



Lösungsblatt zur Prüfung im Fach
Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Sommersemester 2022

am 15.08.2022, 12:00 – 13:30 Uhr

Punktetabelle

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	insgesamt
Punkte	29	9	8	12	13	8	11	90
erreicht								

Notentabelle

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (29 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen. In dieser Aufgabe werden keine Teilergebnisse oder Rechenwege bepunktet.

- a) Welche Eigenschaften besitzt das System $\ddot{y} + 2t\dot{y} + y = \ddot{u} + 2t\dot{u} + u$? (1 Punkt)

☒ Linear

☐ Zeitinvariant

- b) Die Sprungantwort eines unbekannten Systems konvergiert gegen einen endlichen, konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$, also $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = c$. Kann das System asymptotisch stabil sein? (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

- c) Das Vorzeichen eines Pols hat im Bodediagramm Einfluss auf den Amplitudengang. (1 Punkt)

☐ Wahr

☒ Falsch

- d) Eine Reihenschaltung von asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen kann instabil sein. (1 Punkt)

☐ Wahr

☒ Falsch

- e) Abbildung 1 zeigt drei Sprungantworten eines unbekannten Systems. Die Sprunghöhen des Eingangssignals waren hierbei:

$$u_1(t) = \sigma(t), \quad u_2(t) = 2\sigma(t), \quad u_3(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

Kann das unbekannte System linear sein? (2 Punkte)

☒ Ja

☐ Nein

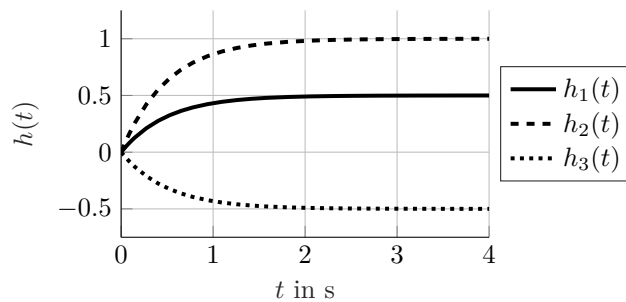


Abbildung 1: Sprungantworten $h_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ des Systems

f) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{s-2}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} \cdot \frac{5}{s+1}$$

☒ Ja

☐ Nein

g) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{5s^2 + s + 10}{10s^3 + 1}.$$

(i) Welche Aussage trifft auf die Impulsantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☒ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 0.5$ ☐ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 2$

(ii) Welche Aussage trifft auf die Sprungantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☒ $\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 10$ ☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 0.1$

h) Geben Sie eine Differentialgleichung zu der Übertragungsfunktion

$$G_3(s) = \frac{3}{s+2} e^{-4s}$$

ohne Anfangsbedingung an. (2 Punkte)

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 3u(t-4)$$

- i) Geben Sie die asymptotische Steigung der Amplitudengänge $\frac{dA_4(\omega)}{d\omega}$ und $\frac{dA_5(\omega)}{d\omega}$ in dB/Dek des Frequenzgangs der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_4(s) = \frac{2}{s^2} \cdot \frac{s+5}{s^2+7s+12}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} = \boxed{-60 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

$$G_5(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{s^3+6s^2+3s-10}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_5(\omega)}{d\omega} = \boxed{-20 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

- j) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Phasengänge $\varphi_3(\omega)$ und $\varphi_4(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an. (4 Punkte)

Hinweis: Eine Nullstelle des Nennerpolynoms von $G_5(s)$ ist $s_1 = 1$.

$$G_4(s) = \frac{2}{s^2} \cdot \frac{s+5}{s^2+7s+12}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_4(\omega) = \boxed{-270^\circ}$$

$$G_5(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{s^3+6s^2+3s-10}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_5(\omega) = \boxed{90^\circ}$$

- k) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \cos(\dot{y}) \ln(y) = u^2$$

um die Ruhelage $y_S = e$, $u_S = 1$. (3 Punkte)

$$\square \Delta \ddot{y} + e \Delta y = 2 \Delta u \quad \square \Delta \ddot{y} + \Delta \dot{y} + e \Delta y = -2 \Delta u$$

$$\square \Delta \ddot{y} + \Delta \dot{y} + e \Delta y = 2 \Delta u \quad \checkmark \Delta \ddot{y} + \frac{1}{e} \Delta y = 2 \Delta u$$

