



UNIVERSITÄT STUTTGART
Institut für Systemdynamik

Prüfung im Fach **Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik**

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer

Wintersemester 2022/2023

am 03.03.2023, 12:00 – 13:30 Uhr

Bitte tragen Sie auf diesem Doppelblatt Ihren Namen, Ihre Fachrichtung und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Lösungsblätter mit Ihrem Namen und legen Sie diese Blätter in das Doppelblatt ein.

Name, Vorname: _____

Studiengang: _____ Matr.-Nr: _____

Zugelassen sind alle nicht-elektronischen Hilfsmittel sowie ein nicht-vernetzbarer nicht-grafikfähiger Taschenrechner. Zugelassene Taschenrechner sind in einer Liste vermerkt, die vorab vom Institut für Systemdynamik zur Verfügung gestellt wurde.

Zur Kenntnis genommen: _____ (Unterschrift)

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	29	
2	9	
3	10	
4	9	
5	12	
6	5	
7	5	
8	11	
insgesamt	90	

Korrektur: _____

Prüfer: _____

Einsicht: _____

Note: _____

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (29 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen. In dieser Aufgabe werden keine Teilergebnisse oder Rechenwege bepunktet.

a) Welche Eigenschaften besitzt das System $\dot{y}(t) + 1 = u(t)$? (1 Punkt)

☐ Linear

☐ Zeitinvariant

b) Die Pole der Übertragungsfunktion eines Systems müssen auch Eigenwerte der Systemmatrix des gleichen Systems in Zustandsraumdarstellung sein. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

c) Haben das Zählerpolynom und Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion die gleiche Ordnung, so ist das System sprungfähig. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

d) Das Vorzeichen einer Nullstelle hat im Bodediagramm Einfluss auf den Phasengang. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

e) Die Parallelschaltung von den asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen zweier linearer, zeitinvarianter Systeme kann instabil sein. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

f) Ein lineares, zeitinvariantes System mit verschwindenden Anfangsbedingungen wird mit dem Eingangssignal $u_1(t) = 2\sigma(t)$ angeregt. Der zugehörige Systemausgang $y_1(t)$ ist links in Abbildung 1 dargestellt. Für ein zweites Eingangssignal, bei dem sich

auch um ein sprungförmiges Signal bei $t = 0$ handelt, ergibt sich der Systemausgang $y_2(t)$ der rechts in Abbildung 1 dargestellt ist. Nennen Sie das Eingangssignal $u_2(t)$. (2 Punkte)

$$u_2(t) = \boxed{} \sigma(t)$$

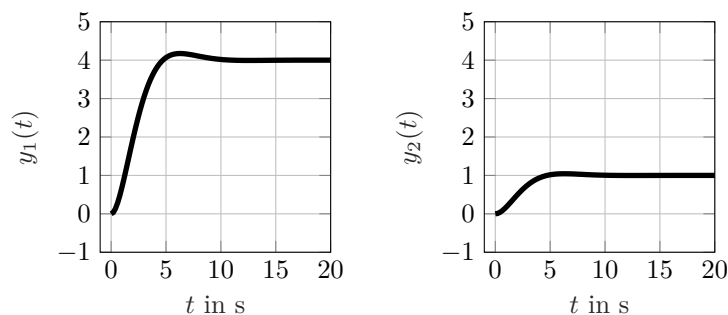


Abbildung 1: Ausgangssignale $y_i(t)$, $i = 1, 2$

g) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{s^2 - s + 10}{5s^3 + s^2 + 59s + 12}$$

☐ Ja ☐ Nein

h) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{12s^2 + 6s + 2}{2s^3 + 2s^2 + 2}.$$

(i) Welche Aussage trifft auf die Impulsantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☐ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 0$ ☐ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 6$

(ii) Welche Aussage trifft auf die Sprungantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☐ $\lim_{t \rightarrow 0} h_2(t) = 1$ ☐ $\lim_{t \rightarrow 0} h_2(t) = 0$

- $$h_3(t) =$$

- $$G_4(s) = K \frac{5s - 1}{(s + a)(s + b)^2}, \quad K, b > 0 > a \qquad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} = \boxed{}$$

$$G_5(s) = \frac{s(s+3)}{(s-2)^2} \qquad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_5(\omega)}{d\omega} = \boxed{}$$

