



Lösungsblatt zur Prüfung im Fach
Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Sommersemester 2020

am 13.08.2020, 16:00 – 17:30 Uhr

Punktetabelle

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	insgesamt
Punkte	28	8	11	12	12	7	12	90
erreicht								

Notentabelle

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (28 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Welche Eigenschaft(en) besitzt das System $\dot{y}(t) + e^{y(t)} = u(t)$? (1 Punkt)

☐ linear

☒ zeitvariant

b) Am Eingang eines Systems liegt die Eingangsgröße $u(t) = a \sin(\omega t)$ an. Am Ausgang wird $y(t) = b \sin(\omega t + \pi)$ gemessen, $a, b \in \mathbb{R}$. Kann das System linear sein? (1 Punkt)

☒ Ja

☐ Nein

c) Eine Linearisierung gilt nur in der Umgebung einer Ruhelage. (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

d) Die Impulsantwort eines asymptotisch stabilen linearen Systems konvergiert immer gegen 0 für $t \rightarrow \infty$. (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

e) Bei der Transformation auf Regelungsnormalform ändern sich die Eigenvektoren des Systems nicht. (1 Punkt)

☐ Wahr

☒ Falsch

f) Wenn ein lineares System stabil ist, sind alle Einträge der Transitionsmatrix e^{At} beschränkt für $t \geq t_0$. (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

g) Beurteilen Sie die Stabilität der folgenden Übertragungsfunktion! (1 Punkt)

$$G_1(s) = \frac{s-1}{s^2(3s+2)\left(s+\frac{1}{7}\right)}$$

☐ Asymptotisch stabil

☐ Grenzstabil

☒ Instabil

h) Das Vorzeichen eines Pols hat im Bodediagramm Einfluss auf den Phasengang. (1 Punkt)

☒ Wahr

☐ Falsch

i) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \rightarrow \infty$ an! (2 Punkte)

$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^3+7s^2+10s} \qquad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_2(\omega) = \boxed{-360^\circ}$$

$$G_3(s) = \frac{s-1}{s^4+10s^3+35s^2+50s+24} \qquad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_3(\omega) = \boxed{-270^\circ}$$

j) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in dB/Dek der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \rightarrow \infty$ an! (2 Punkte)

$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^3+7s^2+10s} \qquad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_2(\omega)}{d\omega} = \boxed{-40 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

$$G_4(s) = K \frac{s+a}{(s+b)^2} e^{-T_t s}, \quad K, a, b, T_t > 0 \qquad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} = \boxed{-20 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

k) Gegeben sei das folgende Blockschaltbild

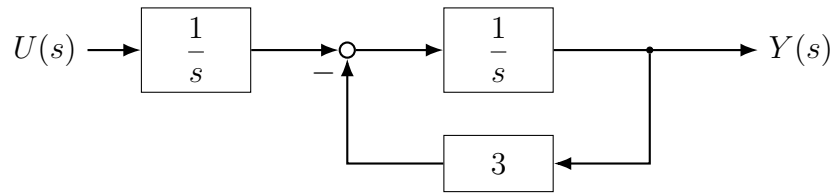


Abbildung 1: Blockschaltbild

(i) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ an ohne Verwendung von Doppelbrüchen an! (2 Punkte)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

(ii) Wie viele Zustände hat das System? (1 Punkt)

☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3

(iii) Wie lautet eine Zustandsraum-Darstellung des Systems? (2 Punkte)

$$\square \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

$$\square \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

$$\square \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

$$\square \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

$$\square \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

l) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \dot{y}^2 + e^{y(t)} = \sin(u(t))$$

um die Ruhelage $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$, $u(0) = 0$! (2 Punkte)

- | | |
|---|---|
| ☐ $\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + \Delta y = \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u$ | ☐ $\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} + e^2\Delta y = \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u$ |
| ☐ $\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + e^2\Delta y = 2\Delta u$ | ☐ $\Delta\ddot{y} + 4\Delta\dot{y} + \Delta y = 2\Delta u$ |
| ☒ $\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} + e^2\Delta y = \Delta u$ | ☐ $\Delta\ddot{y} + 4\Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$ |

m) Wie lautet die Laplace-Transformierte des folgenden Signals $f(t)$? (2 Punkte)