1) Gegeben sei das System Σ_6 mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}\Sigma_6 : \quad 3\dot{x}_1 &= -6x_1 + 3x_2 + 6u \\ \dot{x}_2 &= -2(x_2 + u) \\ y &= x_1 - x_2.\end{aligned}$$

(i) Wie lautet das Zustandsraummodell in Matrix-Schreibweise? (2 Punkte)

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☒ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

(ii) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (1 Punkt)

- ☒ asymptotisch stabil
- ☐ instabil
- ☐ grenzstabil

(iii) Existiert eine eindeutige Zustandsraumtransformation $x = Tz$ um das System Σ_6 durch die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}\end{aligned}$$

zu beschreiben? (1 Punkt)

- ☐ Ja
- ☒ Nein

- m) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 2) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 3) zu. (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Sprungantwort	Bode-Diagramm
$G_1(s) = \frac{5}{s+5}e^{-s}$	A	C
$G_2(s) = \frac{11}{2s^2 + 4s + 11}$	B	A
$G_3(s) = \frac{4s^2}{2(s+0.5)(s+1)}$	C	D
$G_4(s) = \frac{s^2 + 10s}{s^2 + 15s + 50}$	D	B

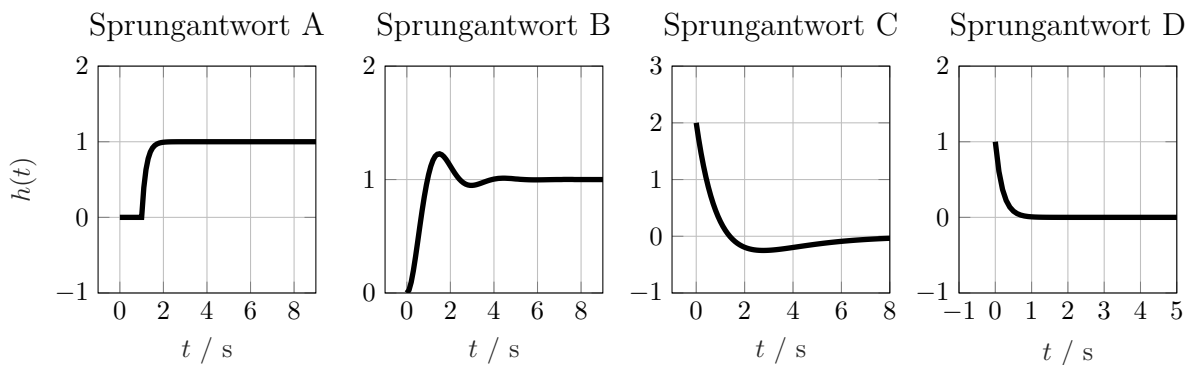


Abbildung 2: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

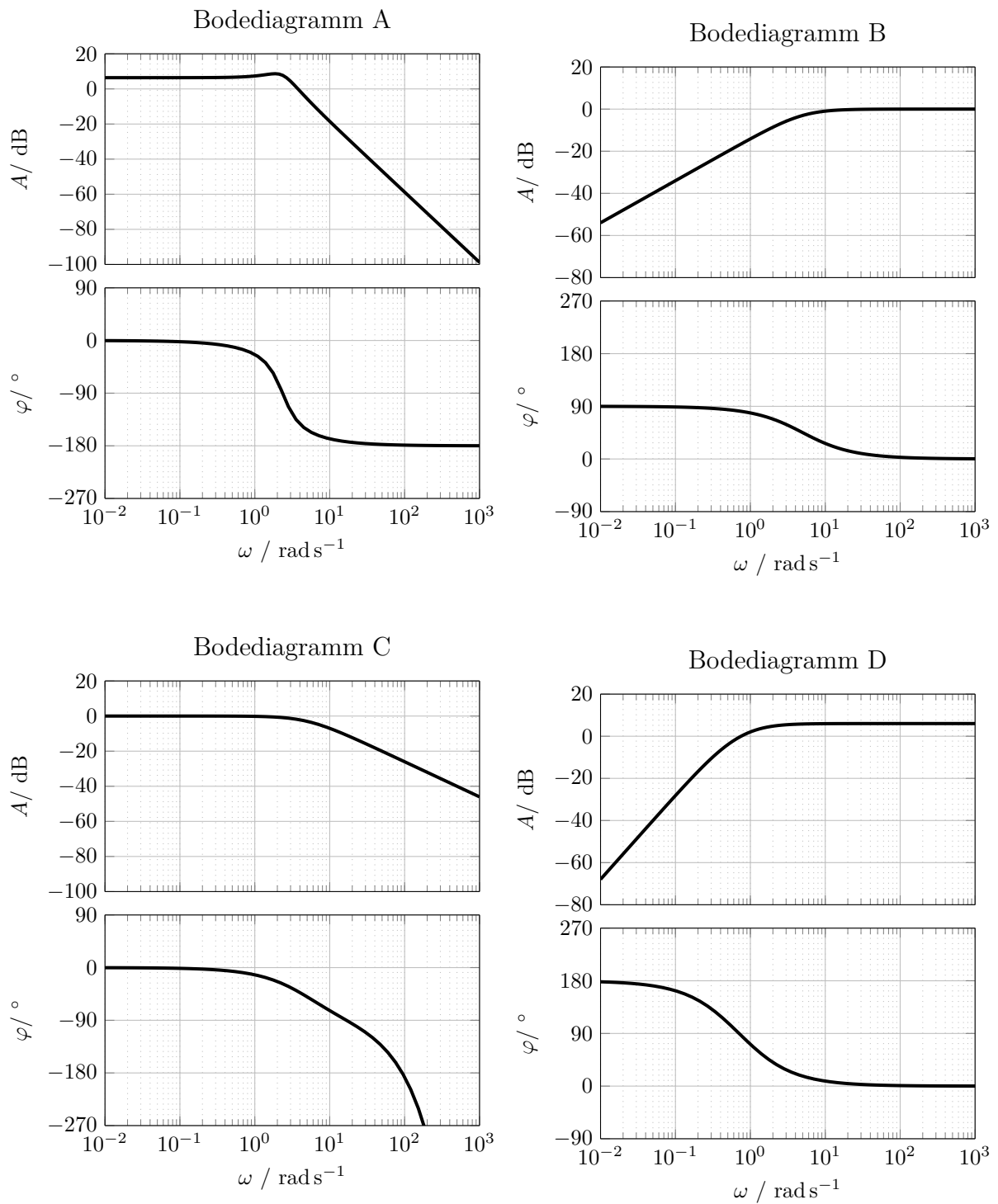


Abbildung 3: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingängen $U(s)$ und $D(s)$ sowie Ausgang $Y(s)$.

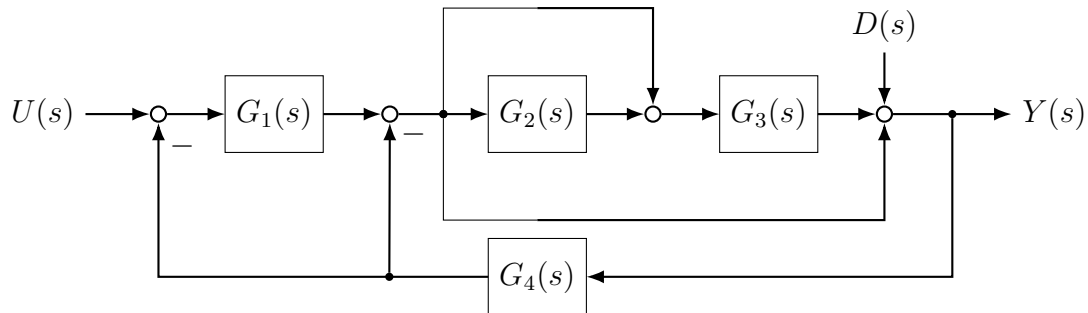


Abbildung 4: Blockschaltbild

Hinweis: Aufgabenteile a), b), c) und d) können unabhängig von den vorherigen Aufgabenteilen bearbeitet werden.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_U(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $D(s) = 0$ an. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_D(s) = Y(s)/D(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $U(s) = 0$ an. (2 Punkte)
- Geben Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$ und $D(s)$ sowie $G_U(s)$ und $G_D(s)$ an. Sie brauchen die Terme nicht einzusetzen. (1 Punkt)
- Im Folgenden gilt

$$G_1(s) = 0, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+2}, \quad G_3(s) = a, \quad G_4(s) = 1$$

für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ein unbekannter Parameter ist. Setzen Sie die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme in die Gleichung für $Y(s)$ ein und vereinfachen Sie hierbei die Brüche so weit es geht. (2 Punkte)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil c) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie mit folgendem Zusammenhang weiter:

$$Y(s) = \frac{G_1^2(1 + G_3 + G_2G_3)}{1 + (1 + G_3 + G_2G_3)(1 - G_1)G_4}U(s) + \frac{1 - G_1}{1 + (1 + G_3 + G_2G_3)(1 - G_1)G_4}D(s)$$

- Für welche Werte von $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist die verbliebene Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 2.

