



Lösungsblatt zur Prüfung im Fach
Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Wintersemester 2022/2023

am 03.03.2023, 12:00 – 13:30 Uhr

Punktetabelle

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	insgesamt
Punkte	29	9	10	9	12	5	5	11	90
erreicht									

Notentabelle

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (29 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen. In dieser Aufgabe werden keine Teilergebnisse oder Rechenwege bepunktet.

a) Welche Eigenschaften besitzt das System $\dot{y}(t) + 1 = u(t)$? (1 Punkt)

☐ Linear

☒ Zeitinvariant

b) Die Pole der Übertragungsfunktion eines Systems müssen auch Eigenwerte der Systemmatrix des gleichen Systems in Zustandsraumdarstellung sein. (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

c) Haben das Zählerpolynom und Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion die gleiche Ordnung, so ist das System sprunghfähig. (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

d) Das Vorzeichen einer Nullstelle hat im Bodediagramm Einfluss auf den Phasengang. (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

e) Die Parallelschaltung von den asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen zweier linearer, zeitinvarianter Systeme kann instabil sein. (1 Punkt)

☐ Wahr

☒ Falsch

f) Ein lineares, zeitinvariantes System mit verschwindenden Anfangsbedingungen wird mit dem Eingangssignal $u_1(t) = 2\sigma(t)$ angeregt. Der zugehörige Systemausgang $y_1(t)$ ist links in Abbildung 1 dargestellt. Für ein zweites Eingangssignal, bei dem sich

auch um ein sprungförmiges Signal bei $t = 0$ handelt, ergibt sich der Systemausgang $y_2(t)$ der rechts in Abbildung 1 dargestellt ist. Nennen Sie das Eingangssignal $u_2(t)$. (2 Punkte)

$$u_2(t) = \boxed{0.5} \sigma(t)$$

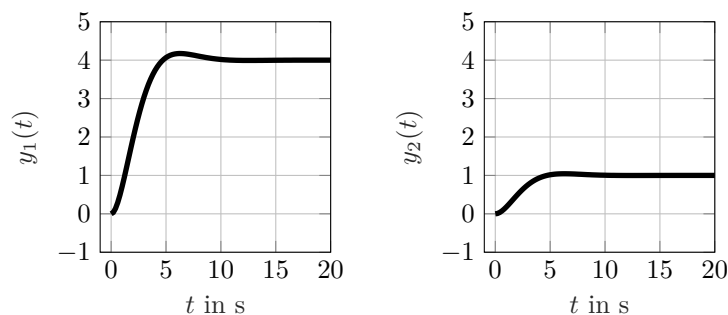


Abbildung 1: Ausgangssignale $y_i(t)$, $i = 1, 2$

g) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{s^2 - s + 10}{5s^3 + s^2 + 59s + 12}$$

☐ Ja ☒ Nein

h) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{12s^2 + 6s + 2}{2s^3 + 2s^2 + 2}.$$

(i) Welche Aussage trifft auf die Impulsantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☐ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 0$ ☒ $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 6$

(ii) Welche Aussage trifft auf die Sprungantwort der Übertragungsfunktion zu? (1 Punkt)

☐ $\lim_{t \rightarrow 0} h_2(t) = 1$ ☒ $\lim_{t \rightarrow 0} h_2(t) = 0$

- i) Die Impulsantwort eines Systems $G_3(s)$ ist gegeben durch $g_3(t) = e^{-5t}$, $t > 0$. Berechnen Sie die Sprungantwort $h_3(t)$ des Systems. (2 Punkte)

$$h_3(t) = \boxed{h_3(t) = 0.2 (1 - e^{-5t})}$$

- j) Geben Sie die asymptotische Steigung der Amplitudengänge $\frac{dA_4(\omega)}{d\omega}$ und $\frac{dA_5(\omega)}{d\omega}$ in dB/Dek des Frequenzgangs der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_4(s) = K \frac{5s - 1}{(s + a)(s + b)^2}, \quad K, b > 0 > a \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} = \boxed{-40 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

$$G_5(s) = \frac{s(s + 3)}{(s - 2)^2} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_5(\omega)}{d\omega} = \boxed{0 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

- k) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Phasengänge $\varphi_4(\omega)$ und $\varphi_5(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_4(s) = K \frac{5s - 1}{(s + a)(s + b)^2}, \quad K, b > 0 > a \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_4(\omega) = \boxed{-180^\circ}$$

$$G_5(s) = \frac{s(s + 3)}{(s - 2)^2} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_5(\omega) = \boxed{0^\circ \text{ bzw. } 360^\circ}$$