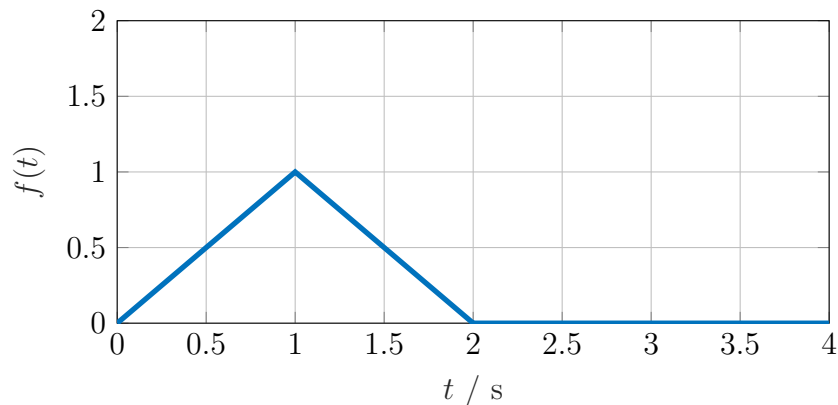


Abbildung 2: Zu transformierendes Zeitsignal $f(t)$

- | | |
|---|--|
| ☐ $F(s) = \frac{1}{s^2} + 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$ | ☒ $F(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$ |
| ☐ $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$ | ☐ $F(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$ |
| ☐ $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$ | ☐ $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$ |

n) Bestimmen Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$ der folgenden Übertragungsfunktion! (3 Punkte)

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2-1} \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad g(t) = \boxed{\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^t}$$

- o) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 3) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 4) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Sprungantwort	Bode-Diagramm
$G_1(s) = \frac{2(s-7)}{s+6}$	C	B
$G_2(s) = \frac{5(s+2)}{(s+3)^2(s+4)}$	A	C
$G_3(s) = \frac{1-s}{s^3+4s^2+16s}$	D	A
$G_4(s) = \frac{200}{s^2+4s+100}$	B	D