- a) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion $G_U(s)$ wird das Eingangssignal von $G_2(s)$ als eine Hilfsgröße $X_1(s)$ eingeführt. Es lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$Y(s) = X_1(s) + G_3 [X_1(s) + G_2 X_1(s)] = (1 + G_3 + G_2 G_3) X_1(s) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} X_1(s) &= G_1 [U(s) - G_4 Y(s)] - G_4 Y(s) \\ &= G_1 U(s) - (G_1 + 1) G_4 Y(s) \end{aligned} \quad (2)$$

Eliminieren von $X_1(s)$ durch Einsetzen von (2) in (1) ergibt dann

$$\begin{aligned} Y(s) &= (1 + G_3 + G_2 G_3) (G_1 U(s) - (G_1 + 1) G_4 Y(s)) \\ \Leftrightarrow (1 + (1 + G_3 + G_2 G_3) (G_1 + 1) G_4) Y(s) &= (1 + G_3 + G_2 G_3) G_1 U(s) \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gesamtübertragungsfunktion ist damit

$$G_U(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1 (1 + G_3 + G_2 G_3)}{1 + (1 + G_3 + G_2 G_3) (G_1 + 1) G_4} \quad (4)$$

- b) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion $G_D(s)$ kann diesselbe Hilfsgröße wieder verwendet werden. Es lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$Y(s) = D(s) + X_1(s) + G_3 (X_1(s) + G_2 X_1(s)) = D(s) + (1 + G_3 + G_2 G_3) X_1(s) \quad (5)$$

$$X_1(s) = -G_1 G_4 Y(s) - G_4 Y(s) = -(G_1 + 1) G_4 Y(s) \quad (6)$$

Eliminieren von $X_1(s)$ durch Einsetzen von (6) in (5) ergibt dann

$$Y(s) = D(s) - (1 + G_3 + G_2 G_3) (G_1 + 1) G_4 Y(s) \quad (7)$$

Die Gesamtübertragungsfunktion ist damit

$$G_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + (1 + G_3 + G_2 G_3) (G_1 + 1) G_4} \quad (8)$$

- c) Der Ausgang $Y(s)$ ergibt sich aus dem Einfluss beider Eingänge deren Übertragungsfunktionen zuvor berechnet wurden. Das heißt

$$Y(s) = G_U(s) U(s) + G_D(s) D(s) \quad (9)$$

- d) Einsetzen der Übertragungsfunktionen aus a) und b) ergibt

$$Y(s) = \frac{G_1 (1 + G_3 + G_2 G_3)}{1 + (1 + G_3 + G_2 G_3) (G_1 + 1) G_4} U(s) + \frac{1}{1 + (1 + G_3 + G_2 G_3) (G_1 + 1) G_4} D(s) \quad (10)$$

Mit den Übertragungsfunktionen aus der Aufgabenstellung ergibt sich dann

$$Y(s) = \frac{1}{1 + 1 + a + \frac{a}{s+2}} D(s) = \frac{s+2}{(2+a)s + 4 + 3a} D(s) \quad (11)$$

Alternative Lösung: Einsetzen der Übertragungsfunktionen führt zu der gleichen Übertragungsfunktion (11).

- e) Für die asymptotische Stabilität des Ausgangsverhaltens der verbliebenen Übertragungsfunktion wird die Vorzeichenebedingung auf das Nennerpolynom angewendet. Da es sich um ein System erster Ordnung handelt, ist die Vorzeichenbedingung eine notwendige und hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität. Nach der Vorzeichenbedingung muss gelten:

$$\begin{aligned} 2 + a &> 0, \\ 4 + 3a &> 0 \end{aligned} \quad (12)$$

oder

$$\begin{aligned} 2 + a &< 0, \\ 4 + 3a &< 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Damit ist das Ausgangsverhalten für $a > -\frac{4}{3}$ und $a < -2$ asymptotisch stabil.

Aufgabe 3. (8 Punkte)

Die Übertragungsfunktion eines linearen, zeitinvarianten Systems Σ_1 lautet

$$G_1(s) = \frac{-3}{s^2 + 4s + 13}.$$

Hinweis: Aufgabenteile b) und c) können unabhängig von den vorherigen bearbeitet werden.