- l) Das lineare, zeitinvariante System $G_6(s)$ wird mit dem Signal $u_6(t) = \sin(5t)$ angeregt. Der Amplitudengang $A_6(\omega)$ und der Phasengang $\varphi_6(\omega)$ des Systems sind gegeben durch

$$A_6(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}, \quad \varphi_6(\omega) = -2 \arctan(\omega).$$

Berechnen Sie die den zugehörigen Systemausgang $y_6(t)$ unter der Annahme verschwindender Anfangsbedingungen. (2 Punkte)

$$y_6(t) = \boxed{y_6(t) = \frac{1}{26} \sin(5t - 2 \arctan(5))}$$

- m) Gegeben sind die Zustandsgleichungen des Systems $G(s)$ mit Eingang $U(s)$, Ausgang $Y(s)$ und Zustandsvektor $X(s) = [X_1(s), X_2(s)]^T$ im Bildbereich:

$$X_1(s) = \frac{2}{s+6}U(s), \quad X_2(s) = \frac{6}{s+2}U(s), \quad Y(s) = X_1(s) - X_2(s).$$

- (i) Wie lautet das Zustandsraummodell in Matrix-Schreibweise? (2 Punkte)

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☒ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$

- (ii) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (1 Punkt)

☒ asymptotisch stabil ☐ instabil ☐ grenzstabil

- n) Das System $G_8(s)$ wird durch die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}}_8 = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{x}_8 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_8, \quad y_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_8$$

beschrieben.

- (i) Ist das System diagonalisierbar? (1 Punkt)

☐ Ja ☒ Nein

- (ii) Kann das System auf Regelungs-Normalform transformiert werden? (1 Punkt)

☒ Ja ☐ Nein

- (iii) Existiert eine eindeutige Zustandsraumtransformation $x_8 = T\tilde{x}_8$ um das System $G_8(s)$ durch die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\tilde{\underline{x}}}_8 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_8 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_8, \quad y_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_8$$

zu beschreiben? (1 Punkt)

☐ Ja ☒ Nein

- o) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 2) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 3) zu. (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Sprungantwort	Bode-Diagramm
$G_1(s) = \frac{s - 10}{s^2 + 1}$	C	A
$G_2(s) = \frac{-10}{s + 1}$	B	D
$G_3(s) = \frac{s + 5}{(s - 0.1)(s + 100)}e^{-s}$	D	C
$G_4(s) = \frac{100s(s + 1)}{(s + 2)^2(s + 10)}$	A	B