- $$G_4(s) = K \frac{5s-1}{(s+a)(s+b)^2}, \quad K, b > 0 > a \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_4(\omega) =$$

$$G_5(s) = \frac{s(s+3)}{(s-2)^2} \qquad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_5(\omega) = \boxed{}$$

- $$A_6(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}, \quad \varphi_6(\omega) = -2 \arctan(\omega).$$

$$y_6(t) =$$

- m) Gegeben sind die Zustandsgleichungen des Systems $G(s)$ mit Eingang $U(s)$, Ausgang $Y(s)$ und Zustandsvektor $X(s) = [X_1(s), X_2(s)]^T$ im Bildbereich:

$$X_1(s) = \frac{2}{s+6}U(s), \quad X_2(s) = \frac{6}{s+2}U(s), \quad Y(s) = X_1(s) - X_2(s).$$

- (i) Wie lautet das Zustandsraummodell in Matrix-Schreibweise? (2 Punkte)

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

- (ii) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (1 Punkt)

☐ asymptotisch stabil ☐ instabil ☐ grenzstabil

- n) Das System $G_8(s)$ wird durch die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}}_8 = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{x}_8 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_8, \quad y_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_8$$

beschrieben.

- (i) Ist das System diagonalisierbar? (1 Punkt)

☐ Ja ☐ Nein

- (ii) Kann das System auf Regelungs-Normalform transformiert werden? (1 Punkt)

☐ Ja ☐ Nein

- (iii) Existiert eine eindeutige Zustandsraumtransformation $x_8 = T\tilde{x}_8$ um das System $G_8(s)$ durch die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\tilde{\underline{x}}}_8 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_8 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_8, \quad y_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_8$$

zu beschreiben? (1 Punkt)

☐ Ja ☐ Nein

- o) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 2) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 3) zu. (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Sprungantwort	Bode-Diagramm
$G_1(s) = \frac{s - 10}{s^2 + 1}$		
$G_2(s) = \frac{-10}{s + 1}$		
$G_3(s) = \frac{s + 5}{(s - 0.1)(s + 100)}e^{-s}$		
$G_4(s) = \frac{100s(s + 1)}{(s + 2)^2(s + 10)}$		