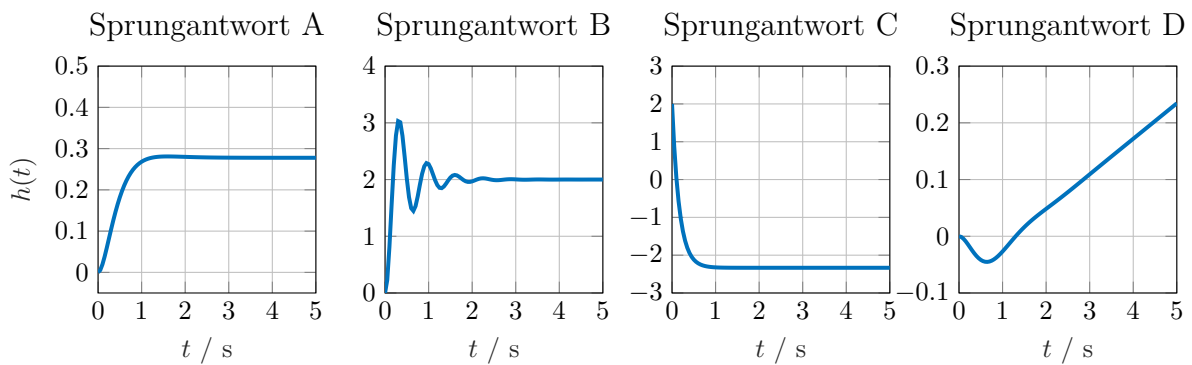


Abbildung 3: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen

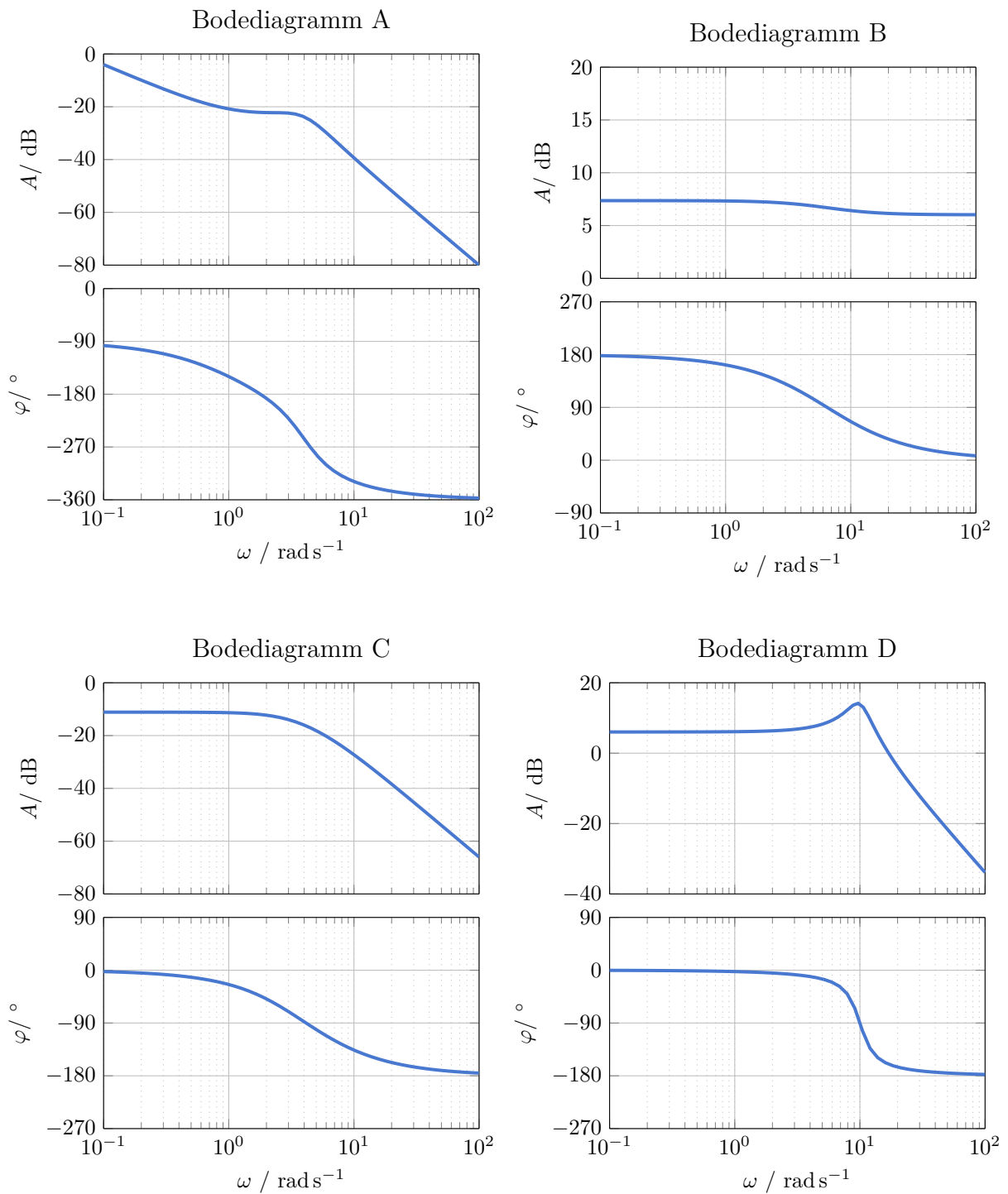


Abbildung 4: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2. (8 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingang $U(s)$ und Ausgang $Y(s)$.

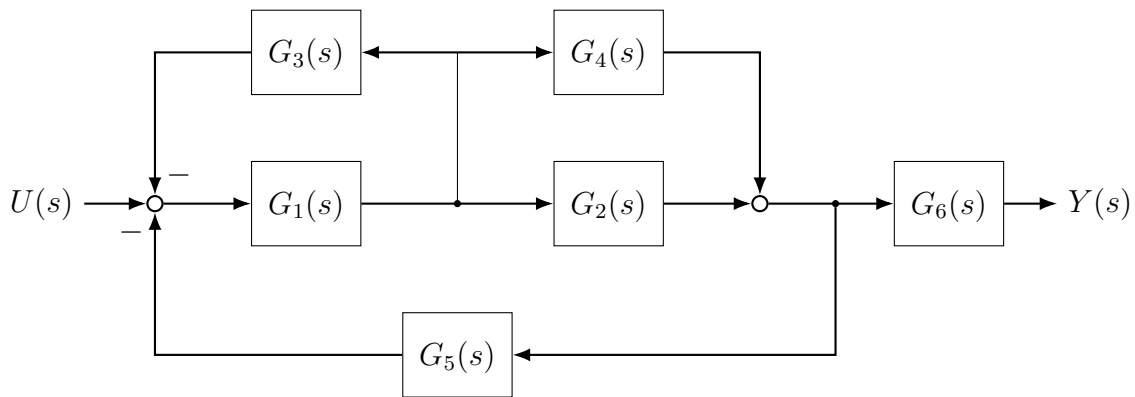


Abbildung 5: Blockschaltbild

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen! (4 Punkte)
- Wie lautet die Gesamt-Übertragungsfunktion $G(s)$, wenn folgende Übertragungsfunktionen angenommen werden? Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich! (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{1}{2}s + 1, \quad G_2(s) = \frac{1}{s + 4}, \quad G_3(s) = 2, \quad G_4(s) = 0, \quad G_5(s) = 3, \quad G_6(s) = 1$$

- Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 2.