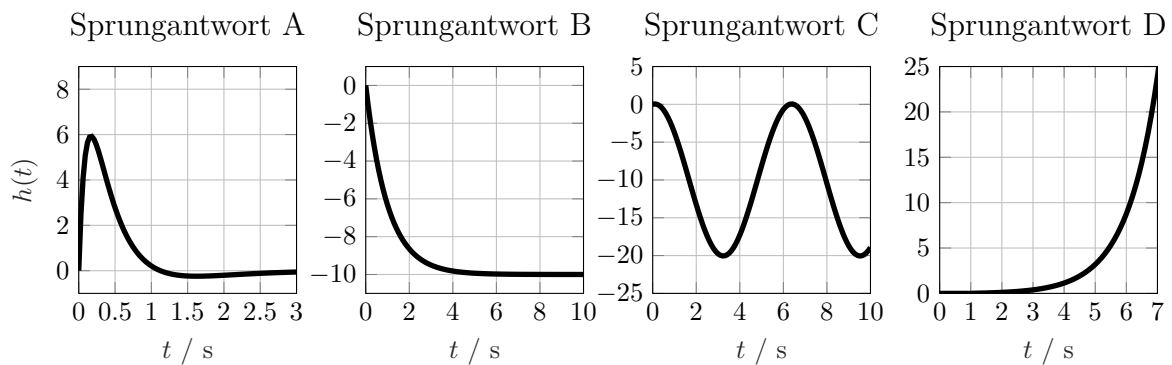


Abbildung 2: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

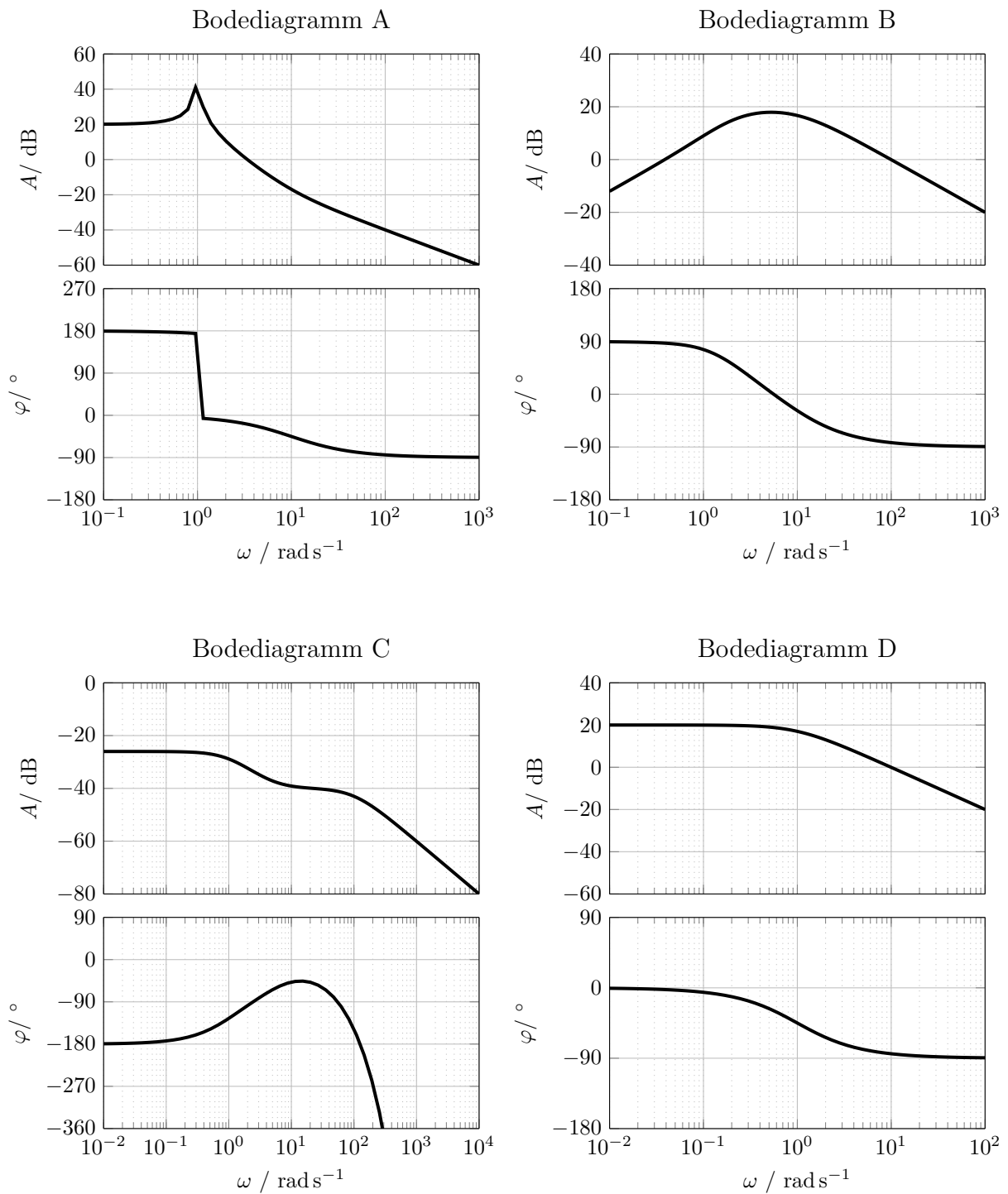
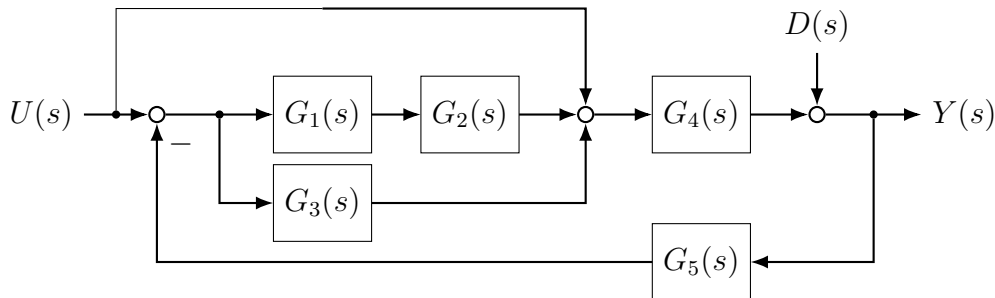


Abbildung 3: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingängen $U(s)$ und $D(s)$ sowie Ausgang $Y(s)$.