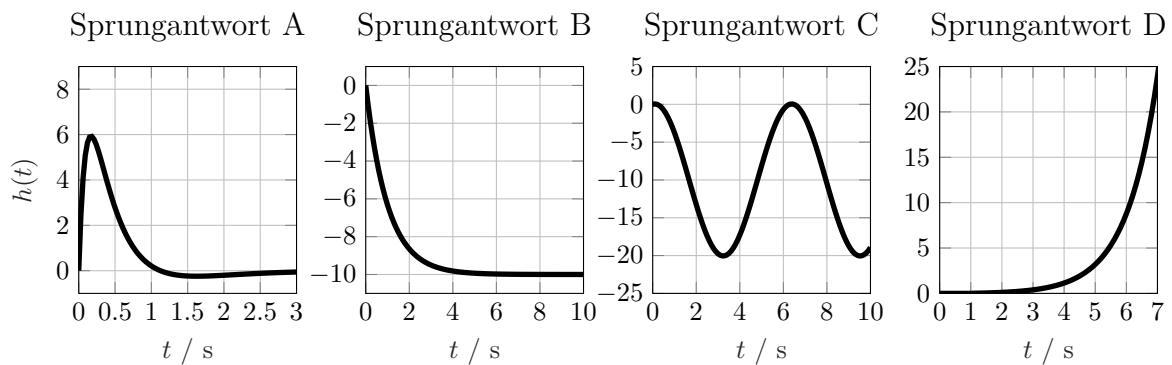


Abbildung 2: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

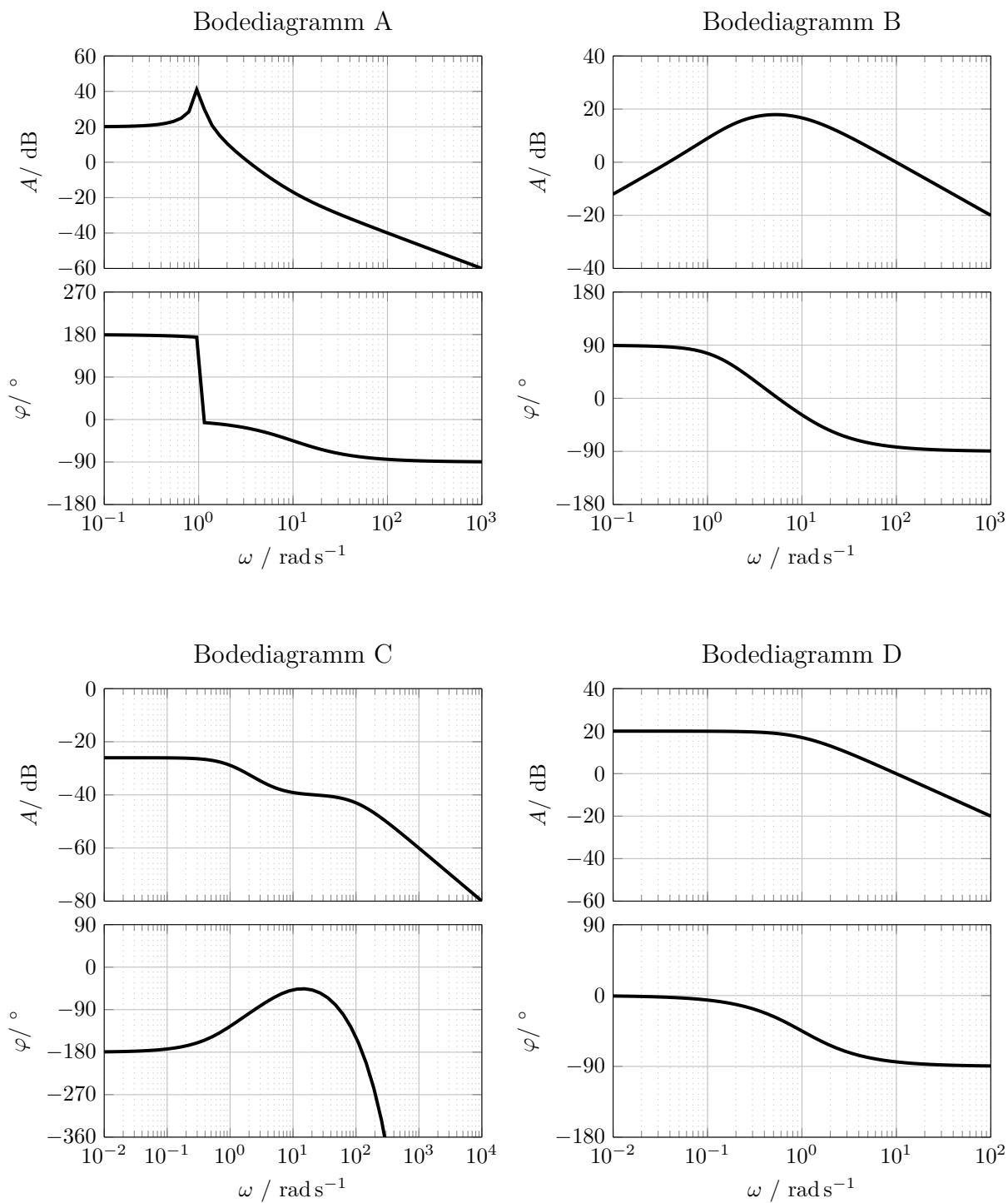
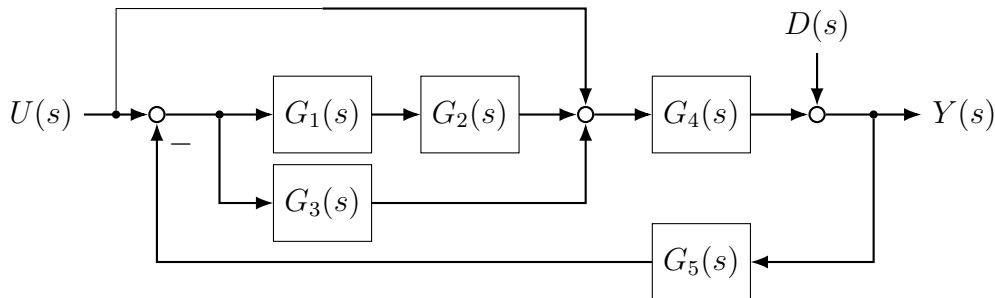


Abbildung 3: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingängen $U(s)$ und $D(s)$ sowie Ausgang $Y(s)$.