- Mit den Zwischengrößen U_2 (am Eingang von G_2) und U_6 (am Eingang von G_6) erhält man

$$\begin{aligned} U_2 &= G_1(-G_3U_2 - G_5U_6 + U) \\ U_6 &= (G_2 + G_4)U_2 \\ Y &= G_6U_6, \end{aligned}$$

und durch Einsetzen und Umstellen folgt

$$G(s) = \frac{G_1G_6(G_2 + G_4)}{1 + G_1G_3 + (G_2 + G_4)G_1G_5}.$$

Alternative: Wird das Gesamtsystem als Verschaltung von Grundschaltungen von

Übertragungsfunktionen analysiert, ergibt sich

$$G(s) = \frac{\frac{G_1}{1+G_1G_3} (G_2 + G_4)}{1 + G_5 \frac{G_1}{1+G_1G_3} (G_2 + G_4)} G_6.$$

Auflösen der Doppelbrüche führt ebenfalls auf die oben hergeleitete Gesamt-Übertragungsfunktion.

b) Einsetzen und Vereinfachen führt auf

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}s^2 + 3s + 4}{s^3 + 12.5s^2 + 49s + 60}.$$

Optional: Es kann noch der Faktor $(s + 4)$ in Zähler und Nenner gekürzt werden, welcher zu der stabilen Pol-/Nullstelle $s = -4$ korrespondiert, sodass

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}s + 1}{s^2 + 8.5s + 15}.$$

c) *Wenn Pol-/Nullstelle nicht gekürzt wurde:* Die Vorzeichenbedingung ist erfüllt. Außerdem ist die Beiwertebedingung für Systeme 3. Ordnung erfüllt. Damit ist das System asymptotisch stabil.

Wenn Pol-/Nullstelle gekürzt wurde: Die gekürzte Polstelle war stabil. Für das verbleibende System ist die Vorzeichenbedingung erfüllt. Diese ist für ein System 2. Ordnung notwendig und hinreichend. Damit ist das System asymptotisch stabil.

Aufgabe 3. (11 Punkte)

Die Lösung $x(t)$ einer inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$x(t) = -2te^{2t}(u_0 - c).$$

Dabei ist $u_0 = \text{const.}$ die rechte Seite (Anregung) der DGL. Die Anfangsbedingungen der DGL lauten $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 2c \neq 0$.

Hinweis: Aufgabenteil e) kann unabhängig von den vorigen gelöst werden.

- a) Beurteilen Sie basierend auf dem Signal $x(t)$ die Stabilität des Systems! (1 Punkt)
- b) Wie lautet die Laplace-Transformierte $X(s)$ von $x(t)$? (2 Punkte)
- c) Bestimmen Sie durch Laplace-Rücktransformation in den Zeitbereich die Differentialgleichung, die durch $x(t)$ gelöst wird! (2 Punkte)
- d) Bringen Sie die Differentialgleichung aus dem vorigen Aufgabenteil mit den Zuständen $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ in Zustandsraumdarstellung mit Ausgang $y = x$! (2 Punkte)
- e) Transformieren Sie das System aus d) in die kanonische Normalform, sodass die transformierte Systemmatrix $\tilde{A}$ eine Jordan-Matrix ist! (4 Punkte)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil d) nicht lösen konnten, bestimmen Sie die kanonische Normalform von

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} u, & \underline{x}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 3.

- a) Das System ist instabil, da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$.
- b) Mit Korrespondenz 7 der Laplace-Transformation ergibt sich

$$X(s) = -2 \frac{1}{(s-2)^2} (u_0 - c)$$

- c) Das Ergebnis aus a) wird zunächst im Frequenzbereich umgestellt zu

$$X(s) (s^2 - 4s + 4) - 2c = -2u_0.$$

Dies lässt sich zurücktransformieren in den Zeitbereich zu

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = -2u_0,$$

wobei gemäß der Aufgabenstellung der Ausdruck $2c$ der Anfangsbedingung $\dot{x}_0$ entspricht.

d) Mit der Definition der Zustände $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ erhält man

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} u, & \underline{x}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2c \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}\end{aligned}$$

e) Die Systemmatrix A besitzt den doppelten Eigenwert $\lambda = 2$. Zu diesem Eigenwert gibt es genau einen linear unabhängigen Eigenvektor $\underline{v}_1 = [1, 2]^T$. Damit ist die Systemmatrix nicht diagonalisierbar und wird daher im Folgenden auf Jordan-Form gebracht.