- a) Ist das System asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems. (2 Punkte)

Im Folgenden wird das System Σ_1 mit einem weiteren System Σ_2 gemäß Abbildung 5 verschaltet. Das System Σ_2 wird durch die Gleichung

$$u_1(t) = 2 \int_0^t u_2(\tau) d\tau$$

beschrieben.

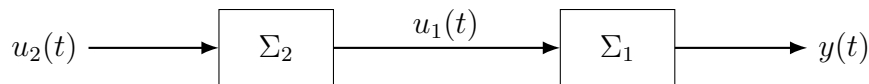


Abbildung 5: Verschaltung der Teilsysteme

- c) Geben Sie die Übertragungsfunktion von Σ_2 an. Ist Σ_2 asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)
- d) Geben Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems aus Abbildung 5 an. (1 Punkt)
- e) Geben Sie die Differentialgleichung des Gesamtsystems an. Die unbekannten Anfangsbedingungen können dabei zu Null gesetzt werden. (1 Punkt)
- f) Wie viele Zustände hat das System? (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 3.

- a) Da sowohl die Vorzeichen- als auch die Beiwertebedingung erfüllt ist, ist das System asymptotisch stabil.
- b) Für die Sprungantwort gilt $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\}$. Zur Anwendung der Korrespondenzen wird die Übertragungsfunktion zunächst umgeformt zu

$$G_1(s) = \frac{-3}{(s+2)^2 + 9}$$

Laplace-Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe der Korrespondenzen führt auf

$$g(t) = -e^{-2t} \sin(3t).$$

c) Die Übertragungsfunktion von Σ_2 lautet

$$U_2(s) = \frac{2}{s}.$$

Sie ist grenzstabil.

d) Die Gesamt-Übertragungsfunktion lautet

$$G_{12}(s) = \frac{-3}{(s+2)^2 + 9} \cdot \frac{2}{s} = \frac{-6}{s^3 + 4s^2 + 13s}.$$

e) Aus den Koeffizienten der Übertragungsfunktion lässt sich die Differentialgleichung aufstellen als

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = -6u$$

f) Das System hat 3 Zustände.

Aufgabe 4. (12 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die folgende Differentialgleichung

$$-2\ddot{y} - 24\dot{y} - 54y = -\dot{u} + 9u$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad u(0) = 2$$

beschrieben.

Hinweis: Aufgabenteil b) kann unabhängig von Aufgabenteil a) bearbeitet werden.

- Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems an. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie nicht anzugeben. (2 Punkte)
- Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an. (2 Punkte)
- Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an. (1 Punkt)
- Zerlegen Sie die Übertragungsfunktion in ihre einzelnen Moden, d.h.

$$Y(s) = \underbrace{\left(\sum_i \frac{z_i}{s + p_i} \right)}_{G(s)} U(s)$$

mit Zählerpolynom z_i und Polstellen p_i . (2 Punkte)

- Ausgehend von der zerlegten Übertragungsfunktion aus d) lassen sich Zustandsgrößen definieren als

$$X_i(s) = \frac{z_i}{s + p_i} U(s).$$

Transformieren Sie diese Zustandsgrößen $X_i(s)$ in den Zeitbereich und stellen Sie damit Differentialgleichungen für die einzelnen Moden auf. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie nicht anzugeben. (3 Punkte)

- Geben Sie eine modale Zustandsraumdarstellung des Systems an. Die dazugehörigen Anfangsbedingungen brauchen Sie hier auch nicht anzugeben. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 4.

- Nachdem die Differentialgleichung mit dem Faktor $(-\frac{1}{2})$ durchmultipliziert wurde lässt sich aus ihren Koeffizienten direkt die Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormal-

form aufstellen

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -27 & -12 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \underline{x}.\end{aligned}$$

b) Anwendung der Laplace-Transformation auf beide Seiten der DGL ergibt

$$\begin{aligned}-2(s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) - 24(sY(s) - y(0)) - 54Y(s) &= -(sU(s) - u(0)) + 9U(s) \\ \Leftrightarrow (-2s^2 - 24s - 54)Y(s) + 2s + 24 &= (-s + 9)U(s) + 2.\end{aligned}$$

Umstellen nach $Y(s)$ ergibt

$$Y(s) = \frac{-s + 9}{-2s^2 - 24s - 54}U(s) + \frac{-2s - 22}{-2s^2 - 24s - 54}.$$

