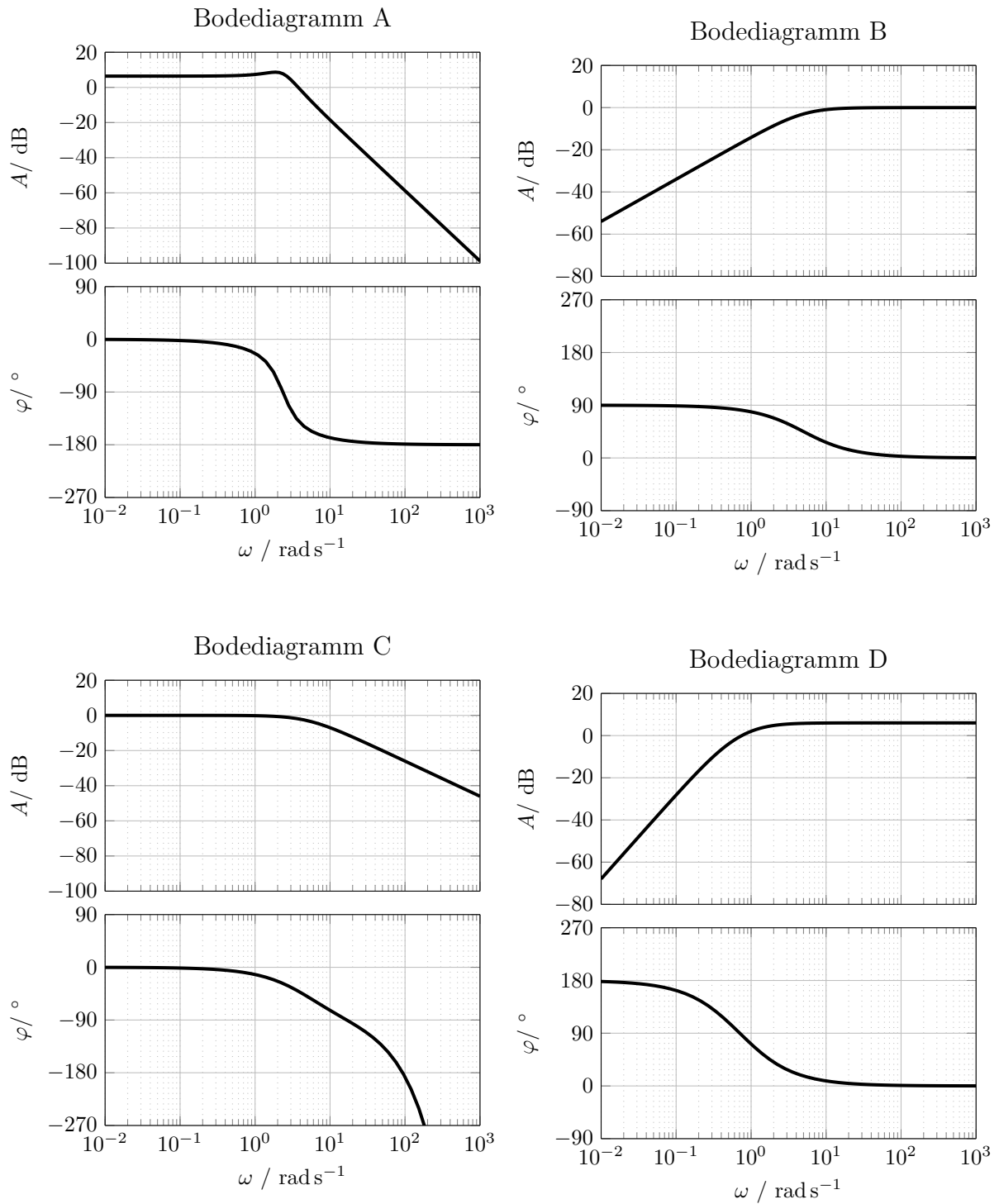


Abbildung 3: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingängen $U(s)$ und $D(s)$ sowie Ausgang $Y(s)$.