Als Transformationsmatrix dient dabei eine Kette von Hauptvektoren $T = [t_1, t_2]$, worin t_1 einem Eigenvektor entspricht. Der benötigte zweite Hauptvektor t_2 wird bestimmt durch Lösen des Gleichungssystems

$$(A - \lambda I) t_2 = t_1$$

und ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} t_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow t_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Transformationsmatrix und ihre Inverse zu

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit wird das System in Jordan-Normalform transformiert durch

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_J &= T^{-1} A T \underline{x}_J + T^{-1} B u, & \underline{x}_{0,J} &= T^{-1} \underline{x}_0 \\ y &= C T \underline{x}_J \\ \Rightarrow \dot{\underline{x}}_J &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_J + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} u, & \underline{x}_{0,J} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2c \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_J \\ \Rightarrow \dot{\underline{x}}_J &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}_J + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} u, & \underline{x}_{0,J} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2c \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_J.\end{aligned}$$

Ergebnis mit alternativem System

Mit dem alternativen System aus dem Hinweis ergibt sich $\lambda = 2$, $\underline{v}_1 = [-2, 1]^T$. Die Berechnung des 2. Hauptvektors lautet damit

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} t_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow t_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Transformationsmatrix und ihre Inverse zu

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Damit wird das System in Jordan-Normalform transformiert durch

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_J &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_J + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} u, & \underline{x}_{0,J} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_J \\ \Rightarrow \dot{\underline{x}}_J &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}_J + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} u, & \underline{x}_{0,J} &= \begin{bmatrix} c \\ 2c \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_J. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Bestimmung von Eigenvektoren ist nicht eindeutig, da mit $\underline{v}_i$ auch $\alpha \underline{v}_i$, $\alpha \neq 0$ ein Eigenvektor von A ist. Genauso sind die Hauptvektoren nicht eindeutig. Damit ist die Umformung in die kanonische Normalform nicht eindeutig. In dieser Aufgabe ist die Matrix A_J eindeutig, nämlich ist sie der zu $\lambda = 2$ gehörende Jordan-Block

$$A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren $B_J, C_J, \underline{x}_{0,J}$ sind allerdings nicht eindeutig.

Aufgabe 4. (12 Punkte)

Die Differentialgleichung

$$ML \cdot \ddot{\theta}(t) - g(m + M) \cdot \theta(t) = u(t) \quad (1)$$

beschreiben das linearisierte dynamische Verhalten eines inversen Pendels auf einem Wagen mit Pendellänge L , Pendelmasse m , Wagenmasse M , Erdbeschleunigung g , linearisiertem Pendelwinkel $\theta(t)$ und der Kraft am Wagen $u(t)$.

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0.$$

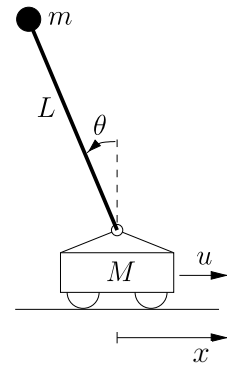


Abbildung 6: Pendel

- Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\Theta(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$! (2 Punkte)
- Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (2 Punkte)

Es sei nun $m = 0.6 \text{ kg}$, $M = 1 \text{ kg}$, $L = 1 \text{ m}$ und $g = 10 \text{ m/s}^2$

- Wie lautet die Lösung $\theta(t)$, wenn am Eingang eine impulsförmige Kraft $u(t) = \delta(t)$ wirkt und $\theta_0 = 0$ ist? (3 Punkte)
- Es wird nun ein Regler und ein Vorfilter eingesetzt, um den Pendelwinkel zu regeln (siehe Abbildung 7). Der Regler hat die Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{as + b}{s + 1}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- Für welche Werte a und b ist der geschlossene Kreis $G_{gk}(s) = \Theta(s)/W(s)$ asymptotisch stabil? (4 Punkte)
- Wie muss v gewählt werden, damit die stationäre Verstärkung bei 1 ist? (1 Punkt)

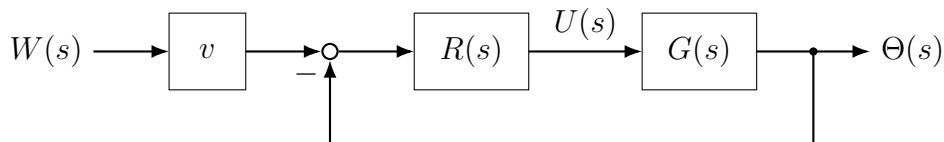


Abbildung 7: Geschlossener Regelkreis

Lösung Aufgabe 4.