Alternative: Laplace-Transformation der bereits mit $(-\frac{1}{2})$ durchmultiplizierten DGL.

c) Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = \frac{-s + 9}{-2s^2 - 24s - 54}.$$

d) Die Aufteilung der Übertragungsfunktion in Moden erfolgt mittels Partialbruchzerlegung. Dazu wird zunächst umgeformt zu

$$G(s) = \frac{1}{2} \frac{s - 9}{s^2 + 12s + 27} = \frac{1}{2} \frac{s - 9}{(s + 3)(s + 9)}$$

mit Polen $s_1 = -3$, $s_2 = -9$. Damit gilt

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{s - 9}{(s + 3)(s + 9)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{B}{s + 9} \\ \Leftrightarrow s - 9 &= A(s + 9) + B(s + 3) = (A + B)s + (9A + 3B)\end{aligned}$$

Damit erhält man für die Koeffizienten $A = -2$, $B = 3$ und somit gilt

$$G(s) = \frac{-2}{s + 3} + \frac{3}{s + 9}.$$

e) Gemäß Aufgabenstellung sind die Zustandsgrößen definiert als

$$X_1(s) = \frac{-2}{s + 3}U(s), \quad X_2(s) = \frac{3}{s + 9}U(s).$$

Die Differentialgleichungen für diese beiden Moden ergeben sich durch Laplace-Rücktransformation von

$$X_1(s)(s+3) = -2U(s), \quad X_2(s)(s+9) = 3U(s)$$

zu

$$\dot{x}_1 + 3x_1 = -2u, \quad \dot{x}_2 + 9x_2 = 3u.$$

- f) Die zuvor aufgestellten Differentialgleichungen für die einzelnen Moden lassen sich zusammenfassen in

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

Aufgabe 5. (13 Punkte)

Gegeben sei das folgende System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_1 : \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Hinweis: Die Aufgabenteile c) und d) können unabhängig von den anderen bearbeitet werden.

- Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Lösung $\underline{x}(t)$ des Systems für einen konstanten Eingang $u(t) = u_0$, $t \geq 0$! (3 Punkte)
- Geben Sie zunächst in Abhängigkeit einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ (d.h. ohne die obigen Zahlenwerte einzusetzen) mit zwei Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$) die Berechnungsvorschrift an, mit der die Transformationsmatrix für die Transformation auf Regelungsnormform bestimmt werden kann!
Setzen Sie dann das gegebene $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ ein! Welches Problem tritt dabei auf, sodass keine reguläre Transformation berechnet werden kann? (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems! (2 Punkte)
- Geben Sie zu der Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil d) eine Zustandsraumdarstellung an! Vergleichen Sie diese mit der ursprünglichen Zustandsraumdarstellung Σ_1 . Was fällt Ihnen auf? (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 5.

- Mittels inverser Laplace-Transformation $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s-8 & -7 \\ 0 & s-6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-6)(s-8)} \begin{bmatrix} s-6 & 7 \\ 0 & s-8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-8} & \frac{7}{(s-6)(s-8)} \\ 0 & \frac{1}{s-6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-8} & \frac{3.5}{s-8} - \frac{3.5}{s-6} \\ 0 & \frac{1}{s-6} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

wobei eine Partialbruchzerlegung des (1,2)-Eintrags durchgeführt wurde.

Laplace-Rücktransformation in den Zeitbereich führt auf die Transitionsmatrix

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{8t} & 3.5 (e^{8t} - e^{6t}) \\ 0 & e^{6t} \end{bmatrix}.$$

b) Die Lösung der Zustandsgleichung lautet

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 14.5 e^{8t} + 10.5 e^{6t} \\ 3 e^{6t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 5 e^{8(t-\tau)} u_0 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 14.5 e^{8t} + 10.5 e^{6t} \\ 3 e^{6t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} [e^{8(t-\tau)}]_{\tau=0}^t u_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14.5 e^{8t} + 10.5 e^{6t} \\ 3 e^{6t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5u_0}{8} (1 - e^{8t}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Die allgemeine Formel für die Transformationsmatrix T_R zur Transformation auf Regelungsnormalform lautet für ein System mit $x \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$

$$T_R = \begin{bmatrix} s_R^T \\ s_R^T A \end{bmatrix}^{-1}.$$

Dabei bezeichnet s_R^T die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix, also

$$s_R^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}^{-1}.$$

Für das vorliegende System ist letzteres

$$s_R^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 40 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Die Matrix $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$ hat jedoch keinen vollen Rang, sodass ihre Inverse nicht existiert. Damit kann keine reguläre Transformation T_R berechnet werden.