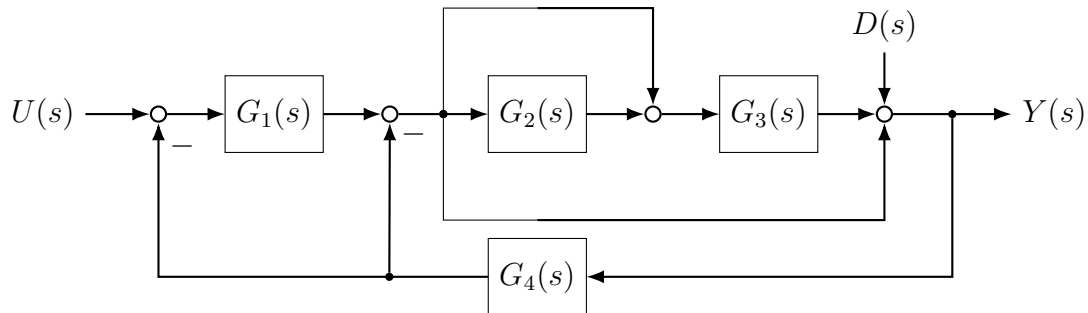


Abbildung 4: Blockschaltbild

Hinweis: Aufgabenteile a), b), c) und d) können unabhängig von den vorherigen Aufgabenteilen bearbeitet werden.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_U(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $D(s) = 0$ an. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_D(s) = Y(s)/D(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $U(s) = 0$ an. (2 Punkte)
- Geben Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$ und $D(s)$ sowie $G_U(s)$ und $G_D(s)$ an. Sie brauchen die Terme nicht einzusetzen. (1 Punkt)
- Im Folgenden gilt

$$G_1(s) = 0, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+2}, \quad G_3(s) = a, \quad G_4(s) = 1$$

für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ein unbekannter Parameter ist. Setzen Sie die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme in die Gleichung für $Y(s)$ ein und vereinfachen Sie hierbei die Brüche so weit es geht. (2 Punkte)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil c) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie mit folgendem Zusammenhang weiter:

$$Y(s) = \frac{G_1^2(1 + G_3 + G_2G_3)}{1 + (1 + G_3 + G_2G_3)(1 - G_1)G_4}U(s) + \frac{1 - G_1}{1 + (1 + G_3 + G_2G_3)(1 - G_1)G_4}D(s)$$

- Für welche Werte von $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist die verbliebene Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (1 Punkt)

Aufgabe 3. (8 Punkte)

Die Übertragungsfunktion eines linearen, zeitinvarianten Systems Σ_1 lautet

$$G_1(s) = \frac{-3}{s^2 + 4s + 13}.$$

Hinweis: Aufgabenteile b) und c) können unabhängig von den vorherigen bearbeitet werden.

- a) Ist das System asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems. (2 Punkte)

Im Folgenden wird das System Σ_1 mit einem weiteren System Σ_2 gemäß Abbildung 5 verschaltet. Das System Σ_2 wird durch die Gleichung

$$u_1(t) = 2 \int_0^t u_2(\tau) d\tau$$

beschrieben.

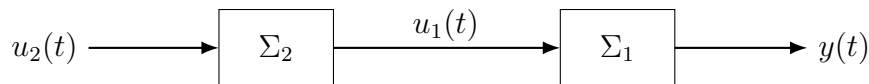


Abbildung 5: Verschaltung der Teilsysteme

- c) Geben Sie die Übertragungsfunktion von Σ_2 an. Ist Σ_2 asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)
- d) Geben Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems aus Abbildung 5 an. (1 Punkt)
- e) Geben Sie die Differentialgleichung des Gesamtsystems an. Die unbekannten Anfangsbedingungen können dabei zu Null gesetzt werden. (1 Punkt)
- f) Wie viele Zustände hat das System? (1 Punkt)

Aufgabe 4. (12 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die folgende Differentialgleichung

$$-2\ddot{y} - 24\dot{y} - 54y = -\dot{u} + 9u$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad u(0) = 2$$

beschrieben.

Hinweis: Aufgabenteil b) kann unabhängig von Aufgabenteil a) bearbeitet werden.