Hinweis: Aufgabenteile a), b) und c) können unabhängig von allen anderen Aufgabenteilen bearbeitet werden. Die Aufgabenteile d) und e) hängen ausschließlich von dem Ergebnis des Aufgabenteils c) ab.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_U(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. Nehmen Sie $D(s) = 0$ an. (4 Punkte)
- Nehmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_D(s) = Y(s)/D(s)$ als gegeben an. Geben Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$ und $D(s)$ sowie $G_U(s)$ und $G_D(s)$ an. Sie brauchen den Term für $G_U(s)$ nicht einzusetzen. (1 Punkt)
- In allen folgenden Aufgabenteilen gilt

$$G_1(s) = G_2(s) = G_3(s) = 1, \quad G_4(s) = \frac{a}{2s + 2}, \quad G_5(s) = 5, \quad D(s) = 0$$

für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme und den Eingang $D(s)$. Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ ein konstanter Parameter. Setzen Sie die Funktionen in die Gleichung für $Y(s)$ ein und vereinfachen Sie hierbei die Brüche so weit es geht. (1 Punkt)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil b) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie mit folgender Gleichung:

$$Y(s) = \frac{(2G_1 + G_2G_3 + 1 - G_2)G_4}{1 + G_4(G_1 + G_2G_3)G_5}U(s) + G_D(s)D(s)$$

- Begründen Sie warum der Parameter $a \in \mathbb{R}$ die Stabilität des Systems beeinflusst. (1 Punkt)
- Nehmen Sie an, dass $a = 1$ gilt. Bei der vereinfachten Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil c) handelt es sich um ein PT_1 -Glied. Bestimmen Sie Konstanten K und T der allgemeinen Übertragungsfunktion eines PT_1 -Glieds

$$G_{PT_1}(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

sodass sich die Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil c) ergibt. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 2.

- a) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion $G_U(s)$ wird das Eingangssignal von $G_1(s)$ beziehungsweise $G_3(s)$ als eine Hilfsgröße $X_1(s)$ eingeführt. Es lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$Y(s) = G_4(s) [U(s) + G_2(s)G_1(s)X_1(s) + G_3(s)X_1(s)] \quad (1)$$

$$X_1(s) = U(s) - G_5(s)Y(s) \quad (2)$$

Eliminieren von $X_1(s)$ durch Einsetzen von (2) in (1) und anschließendem Ausklammern ergibt dann

$$Y(s) = G_4(s) [U(s) + (G_1(s)G_2(s) + G_3(s))(U(s) - G_5(s)Y(s))] \quad (3)$$

Ausmultiplizieren und Umstellen liefert dann

$$Y(s) = G_4U(s) + G_4(G_1G_2 + G_3)U(s) - G_4G_5(G_1G_2 + G_3)Y(s) \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow (1 + G_4G_5(G_1G_2 + G_3))Y(s) = (G_4(1 + G_1G_2 + G_3))U(s) \quad (5)$$

Die Gesamtübertragungsfunktion ist damit

$$G_U(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_4(1 + G_1G_2 + G_3)}{1 + G_4G_5(G_1G_2 + G_3)} \quad (6)$$

- b) Da das System linear ist, ergibt sich der Ausgang $Y(s)$ durch Addition des Übertragungsverhaltens beider Eingänge. Das heißt

$$Y(s) = G_U(s)U(s) + G_D(s)D(s) \quad (7)$$

- c) Mit den Übertragungsfunktionen aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$Y(s) = \frac{(1 + 1 + 1) \frac{a}{2s + 2}}{1 + \frac{a}{2s + 2} (1 + 1) 5} U(s) + G_D(s) 0 \quad (8)$$

was vereinfacht werden kann zu

$$Y(s) = \frac{\frac{3a}{2s + 2}}{1 + \frac{10a}{2s + 2}} U(s) = \frac{3a}{2s + 2 + 10a} U(s). \quad (9)$$

Alternative Lösung: Einsetzen der Übertragungsfunktionen führt zu der gleichen Übertragungsfunktion (8).

d) 2 mögliche Antworten

- Die Übertragungsfunktion (9) hat den Pol $s = -\frac{1}{2}(2 + 10a)$ dessen Lage durch a auf die imaginäre Achse, die linke komplexe Halbebene oder rechte komplexe Halbebene verschoben werden kann.
- Es gibt $a \in \mathbb{R}$, sodass $2 + 10a > 0$. Es gibt aber auch $a \in \mathbb{R}$, sodass $2 + 10a < 0$ gilt. Daher kann das Hurwitz-Kriterium je nach Wert von a erfüllt sein oder nicht. Ist es erfüllt, dann gilt asymptotische Stabilität. Ist es nicht erfüllt, so ist das System nicht asymptotisch stabil. Dementsprechend beeinflusst a die Stabilität des Systems.