Hinweis: Aufgabenteile a), b) und c) können unabhängig von allen anderen Aufgabenteilen bearbeitet werden. Die Aufgabenteile d) und e) hängen ausschließlich von dem Ergebnis des Aufgabenteils c) ab.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_U(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $D(s) = 0$ an. (4 Punkte)
- Nehmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_D(s) = Y(s)/D(s)$ als gegeben an. Geben Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$ und $D(s)$ sowie $G_U(s)$ und $G_D(s)$ an. Sie brauchen den Term für $G_U(s)$ nicht einzusetzen. (1 Punkt)
- In allen folgenden Aufgabenteilen gilt

$$G_1(s) = G_2(s) = G_3(s) = 1, \quad G_4(s) = \frac{a}{2s + 2}, \quad G_5(s) = 5, \quad D(s) = 0$$

für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme und den Eingang $D(s)$. Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ ein konstanter Parameter. Setzen Sie die Funktionen in die Gleichung für $Y(s)$ ein und vereinfachen Sie hierbei die Brüche so weit es geht. (1 Punkt)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil b) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie mit folgender Gleichung:

$$Y(s) = \frac{(2G_1 + G_2G_3 + 1 - G_2)G_4}{1 + G_4(G_1 + G_2G_3)G_5}U(s) + G_D(s)D(s)$$

- Begründen Sie warum der Parameter $a \in \mathbb{R}$ die Stabilität des Systems beeinflusst. (1 Punkt)
- Nehmen Sie an, dass $a = 1$ gilt. Bei der vereinfachten Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil c) handelt es sich um ein PT_1 -Glied. Bestimmen Sie Konstanten K und T der allgemeinen Übertragungsfunktion eines PT_1 -Glieds

$$G_{PT_1}(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

sodass sich die Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil c) ergibt. (2 Punkte)

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Die Impulsantwort eines linearen, zeitinvarianten Systems lautet

$$g(t) = t^2 e^{-3t}.$$

Hinweis: Aufgabenteile b) und c) können unabhängig von den vorherigen bearbeitet werden.

- a) Ist das System asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- b) Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems mit Hilfe des Faltungsintegrals. (4 Punkte)
- c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems. (1 Punkt)
- d) Berechnen Sie mit Hilfe der Übertragungsfunktion aus c) gegen welchen Wert die Sprungantwort konvergiert für $t \rightarrow \infty$. (1 Punkt)
- e) Geben Sie die Differentialgleichung des Systems an. Die Anfangsbedingungen müssen nicht angegeben werden. (1 Punkt)
- f) Wie viele Eigenwerte besitzt die Differentialgleichung aus dem Aufgabenteil e) und wie lauten diese? (1 Punkt)
- g) Durch einen Umbau des Experiments entsteht eine zusätzliche Totzeit von 0,1 Sekunden zwischen Ein- und Ausgang. Geben Sie die nun vorliegende Differentialgleichung an. (1 Punkt)

Aufgabe 4. (9 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die Differentialgleichung

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + dy = \alpha u$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 3, \quad \dot{y}(0) = 2, \quad \ddot{y}(0) = 1$$

beschrieben.

Hinweis: Die Aufgabenteile b), c), d) und e) können unabhängig von den jeweils vorigen bearbeitet werden.

- a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an. (2 Punkte)
- b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an. (1 Punkt)
- c) Überführen Sie die Differentialgleichung in eine Zustandsraumdarstellung mit den Zuständen $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$. Geben Sie auch die Anfangsbedingungen an. (2.5 Punkte)
- d) Stellen Sie eine weitere Zustandsraumdarstellung des Systems auf. Die Anfangsbedingungen müssen nicht angegeben werden. (1 Punkt)

Im Folgenden sei $a = 0$, $b = 2$, $d = -32$ und $\alpha = 12$.

- e) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems. (2.5 Punkte)

Aufgabe 5. (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_1 : \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, & \underline{x}(t=0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Aufgabenteile a), b), d), e) und f) können unabhängig von den anderen bearbeitet werden.