- a) Die Laplace-Transformation der DGL liefert:

$$ML \cdot (s^2 \Theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0)) - g(m+M) \cdot \Theta(s) = U(s)$$
$$\Theta(s) = \frac{1}{ML \cdot s^2 - g(m+M)} U(s) + \frac{ML\theta_0 \cdot s}{ML \cdot s^2 - g(m+M)}$$

- b) Die Eigenwerte des Systems liegen bei

$$ML \cdot s^2 - g(m+M) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g(m+M)}{ML}} \quad (3)$$

Aufgrund des positiven Eigenwerts ist das System instabil.

- c) Mit den gegebenen Werten für die Parameter lautet die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 16} = \frac{1}{(s+4)(s-4)} \quad (4)$$

Mit dem Eingang $u(t) = \delta(t)$ folgt die Impulsantwort $\theta(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Diese kann entweder direkt mit der Tabelle gelöst werden oder über Partialbruchzerlegung:

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{8} (e^{4t} - e^{-4t}) \quad (5)$$

- d) (i) Der geschlossene Kreis berechnet sich zu

$$G_{gk}(s) = \frac{v(as+b)}{(s+1)(s^2-16) + as+b} = \frac{va \cdot s + vb}{s^3 + s^2 + (a-16) \cdot s + b-16} \quad (6)$$

Für asymptotische Stabilität müssen die VZB und das Hurwitzkriterium erfüllt sein. Es gilt:

$$a-16 > 0 \Rightarrow a > 16 \quad (7)$$

$$b-16 > 0 \Rightarrow b > 16 \quad (8)$$

$$a-16-(b-16) > 0 \Rightarrow a > b \quad (9)$$

Es muss also $a > b > 16$ gelten, damit das System asymptotisch stabil ist.

- (ii) Die stationäre Verstärkung liegt bei

$$G_{gk}(0) = \frac{vb}{b-16} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow v = \frac{b-16}{b} \quad (10)$$

Aufgabe 5. (12 Punkte)

Im Folgenden wird das in nebenstehender Abbildung gezeigte System aus zwei untereinander angebrachten Flüssigkeitstanks betrachtet. Der obere Tank 1 wird über einen eingehenden Volumenstrom $\dot{V}_{1,ein} = u$ gespeist. Tank 1 besitzt außerdem ein Abflussventil, durch das der Volumenstrom $\dot{V}_{1,aus} = k_1 h_1(t)$ mit $k_1 > 0$ in Behälter 2 abfließt. Behälter 2 besitzt ebenfalls einen Abfluss, durch den der Volumenstrom $\dot{V}_{2,aus} = k_2 \sqrt{h_2(t)}$, $k_2 > 0$ abfließt. Zu Beginn sind die Behälter leer. Aus einer Volumenbilanz der Form $\dot{V}_i = \dot{V}_{i,ein} - \dot{V}_{i,aus}$ je Behälter erhält man