e) Die Übertragungsfunktion eines PT_1 -Glieds ist

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}. \quad (10)$$

Um K und T bestimmen zu können, muss der Summand 1 im Nenner der Übertragungsfunktion (9) erzeugt werden. Einsetzen von $a = 1$ liefert

$$\frac{3}{2s + 12} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{2}{12}s + 1} \stackrel{!}{=} \frac{K}{Ts + 1}. \quad (11)$$

Daher sind die Konstanten $K = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ und $T = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Die Impulsantwort eines linearen, zeitinvarianten Systems lautet

$$g(t) = t^2 e^{-3t}.$$

Hinweis: Aufgabenteile b) und c) können unabhängig von den vorherigen bearbeitet werden.

- a) Ist das System asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- b) Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems mit Hilfe des Faltungsintegrals. (4 Punkte)
- c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems. (1 Punkt)
- d) Berechnen Sie mit Hilfe der Übertragungsfunktion aus c) gegen welchen Wert die Sprungantwort konvergiert für $t \rightarrow \infty$. (1 Punkt)
- e) Geben Sie die Differentialgleichung des Systems an. Die Anfangsbedingungen müssen nicht angegeben werden. (1 Punkt)
- f) Wie viele Eigenwerte besitzt die Differentialgleichung aus dem Aufgabenteil e) und wie lauten diese? (1 Punkt)
- g) Durch einen Umbau des Experiments entsteht eine zusätzliche Totzeit von 0,1 Sekunden zwischen Ein- und Ausgang. Geben Sie die nun vorliegende Differentialgleichung an. (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 3.

- a) Für $t \rightarrow \infty$ dominiert die Exponentialfunktion und bestimmt das Konvergenzverhalten bestimmt, wodurch $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$. Damit ist das System asymptotisch stabil.
- b) Das Faltungsintegral lautet $y(t) = \int_0^t g(t)u(t - \tau) d\tau$. Zur Berechnung der Sprungantwort $h(t)$ ist $u(t) = \sigma(t)$. Auf dem betrachteten Intervall $\tau \in [0, t]$ ist $\sigma(t - \tau)$ stets 1, was im Folgenden eingesetzt wird. Anschließend wird partielle Integration durchge-

führt.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t g(t)\sigma(t-\tau) \, d\tau = \int_0^t g(t) \cdot 1 \, d\tau \\
 &= \left[\tau^2 \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-3\tau} \right]_{\tau=0}^t - \int_0^t 2\tau \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-3\tau} \, d\tau \\
 &= \left(-\frac{1}{3}\right) (t^2 e^{-3t} - 0) + \frac{1}{3} \int_0^t 2\tau e^{-3\tau} \, d\tau \\
 &= -\frac{1}{3} t^2 e^{-3t} + \frac{1}{3} \left(\left[2\tau \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-3\tau} \right]_0^t - \int_0^t 2 \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-3\tau} \, d\tau \right) \\
 &= -\frac{1}{3} t^2 e^{-3t} + \frac{1}{3} \left(\left(-\frac{1}{3}\right) (2te^{-3t} - 0) + \frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{3}\right) e^{-3\tau} \right]_0^t \right) \\
 &= -\frac{1}{3} t^2 e^{-3t} + \frac{1}{3} \left(\left(-\frac{2}{3}\right) te^{-3t} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) (e^{-3t} - 1) \right) \\
 &= -\frac{1}{3} t^2 e^{-3t} - \frac{2}{9} te^{-3t} - \frac{2}{27} e^{-3t} + \frac{2}{27}
 \end{aligned}$$

- c) Für die Übertragungsfunktion gilt $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Mit Hilfe der Korrespondenzen ergibt sich

$$G(s) = \frac{2}{(s+3)^3}$$

- d) Für den Grenzwert des Ausgangssignals eines linearen, zeitinvarianten Systems gilt generell

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) U(s).$$

Damit lautet der Grenzwert der Sprungantwort des gegebenen Systems

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{2}{(s+3)^2} \frac{1}{s} = \frac{2}{27}.$$

Die **Sprungantwort** des Systems konvergiert gegen einen konstanten Wert. Damit ist das System asymptotisch stabil.

- e) Nach Ausmultiplizieren der Übertragungsfunktion zu

$$\frac{2}{(s+3)^3} = \frac{2}{s^3 + 9s^2 + 27s + 27}$$

lässt sich aus den Koeffizienten die Differentialgleichung aufstellen als

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 27y = 2u.$$

- f) Die Differentialgleichung hat drei Eigenwerte $\lambda_{1,2,3} = -3$.