- d) Die Übertragungsfunktion berechnet sich gemäß Formel als

$$\begin{aligned} G(s) &= c^T (sI - A)^{-1} b + d \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-8} & \frac{3.5}{s-8} - \frac{3.5}{s-6} \\ 0 & \frac{1}{s-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{10}{s-8}. \end{aligned}$$

Das ursprüngliche System hat zwei Zustände ($x \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$), die dazugehörige Übertragungsfunktion jedoch nur eine Polstelle.

Interpretation (in der Klausur nicht erforderlich): Eine Übertragungsfunktion beschreibt das Übertragungsverhalten vom Systemeingang zum Systemausgang. Der Zustand x_2 hängt jedoch nicht von u ab, weder direkt über b , noch indirekt über x_1 . Daher ist x_2 nicht Teil des Übertragungsverhaltens von u nach y und damit auch nicht der Übertragungsfunktion.

- e) Zu der Übertragungsfunktion aus d) lautet die Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{x}_R &= 8x_R + u \\ y &= 10x_R. \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass diese Darstellung nur einen Zustand hat, wohingegen Σ_1 zwei Zustände hat.

Interpretation (in der Klausur nicht erforderlich): Da die Übertragungsfunktion aus d) nur eine Polstelle hat, hat die dazugehörige RNF auch nur einen Zustand. Der Teil der Systemdynamik, der nicht am Übertragungsverhalten beteiligt ist, fiel beim Aufstellen der Übertragungsfunktion weg. Für das reduzierte System ist die RNF definiert, während für das ursprüngliche System keine RNF existiert.

Aufgabe 6. (8 Punkte)

Das Lotka-Volterra-Modell ist ein System aus zwei nicht-linearen, gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung. Es beschreibt die Wechselwirkung von Räuber- und Beutepopulationen. Mit Räubern und Beute sind zwei Klassen von Lebewesen gemeint, deren eine sich von der anderen ernährt. Die gekoppelte Populationsdynamik wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1(t) (\alpha - \beta N_2(t)), \\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2(t) (\gamma - \delta N_1(t)),\end{aligned}$$

wobei $N_1(t)$ die Anzahl der Beutewesen und $N_2(t)$ die Anzahl der Räuber darstellt. Fernerhin ist $\alpha > 0$ die ungestörte Reproduktionsrate der Beute, $\beta > 0$ die Sterberate der Beute pro Räuber, $\gamma > 0$ die Sterberate der Räuber sofern keinerlei Beute vorhanden ist, sowie $\delta > 0$ die Reproduktionsrate der Räuber pro Beutewesen.

Im Rahmen dieser Aufgabe wird angenommen, dass die Reproduktionsrate der Beutetiere $\alpha = \alpha(t) > 0$ über das Nahrungsangebot beeinflusst werden kann. Zu Anfang seien in einem gegebenen Biotop 1000 Beutetiere und 40 Räuber.

- Stellen Sie eine nichtlineare Zustandsraumdarstellung für das Gesamtsystem auf. Verwenden Sie dazu den Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}^\top$, den Eingang $u = \alpha$, sowie den Ausgang $y = N_2$. Geben Sie auch die Anfangsbedingungen an. (2 Punkte)
- Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems unter der Annahme eines konstanten Eingangs $u_S = \alpha^*$. (2 Punkte)
- Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $\underline{x}_S = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} & \frac{\alpha^*}{\beta} \end{bmatrix}^\top$ mit dem konstanten Eingang $u_S = \alpha^*$. (3 Punkte)
- Berechnen Sie die Eigenwerte des linearisierten Systems und charakterisieren Sie dessen Stabilität. (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 6.