$$\pi \left(r_1 - \frac{h_1(t)}{2} \right)^2 \dot{h}_1(t) = u(t) - k_1 h_1(t)$$

$$\pi r_2^2 \dot{h}_2(t) = k_1 h_1(t) - k_2 \sqrt{h_2(t)}$$

Hinweis: Aufgabenteil d) kann unabhängig von den vorigen gelöst werden

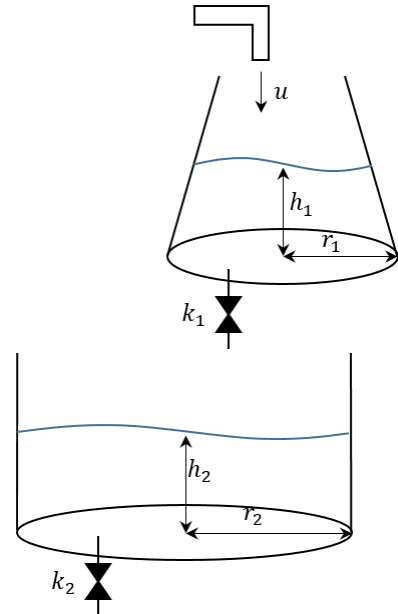


Abbildung 8: Tankkaskade

- Wie lautet die nichtlineare Zustandsraumdarstellung mit Zuständen $\underline{x} = [h_1, h_2]^T$, Eingang $u = \dot{V}_{1,ein}$ und Ausgang $y = h_2$? (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Ruhelage $\underline{x}_0 = [x_{1,0}, x_{2,0}]^T$ des Systems in Abhängigkeit des stationären Eingangs u_0 ! (2 Punkte)
- Der obere Behälter hat die Gesamthöhe $h_{1,max} = \frac{4}{3} r_1$, der untere Behälter die Gesamthöhe $h_{2,max} = 10 r_2$. Was muss für die Ausflussraten k_1 und k_2 bei einem konstanten Zufluss u_0 gelten, damit keiner der Behälter überläuft? (3 Punkte)
- Für eine bestimmte Wahl von r_1, r_2, k_1, k_2 lautet die nichtlineare Zustandsraumdarstellung des Systems

$$\dot{x}_1 = \frac{u - \frac{\pi}{2} x_1}{\pi \left(1 - \frac{x_1}{3} \right)^2}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\pi} x_1 - \frac{8}{\pi} \sqrt{x_2}.$$

Linearisieren Sie das System um die allgemeine Ruhelage $x_{1,0}, x_{2,0}$ für einen konstanten Eingang u_0 ! Die in A5 b) bestimmte Ruhelage müssen Sie *nicht* einsetzen. (4 Punkte)

Lösung Aufgabe 5.

- a) Umstellen der gegebenen Gleichungen nach den Ableitungen der Zustandsvariablen $\dot{\underline{x}} = [\dot{h}_1, \dot{h}_2]^T$ führt auf

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u(t) - k_1 x_1(t)}{\pi \left(r_1 - \frac{x_1(t)}{2} \right)^2} \\ \frac{k_1 x_1(t) - k_2 \sqrt{x_2(t)}}{\pi r_2^2} \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = x_2$

- b) Zur Bestimmung der Ruhelage wird $\dot{\underline{x}} = 0$ gesetzt. Umstellen und Einsetzen der ersten Zeile in die zweite ergibt

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= \frac{u_0}{k_1} \\ x_{2,0} &= \frac{k_1^2}{k_2^2} h_{1,0}^2 = \frac{u_0^2}{k_2^2}. \end{aligned}$$

- c) Bei einem konstanten Zufluss stellt sich eine Ruhelage ein. (Anm.: Vor Erreichen der Ruhelage können die Behälter nicht überlaufen, da sie von $\underline{x}_0 = [0, 0]^T$ aus aufgefüllt werden – es reicht also die Ruhelage zu betrachten.)

Damit die Behälter nicht überlaufen muss jeweils gelten $x_{i,0} < h_{i,\max}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x_{1,0} < \frac{4}{3}r_1 &\Leftrightarrow \frac{u_0}{k_1} < \frac{4}{3}r_1 \Rightarrow k_1 > \frac{3u_0}{4r_1} \\ x_{2,0} < 10r_2 &\Leftrightarrow \frac{u_0^2}{k_2^2} < 10r_2 \Rightarrow k_2 > \frac{u_0}{\sqrt{10r_2}}. \end{aligned}$$

- d) Die für die Linearisierung benötigten Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{-\frac{\pi}{2}\pi \left(1 - \frac{x_1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(u - \frac{\pi}{2}x_1\right) \pi \left(1 - \frac{x_1}{3}\right)}{\pi^2 \left(1 - \frac{x_1}{3}\right)^4} = \frac{\frac{\pi}{2} \left(\frac{x_1^2}{9} - 1\right) + \frac{2}{3}u \left(1 - \frac{x_1}{3}\right)}{\pi \left(1 - \frac{x_1}{3}\right)^4} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u} &= \frac{1}{\pi \left(1 - \frac{x_1}{3}\right)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{1}{\pi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -\frac{4}{\pi \sqrt{x_2}}. \end{aligned}$$

Die Zustandsraumdarstellung für $\Delta \underline{x} = [x_1 - x_{1,0}, x_2 - x_{2,0}]$ ergibt sich nach Einsetzen der allgemeinen Ruhelage zu

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\pi}{2} \left(\frac{x_{1,0}^2}{9} - 1 \right) + \frac{2}{3} u_0 \left(1 - \frac{x_{1,0}}{3} \right)}{\pi \left(1 - \frac{x_{1,0}}{3} \right)^4} & 0 \\ \frac{1}{\pi} & -\frac{4}{\pi \sqrt{x_{2,0}}} \end{bmatrix} \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi \left(1 - \frac{x_{1,0}}{3} \right)^2} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u, \quad \Delta \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \underline{x}$$

Aufgabe 6. (7 Punkte)

Gegeben sei folgendes System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_6 : \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

- Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (5 Punkte)

Lösung Aufgabe 6.