Begründung, nicht erforderlich: Die Eigenwerte der Differentialgleichung entsprechen

den Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung. Das charakteristische Polynom der DGL ist wiederum gleich wie das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion. Daher entsprechen die Eigenwerte der Differentialgleichung den Polstellen der Übertragungsfunktion.

Alternative Begründung: Aus der Theorie ist bekannt, dass $g(t)$ ein Teil der Lösung der DGL ist. Im gegebenen $g(t)$ sieht man direkt, dass $\lambda = -3$ ein Eigenwert der DGL ist. Wenn ein Eigenwert dreifach auftritt, lauten die Ansatzfunktionen zur Lösung der DGL $e^{\lambda t}$ und zusätzlich $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$, wie hier vorliegend. So lassen sich die Eigenwerte direkt aus der Sprungantwort ablesen.

g) Die DGL mit Totzeit lautet

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 27y = 2u(t - 0, 1).$$

Aufgabe 4. (9 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die Differentialgleichung

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + dy = \alpha u$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 3, \quad \dot{y}(0) = 2, \quad u(0) = 1$$

beschrieben.

Hinweis: Die Aufgabenteile b), c), d) und e) können unabhängig von den jeweils vorigen bearbeitet werden.

- a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an. (2 Punkte)
- b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an. (1 Punkt)
- c) Überführen Sie die Differentialgleichung in eine Zustandsraumdarstellung mit den Zuständen $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$. Geben Sie auch die Anfangsbedingungen an. (2.5 Punkte)
- d) Stellen Sie eine weitere Zustandsraumdarstellung des Systems auf. Die Anfangsbedingungen müssen nicht angegeben werden. (1 Punkt)

Im Folgenden sei $a = 0$, $b = 2$, $d = -32$ und $\alpha = 12$.

- e) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems. (2.5 Punkte)

Lösung Aufgabe 4.

- a) Anwendung der Laplace-Transformation auf beide Seiten der DGL ergibt

$$\begin{aligned} a(s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s \dot{y}(0) - \ddot{y}(0)) + b(s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)) + d Y(s) &= \alpha U(s) \\ \Leftrightarrow a(s^3 Y(s) - s^2 \cdot 3 - s \cdot 2 - 1) + b(s^2 Y(s) - s \cdot 3 - 2) + d Y(s) &= \alpha U(s) \\ \Leftrightarrow (as^3 + bs^2 + d)Y(s) - 3as^2 + (-2a - 3b)s + (-1 - 2b) &= \alpha U(s). \end{aligned}$$

Umstellen nach $Y(s)$ ergibt

$$Y(s) = \frac{\alpha}{as^3 + bs^2 + d} U(s) + \frac{-3as^2 + (-2a - 3b)s + (-1 - 2b)}{as^3 + bs^2 + d}.$$

- b) Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = \frac{\alpha}{as^3 + bs^2 + d}.$$

- c) Zunächst wird die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung umgestellt

$$\ddot{y} = -\frac{b}{a}\dot{y} - \frac{d}{a}y + \frac{\alpha}{a}u.$$

Dies lässt sich direkt in die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d}{a} & 0 & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha}{a} \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}\end{aligned}$$

überführen.

- d) Eine Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormform lässt sich anhand der Koeffizienten der Differentialgleichung bzw. Übertragungsfunktion aufstellen zu

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d}{a} & 0 & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}\end{aligned}$$

wobei die Differentialgleichung mit dem Faktor $(-\frac{1}{a})$ durchmultipliziert wurde. Diese unterscheidet sich nur im $\underline{b}$ - und $\underline{c}$ -Vektor von der Zustandsraumdarstellung aus d). Grundsätzlich kann bei gegebener Eingangs-Ausgangs-Darstellung (Differentialgleichung in y und u oder Übertragungsfunktion) entweder der Eingang oder der Ausgang mit der Konstanten multipliziert werden, das Übertragungsverhalten des Systems bleibt das gleiche.