- a) Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems an. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie nicht anzugeben. (2 Punkte)
- b) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an. (2 Punkte)
- c) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an. (1 Punkt)
- d) Zerlegen Sie die Übertragungsfunktion in ihre einzelnen Moden, d.h.

$$Y(s) = \underbrace{\left(\sum_i \frac{z_i}{s + p_i} \right)}_{G(s)} U(s)$$

mit Zählerpolynom z_i und Polstellen p_i . (2 Punkte)

- e) Ausgehend von der zerlegten Übertragungsfunktion aus d) lassen sich Zustandsgrößen definieren als

$$X_i(s) = \frac{z_i}{s + p_i} U(s).$$

Transformieren Sie diese Zustandsgrößen $X_i(s)$ in den Zeitbereich und stellen Sie damit Differentialgleichungen für die einzelnen Moden auf. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie nicht anzugeben. (3 Punkte)

- f) Geben Sie eine modale Zustandsraumdarstellung des Systems an. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie hier auch nicht anzugeben. (2 Punkte)

Aufgabe 5. (13 Punkte)

Gegeben sei das folgende System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_1 : \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} u, & \underline{x}(t=0) &= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Aufgabenteile c) und d) können unabhängig von den anderen bearbeitet werden.

- a) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (4 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Lösung $\underline{x}(t)$ des Systems für einen konstanten Eingang $u(t) = u_0$, $t \geq 0$! (3 Punkte)
- c) Geben Sie zunächst in Abhängigkeit einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ (d.h. ohne die obigen Zahlenwerte einzusetzen) mit zwei Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$) die Berechnungsvorschrift an, mit der die Transformationsmatrix für die Transformation auf Regelungsnormalform bestimmt werden kann!
Setzen Sie dann das gegebene $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ ein! Welches Problem tritt dabei auf, sodass keine reguläre Transformation berechnet werden kann? (2 Punkte)
- d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems! (2 Punkte)
- e) Geben Sie zu der Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil d) eine Zustandsraumdarstellung an! Vergleichen Sie diese mit der ursprünglichen Zustandsraumdarstellung Σ_1 . Was fällt Ihnen auf? (2 Punkte)

Aufgabe 6. (8 Punkte)

Das Lotka-Volterra-Modell ist ein System aus zwei nicht-linearen, gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung. Es beschreibt die Wechselwirkung von Räuber- und Beutepopulationen. Mit Räubern und Beute sind zwei Klassen von Lebewesen gemeint, deren eine sich von der anderen ernährt. Die gekoppelte Populationsdynamik wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1(t) (\alpha - \beta N_2(t)), \\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2(t) (\gamma - \delta N_1(t)),\end{aligned}$$

wobei $N_1(t)$ die Anzahl der Beutewesen und $N_2(t)$ die Anzahl der Räuber darstellt. Fernerhin ist $\alpha > 0$ die ungestörte Reproduktionsrate der Beute, $\beta > 0$ die Sterberate der Beute pro Räuber, $\gamma > 0$ die Sterberate der Räuber sofern keinerlei Beute vorhanden ist, sowie $\delta > 0$ die Reproduktionsrate der Räuber pro Beutewesen.

Im Rahmen dieser Aufgabe wird angenommen, dass die Reproduktionsrate der Beutetiere $\alpha = \alpha(t) > 0$ über das Nahrungsangebot beeinflusst werden kann. Zu Anfang seien in einem gegebenen Biotop 1000 Beutetiere und 40 Räuber.

- Stellen Sie eine nichtlineare Zustandsraumdarstellung für das Gesamtsystem auf. Verwenden Sie dazu den Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}^\top$, den Eingang $u = \alpha$, sowie den Ausgang $y = N_2$. Geben Sie auch die Anfangsbedingungen an. (2 Punkte)
- Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems unter der Annahme eines konstanten Eingangs $u_S = \alpha^*$. (2 Punkte)
- Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $\underline{x}_S = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} & \frac{\alpha^*}{\beta} \end{bmatrix}^\top$ mit dem konstanten Eingang $u_S = \alpha^*$. (3 Punkte)
- Berechnen Sie die Eigenwerte des linearisierten Systems und charakterisieren Sie dessen Stabilität. (1 Punkt)

Aufgabe 7. (11 Punkte)