- a) Erläutern Sie kurz die Bedeutung der Transitionsmatrix e^{At} . (1 Punkt)
- b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} des Systems Σ_1 mit einer geeigneten Methode. (4 Punkte)
- c) Berechnen Sie die Lösung $\underline{x}(t)$ des Systems Σ_1 für einen konstanten Eingang $u(t) = u_0$, $t \geq 0$. (3 Punkte)
- d) Geben Sie in Abhängigkeit einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ (d.h. ohne die obigen Zahlenwerte einzusetzen) mit zwei Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$) die Berechnungsvorschrift an, mit der die Transformationsmatrix für die Transformation auf Regelungsnormalform bestimmt werden kann. (1 Punkt)
- e) Leiten Sie mithilfe der Laplace-Transformation die Formel zur Berechnung der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ aus einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ mit verschwindenden Anfangsbedingungen her. (2 Punkte)
- f) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems Σ_1 . (1 Punkt)

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Im Folgenden wird das in nebenstehender Abbildung gezeigte System aus zwei untereinander angebrachten Flüssigkeitstanks betrachtet. Der obere Tank 1 wird über einen eingehenden Volumenstrom $\dot{Q}_{1,in} = u$ gespeist. Tank 1 besitzt außerdem ein Abflussventil, durch das der Volumenstrom $\dot{Q}_{1,out} = \xi_1 h_1(t)$ mit $\xi_1 > 0$ in Behälter 2 abfließt. Behälter 2 besitzt ebenfalls einen Abfluss, durch den der Volumenstrom $\dot{Q}_{2,out} = \xi_2 \sqrt{h_2(t)}$, $\xi_2 > 0$ abfließt. Zu Beginn sind die Behälter leer. Aus einer Volumenbilanz der Form $\dot{Q}_i = \dot{Q}_{i,in} - \dot{Q}_{i,out}$ je Behälter erhält man

$$\pi \left(r_1 - \frac{h_1(t)}{2} \right)^2 \dot{h}_1(t) = u(t) - \xi_1 h_1(t)$$

$$\pi r_2^2 \dot{h}_2(t) = \xi_1 h_1(t) - \xi_2 \sqrt{h_2(t)}$$

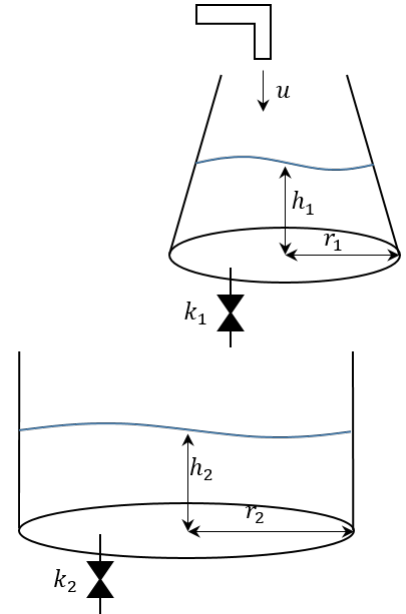


Abbildung 4: Tankkaskade

- Es wird der Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^\top$ eingeführt. Begründen Sie kurz die Wahl dieser Zustände. Weshalb wurde nicht z.B. $\tilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}^\top$ als Zustandsvektor gewählt? (1 Punkt)
- Stellen Sie eine nichtlineare Zustandsraumdarstellung für das Gesamtsystem auf. Verwenden Sie dazu den Zustandsvektor $\underline{x}$ aus Teilaufgabe a), den Eingang $u = \dot{Q}_{1,in}$ sowie den Ausgang $y = h_2$. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems in Abhängigkeit des stationären Eingangs u_0 . (2 Punkte)

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1 - x_1 - e^{x_2} \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_1^2 - x_1 x_3 - \sin(x_2) .\end{aligned}$$

- a) Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $\underline{x}_S = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^\top$. (3 Punkte)
- b) Beurteilen Sie die Stabilität des linearisierten Systems. (1 Punkt)
- c) Beurteilen Sie qualitativ, also ohne konkrete Zahlenwerte zu nennen, den Gültigkeitsbereich der Linearisierung des Systems. (1 Punkt)

Aufgabe 8. (11 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{e^s}{k} \frac{3s^2 - 42s + 3ks - 42k}{s^4 + 3s^3 + 400s^2 + 1200s} e^{-s}$$

mit dem konstanten Parameter $k \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.