- e) Für die Impulsantwort gilt $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Dazu wird die Übertragungsfunktion

$$\frac{12}{s^2 - 32} = \frac{12}{2(s+4)(s-4)} = \frac{6}{(s+4)(s-4)}$$

zunächst mittels Partialbruchzerlegung aufgeteilt in

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{6}{(s+4)(s-4)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-4} \\ \Leftrightarrow 6 &= A(s-4) + B(s+4) = (A+B)s + (-4A+4B).\end{aligned}$$

Damit erhält man für die Koeffizienten $A = -\frac{3}{4}$, $B = \frac{3}{4}$ und somit gilt

$$G(s) = \frac{-\frac{3}{4}}{s+4} + \frac{\frac{3}{4}}{s-4}.$$

Durch Laplace-Rücktransformation mit Hilfe der Korrespondenzen folgt

$$g(t) = -\frac{3}{4}e^{-4t} + \frac{3}{4}e^{4t}.$$

Aufgabe 5. (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_1 : \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, & \underline{x}(t=0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Aufgabenteile a), b), d), e) und f) können unabhängig von den anderen bearbeitet werden.

- Erläutern Sie kurz die Bedeutung der Transitionsmatrix e^{At} . (1 Punkt)
- Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} des Systems Σ_1 mit einer geeigneten Methode. (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Lösung $\underline{x}(t)$ des Systems Σ_1 für einen konstanten Eingang $u(t) = u_0$, $t \geq 0$. (3 Punkte)
- Geben Sie in Abhängigkeit einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ (d.h. ohne die obigen Zahlenwerte einzusetzen) mit zwei Zuständen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$) die Berechnungsvorschrift an, mit der die Transformationsmatrix für die Transformation auf Regulationsnormalform bestimmt werden kann. (1 Punkt)
- Leiten Sie mithilfe der Laplace-Transformation die Formel zur Berechnung der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ aus einer allgemeinen Zustandsraumdarstellung $\{\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}, d\}$ mit verschwindenden Anfangsbedingungen her. (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems Σ_1 . (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 5.

- Fundamentallösung, homogene Lösung

$$b) \quad \begin{pmatrix} e^{-3t} & \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{2} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

c)

d)

e)

$$f) \quad G(s) = \frac{2s+8}{s^2+4s+3}$$

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Im Folgenden wird das in nebenstehender Abbildung gezeigte System aus zwei untereinander angebrachten Flüssigkeitstanks betrachtet. Der obere Tank 1 wird über einen eingehenden Volumenstrom $\dot{Q}_{1,in} = u$ gespeist. Tank 1 besitzt außerdem ein Abflussventil, durch das der Volumenstrom $\dot{Q}_{1,out} = \xi_1 h_1(t)$ mit $\xi_1 > 0$ in Behälter 2 abfließt. Behälter 2 besitzt ebenfalls einen Abfluss, durch den der Volumenstrom $\dot{Q}_{2,out} = \xi_2 \sqrt{h_2(t)}$, $\xi_2 > 0$ abfließt. Zu Beginn sind die Behälter leer. Aus einer Volumenbilanz der Form $\dot{Q}_i = \dot{Q}_{i,in} - \dot{Q}_{i,out}$ je Behälter erhält man

$$\pi \left(r_1 - \frac{h_1(t)}{2} \right)^2 \dot{h}_1(t) = u(t) - \xi_1 h_1(t)$$

$$\pi r_2^2 \dot{h}_2(t) = \xi_1 h_1(t) - \xi_2 \sqrt{h_2(t)}$$

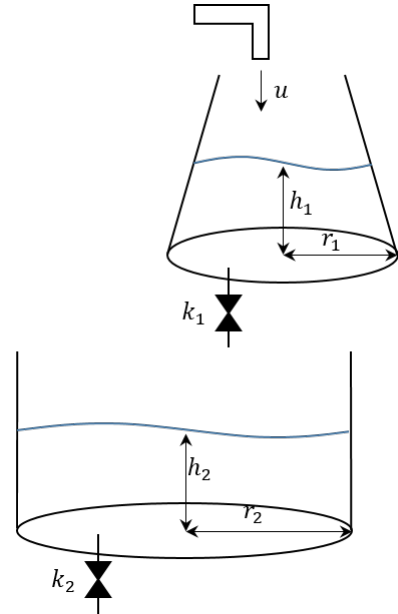


Abbildung 4: Tankkaskade

- Es wird der Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^\top$ eingeführt. Begründen Sie kurz die Wahl dieser Zustände. Weshalb wurde nicht z.B. $\tilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}^\top$ als Zustandsvektor gewählt? (1 Punkt)
- Stellen Sie eine nichtlineare Zustandsraumdarstellung für das Gesamtsystem auf. Verwenden Sie dazu den Zustandsvektor $\underline{x}$ aus Teilaufgabe a), den Eingang $u = \dot{Q}_{1,in}$ sowie den Ausgang $y = h_2$. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems in Abhängigkeit des stationären Eingangs u_0 . (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 6.