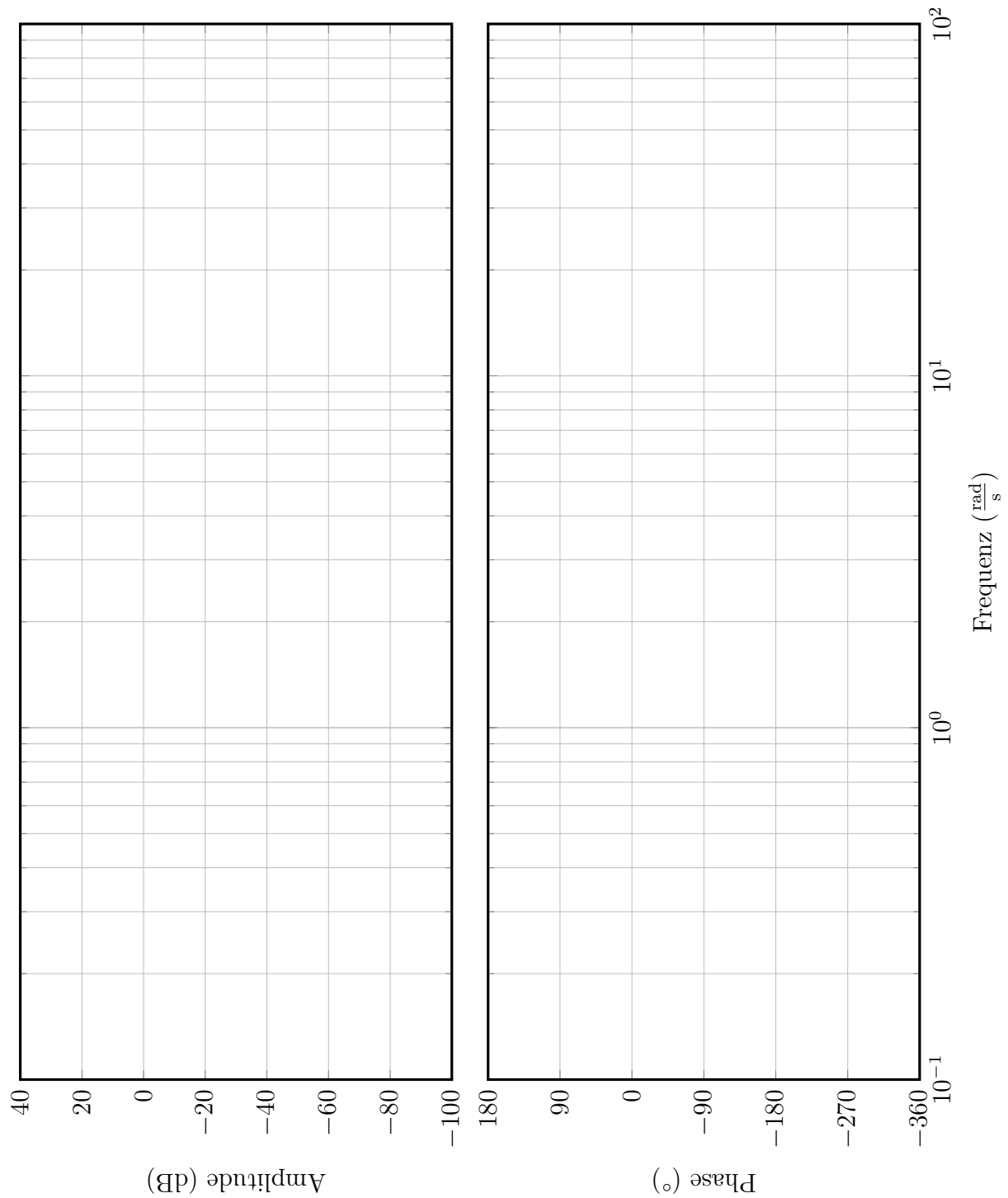
Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = s^2 \frac{s(s+2) + 3(s+2)}{s(4s^2 + 8s + 4)(s-5)} .$$

- a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar). (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplituden- und Phasengang des Systems. (4 Punkte)
- c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs. Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (5 Punkte)

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 15 und 16 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 16 bewertet.



Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 15 und 16 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 16 bewertet.