- Die Stabilität lässt sich über die Eigenwerte der Systemmatrix A bestimmen. Es gilt:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(\lambda + 1) \left((\lambda + 1)^2 - 1 \right) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2)\lambda = 0$$

Die Eigenwerte liegen also bei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -1$. Somit ist das System grenzstabil.

- Berechnung der Transitionsmatrix über Ähnlichkeitstransformation $e^{At} = V e^{\tilde{A}t} V^{-1}$:

Eigenvektor $\underline{v}_1$ zu $\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{v}_1 = 0 \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor $\underline{v}_2$ zu $\lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{v}_2 = 0 \Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor $\underline{v}_3$ zu $\lambda_3 = -1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{v}_3 = 0 \Rightarrow \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Transformationsmatrix

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Inversion der Matrix V wird über das Gauss-Verfahren berechnet:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Hiermit lässt sich die Exponentialmatrix e^{At} berechnen zu

$$e^{At} = V e^{\tilde{A}t} V^{-1} \quad (11)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-t} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{-2t} & 1 - e^{-2t} & 2 - 2e^{-t} \\ 1 - e^{-2t} & 1 + e^{-2t} & 2 - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & 2e^{-t} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Aufgabe 7. (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = 18 \frac{4s^2 - 1}{s^4 + 5s^3 - 14s^2 + 360s}.$$

- Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! (3 Punkte)
Hinweis: Die Übertragungsfunktion besitzt eine Polstelle bei $s = -10$
- Berechnen Sie Frequenzgang von $G_7(s)$ und ermitteln Sie daraus den Amplituden- und Phasengang des Systems! (5 Punkte)
- Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (4 Punkte)

Lösung Aufgabe 7.

- Die Faktorisierung der Übertragungsfunktion lautet:

$$72 \cdot s^{-1} \cdot \frac{(s + 0.5)(s - 0.5)}{(s + 10)(s^2 - 5s + 36)} \quad (15)$$

Hierbei wurde mittels Polynomdivision der Nenner faktorisiert:

$$\begin{array}{r} s^3 + 5s^2 - 14s + 360 = (s + 10)(s^2 - 5s + 36) \\ - s^3 - 10s^2 \\ \hline - 5s^2 - 14s \\ \quad 5s^2 + 50s \\ \hline \quad 36s + 360 \\ \quad - 36s - 360 \\ \hline \quad \quad 0 \end{array}$$

- Mit $s = j\omega$ ergibt sich der Frequenzgang

$$G(j\omega) = 18 \frac{(2j\omega + 1)(2j\omega - 1)}{j\omega(10 + j\omega)(36 - \omega^2 - 5j\omega)} = -18 \frac{4\omega^2 + 1}{j\omega(10 + j\omega)(36 - \omega^2 - 5j\omega)}, \quad (16)$$

der Amplitudengang

$$A_{\text{dB}}(\omega) = 18 \frac{4\omega^2 + 1}{\omega \sqrt{100 + \omega^2} \sqrt{(36 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}} \quad (17)$$

und der Phasengang

$$\varphi(\omega) = \arctan(2\omega) + \arctan(-2\omega) \quad \widehat{\pm\pi}^{\text{negativer Realteil}} \quad -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) - \psi(\omega) \quad (18)$$

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-5\omega}{36-\omega^2}\right) & \omega < 6 \\ \pm\pi + \arctan\left(\frac{-5\omega}{36-\omega^2}\right) & \omega \geq 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) - \psi(\omega) \quad (19)$$

c) Für das Zeichnen werden folgende Werte benötigt

$$c = 72, \quad r = -1, \quad \omega_{min} = 0.5, \quad G^*(0) = -\frac{1}{1440}$$

$$A_{dB}(\omega_{min}) = 20 \cdot \log\left(\left|-\frac{72}{1440}\right| \cdot 0.5^{-1}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{144}{1440}\right) = -20 \text{ dB} \quad (20)$$

$$c \cdot G^*(0) = -0.05 < 0 \Rightarrow \varphi(0) = -180^\circ + (-1) \cdot 90^\circ = -270^\circ \quad (21)$$