- Einzigste Größen mit Dynamik, keine Konstanten, bla
- $\dot{x}_1 = \frac{1}{\pi} \left(r_1 - \frac{x_1}{2} \right)^{-2} (u_0 - \xi_1 x_1)$, $\dot{x}_2 = \frac{1}{\pi r_2^2} (\xi_1 x_1 - \xi_2 \sqrt{x_2})$
- $x_{1,s} = \frac{u}{\xi_1}$, $x_{2,s} = \frac{u_0^2}{\xi_2^2}$

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1 - x_1 - e^{x_2} \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_1^2 - x_1 x_3 - \sin(x_2) .\end{aligned}$$

- a) Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $\underline{x}_S = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^\top$. (3 Punkte)
- b) Beurteilen Sie die Stabilität des linearisierten Systems. (1 Punkt)
- c) Beurteilen Sie qualitativ, also ohne konkrete Zahlenwerte zu nennen, den Gültigkeitsbereich der Linearisierung des Systems. (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 7.

$$\begin{aligned}\text{a) } \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} -1 & -e^{x_2} & 0 \\ x_2 & x_1 & -1 \\ 1 + 2x_1 - x_3 & -\cos(x_2) & -x_1 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- b) Hurwitz-Kriterium, instabil (2 Punkte)
- c) Eine Linearisierung ist nur lokal gültig. (1 Punkt)

Aufgabe 8. (11 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{e^s}{k} \frac{3s^2 - 42s + 3ks - 42k}{s^4 + 3s^3 + 400s^2 + 1200s} e^{-s}$$

mit dem konstanten Parameter $k \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.

- a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar).
Hinweis: Das System besitzt eine Polstelle bei $s = -3$. (3 Punkte)
- b) Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplitudengang des Systems. (2 Punkte)
- c) Bei der Berechnung des Phasengangs wird üblicherweise die arctan-Funktion verwendet. Erläutern Sie anhand des Einheitskreises, weshalb dies notwendig ist. (2 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = 10 (s + 40) \frac{1}{s - 10} \frac{1}{s^2 + 800s + 1600}.$$

- d) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs. Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (4 Punkte)

Lösung Aufgabe 8.

- a) Die beiden Exponentialfunktionen eliminieren sich gegenseitig. Außerdem kann im Zähler der Faktor 3 sowie im Nenner s ausgeklammert werden, damit ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{3}{k} s^{-1} \frac{s^2 + s(k - 14) - 14k}{s^3 + 3s^2 + 400s + 1200} \quad (12)$$

Da der Pol $s = -3$ in der Aufgabenstellung gegeben ist, kann für das Polynom dritter Ordnung im Nenner die Polynomdivision

$$s^3 + 3s^2 + 400s + 1200 : (s + 3) = s^2 + 400 \quad (13)$$

durchgeführt werden, was zur faktorisierten Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{3}{k} s^{-1} \frac{s^2 + s(k - 14) - 14k}{(s + 3)(s^2 + 400)} \quad (14)$$

führt.

b) Mit $s = j\omega$ ergibt sich der Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{3}{k} \frac{1}{j\omega} \frac{-\omega^2 + j\omega(k-14) - 14k}{(j\omega + 3)(400 - \omega^2)} \quad (15)$$

und da der Betrag einer komplexen Zahl als $|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$ definiert ist, ergibt sich der Amplitudengang

$$A(\omega) = \frac{3}{|k|} \frac{1}{\omega} \frac{\sqrt{(\omega^2 + 14k)^2 + \omega^2(k-14)^2}}{\sqrt{9 + \omega^2} |400 - \omega^2|} \quad (16)$$

c) Die Phase einer komplexen Zahl berechnet sich als der Winkel zur Realteil-Achse in der komplexen Halbebene. Da die Achsenabschnitte jeweils dem Real- oder Imaginärteil entsprechen, berechnet sich der Winkel im rechtwinkligen Dreieck für eine komplexe Zahl die z.B. auf dem Einheitskreis liegt, zu $\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right)$.

d) Für das Zeichnen werden folgende Werte benötigt

$$c = 10, \quad r = 0, \quad \omega_{\min} = \omega_1 \approx 2.005, \quad \omega_2 = 10, \quad \omega_3 = 40, \quad \omega_4 \approx 797.995, \quad G^*(0) = -\frac{40}{16000}$$

$$A(\omega_{\min}) = 20 \cdot \log\left(\left| -10 \frac{4}{1600} \right| \cdot (10)^0\right) \approx -32.04\text{dB}$$

$$c \cdot G^*(0) = -\frac{1}{40} < 0 \Rightarrow \varphi(0) = (-1) \cdot 180^\circ + 0 \cdot 90$$