- a) Einsetzen liefert:

$$\dot{x}_1 = x_1(u - \beta x_2) \quad (14)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2(\gamma - \delta x_1) \quad (15)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad (16)$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = \begin{bmatrix} 1000 \\ 40 \end{bmatrix}$.

b) Angenommen $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ und $u_S = \alpha^*$, dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$0 = x_{1S}(\alpha^* - \beta x_{2S}) \quad (17)$$

$$0 = -x_{2S}(\gamma - \delta x_{1S}). \quad (18)$$

Die Gleichung (17) ist erfüllt, wenn $x_{1S} = 0$. Das impliziert beim Einsetzen in Gleichung (18), dass $x_{2S} = 0$. Außerdem ist Gleichung (17) aber auch erfüllt, wenn $x_{2S} = \frac{\alpha^*}{\beta}$ gewählt wird, was zu $x_{1S} = \frac{\gamma}{\delta}$ führt. Demnach sind die Ruhelagen

$$\underline{x}_{S,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{und} \quad \underline{x}_{S,2} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} & \frac{\alpha^*}{\beta} \end{bmatrix}^T$$

c) Die Linearisierungsvorschrift lautet $\Delta \dot{\underline{x}} = f(x_S, u_S) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_S, u_S} \Delta \underline{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_S, u_S} \Delta u$. Hier ist:

$$f(x_S, u_S) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_S, u_S} = \begin{bmatrix} u_S - \beta x_{2S} & -\beta x_{1S} \\ \delta x_{2S} & -\gamma + \delta x_{1S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\gamma}{\delta} \beta \\ \delta \frac{\alpha^*}{\beta} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_S, u_S} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Die Ausgangsgleichung ist bereits linear und ist daher $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \underline{x}$.

d) Die charakteristische Gleichung der Systemmatrix ist:

$$\left| \begin{bmatrix} s & \frac{\gamma}{\delta} \beta \\ -\delta \frac{\alpha^*}{\beta} & s \end{bmatrix} \right| = s^2 + \alpha^* \gamma \quad (22)$$

Daher sind die Eigenwerte $s_1 = \sqrt{\alpha^* \gamma} j$ und $s_2 = -\sqrt{\alpha^* \gamma} j$. Beide Eigenwerte liegen auf der imaginären Achse, daher ist das System grenzstabil.

Aufgabe 7. (11 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = s^2 \frac{s(s+2) + 3(s+2)}{s(4s^2 + 8s + 4)(s-5)}.$$

- Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar). (2 Punkte)
- Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplituden- und Phasengang des Systems. (4 Punkte)
- Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs. Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (5 Punkte)

Lösung Aufgabe 7.

- Kürzen von s mit Nenner und Ausklammern von Faktor 4 liefert:

$$\frac{s(s+2) + 3(s+2)}{4(s^2 + s + 1)(s-5)}. \quad (23)$$

Ausmultiplizieren im Zähler und Faktorisierung der Nullstellen führt zu

$$\frac{1}{4}s \frac{(s+2)(s+3)}{(s^2 + s + 1)(s-5)}. \quad (24)$$

- Mit $s = j\omega$ ergibt sich der Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{4} \frac{(j\omega+2)(j\omega+3)}{(1-\omega^2+j\omega)(j\omega-5)} \quad (25)$$

der Amplitudengang

$$A(\omega) = \frac{\omega}{4} \frac{\sqrt{\omega^2+4}\sqrt{\omega^2+9}}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\sqrt{\omega^2+25}} \quad (26)$$

und der Phasengang

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) - \left(\arctan\left(\frac{\omega}{5}\right) + \pi\right) - \arctan2\left(\frac{\omega}{1-\omega^2}\right) \quad (27)$$

Auswerten der atan2-Funktion ergibt

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) - \left(\arctan\left(\frac{\omega}{5}\right) + \pi\right) - \arctan2\left(\frac{\omega}{1-\omega^2}\right) & 0 < \omega \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) - \left(\arctan\left(\frac{\omega}{5}\right) + \pi\right) - \arctan2\left(\frac{\omega}{1-\omega^2}\right) - \pi & 10 < \omega \end{cases} \quad (28)$$

c) Für das Zeichnen werden folgende Werte benötigt

$$c = \frac{1}{4}, \quad r = 1, \quad \omega_{min} = 1, \quad G^*(0) = -\frac{6}{5}$$

$$A_{dB}(\omega_{min}) = 20 \cdot \log \left(\left| \frac{1}{4} \left(-\frac{6}{5} \right) \right| \cdot (1)^1 \right) \approx -10.4576 \text{ dB} \quad (29)$$

$$c \cdot G^*(0) = -\frac{3}{10} < 0 \Rightarrow \varphi(0) = -180^\circ + 1 \cdot 90^\circ = -90^\circ \quad (30)$$

$$q_1 = 1, \quad n_1 = 2, \quad n_3 = 1, \quad p_4 = -5 \quad (31)$$