- a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar).
Hinweis: Das System besitzt eine Polstelle bei $s = -3$. (3 Punkte)
- b) Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplitudengang des Systems. (2 Punkte)
- c) Bei der Berechnung des Phasengangs wird üblicherweise die arctan-Funktion verwendet. Erläutern Sie anhand des Einheitskreises, weshalb dies notwendig ist. (2 Punkte)

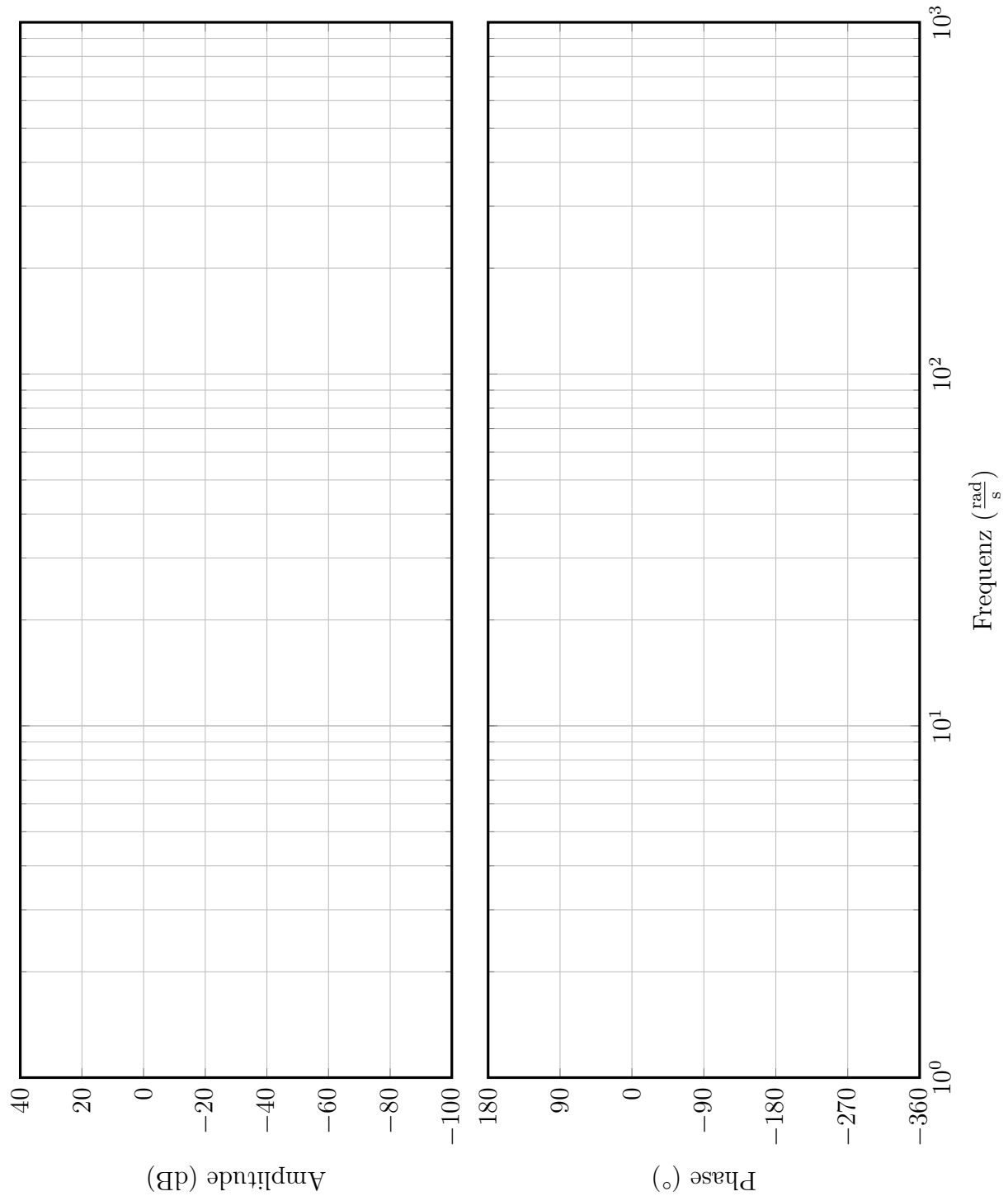
Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = 10 (s + 40) \frac{1}{s - 10} \frac{1}{s^2 + 800s + 1600} .$$

- d) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs. Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (4 Punkte)

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 16 und 17 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 17 bewertet.



Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 16 und 17 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 17 bewertet.

