UNIVERSITÄT STUTTGART
Institut für Systemdynamik

Prüfung im Fach **Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik**
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Sommersemester 2020 am 13.08.2020, 16:00 – 17:30 Uhr

Bitte tragen Sie auf diesem Doppelblatt Ihren Namen, Ihre Fachrichtung und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Lösungsblätter mit Ihrem Namen und legen Sie diese Blätter in das Doppelblatt ein.

Name, Vorname: _____

Studiengang: _____ Matr.-Nr: _____

Zutreffendes bitte ankreuzen und eventuell ausfüllen!

◯ Pflichtfach

◯ Wahlfach des Vertiefungsfachs: _____

Prüfer, Institut: _____

◯ Wiederholungsprüfung

Studierende, die diese schriftliche Prüfung als Wiederholungsprüfung ablegen und nicht bestehen, sind verpflichtet, sich unmittelbar nach Bekanntgabe der Prüfungsergebnisse persönlich im Sekretariat für eine mündliche Nachprüfung anzumelden.

Zur Kenntnis genommen: _____

(Unterschrift)

Zugelassen sind alle nicht-elektronischen Hilfsmittel sowie ein nicht-vernetzbarer nicht-grafikfähiger Taschenrechner. Zugelassene Taschenrechner sind in einer Liste vermerkt, die vorab vom Institut für Systemdynamik zur Verfügung gestellt wurde.

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	28	
2	8	
3	11	
4	12	
5	12	
6	7	
7	12	
insgesamt	90	

Korrektur: _____

Prüfer: _____

Einsicht: _____

Note: _____

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (28 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Welche Eigenschaft(en) besitzt das System $\dot{y}(t) + \mathrm{e}^{y(t)} = u(t)$? (1 Punkt)

☐ linear

☐ zeitvariant

b) Am Eingang eines Systems liegt die Eingangsgröße $u(t) = a\sin(\omega t)$ an. Am Ausgang wird $y(t) = b\sin(\omega t + \pi)$ gemessen, $a, b \in \mathbb{R}$. Kann das System linear sein? (1 Punkt)

☐ Ja

☐ Nein

c) Eine Linearisierung gilt nur in der Umgebung einer Ruhelage. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

d) Die Impulsantwort eines asymptotisch stabilen linearen Systems konvergiert immer gegen 0 für $t \to \infty$. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

e) Bei der Transformation auf Regelungsnormalform ändern sich die Eigenvektoren des Systems nicht. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

f) Wenn ein lineares System stabil ist, sind alle Einträge der Transitionsmatrix e^{At} beschränkt für $t \geq t_0$. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

g) Beurteilen Sie die Stabilität der folgenden Übertragungsfunktion! (1 Punkt)

$$G_1(s) = \frac{s-1}{s^2(3s+2)\left(s+\frac{1}{7}\right)}$$

☐ Asymptotisch stabil

☐ Grenzstabil

☐ Instabil

h) Das Vorzeichen eines Pols hat im Bodediagramm Einfluss auf den Phasengang. (1 Punkt)

☐ Wahr

☐ Falsch

i) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an! (2 Punkte)

$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^3+7s^2+10s} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_2(\omega) = \boxed{}$$

$$G_3(s) = \frac{s-1}{s^4+10s^3+35s^2+50s+24} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_3(\omega) = \boxed{}$$

j) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{\mathrm{d}A(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$ in dB/Dek der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an! (2 Punkte)

$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^3+7s^2+10s} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_2(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \boxed{}$$

$$G_4(s) = K\frac{s+a}{(s+b)^2}\mathrm{e}^{-T_t s}, \quad K,a,b,T_t > 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_4(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \boxed{}$$

k) Gegeben sei das folgende Blockschaltbild

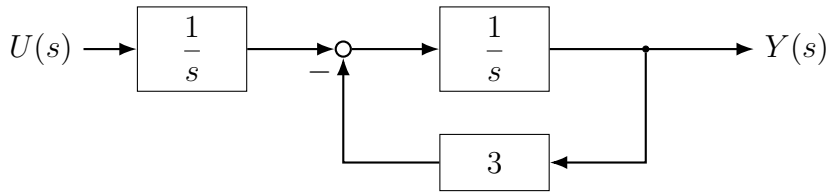


Abbildung 1: Blockschaltbild

(i) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ an ohne Verwendung von Doppelbrüchen an! (2 Punkte)

(ii) Wie viele Zustände hat das System? (1 Punkt)

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

(iii) Wie lautet eine Zustandsraum-Darstellung des Systems? (2 Punkte)

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

l) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \dot{y}^2 + e^{y(t)} = \sin(u(t))$$

um die Ruhelage $y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 1,\ u(0) = 0$! (2 Punkte)

☐ $\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + \Delta y = \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u$

☐ $\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} + e^2\Delta y = \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta u$

☐ $\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + e^2\Delta y = 2\Delta u$

☐ $\Delta\ddot{y} + 4\Delta\dot{y} + \Delta y = 2\Delta u$

☐ $\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} + e^2\Delta y = \Delta u$

☐ $\Delta\ddot{y} + 4\Delta\dot{y} + \Delta y = \Delta u$

m) Wie lautet die Laplace-Transformierte des folgenden Signals $f(t)$? (2 Punkte)

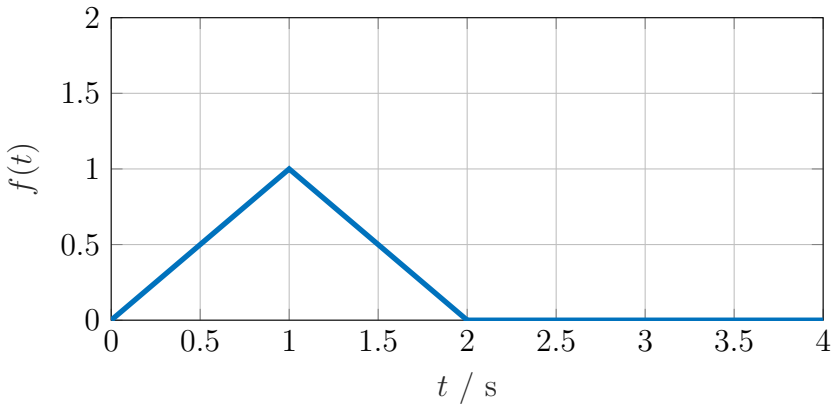


Abbildung 2: Zu transformierendes Zeitsignal $f(t)$

☐ $F(s) = \frac{1}{s^2} + 2\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$

☐ $F(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$

☐ $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$

☐ $F(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}$

☐ $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}$

☐ $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$

n) Bestimmen Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$ der folgenden Übertragungsfunktion! (3 Punkte)

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2-1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad g(t) = \boxed{}$$

o) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Sprungantworten (Abbildung 3) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 4) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	**Sprungantwort**	**Bode-Diagramm**
$G_1(s) = \dfrac{2(s-7)}{s+6}$		
$G_2(s) = \dfrac{5(s+2)}{(s+3)^2(s+4)}$		
$G_3(s) = \dfrac{1-s}{s^3+4s^2+16s}$		
$G_4(s) = \dfrac{200}{s^2+4s+100}$		

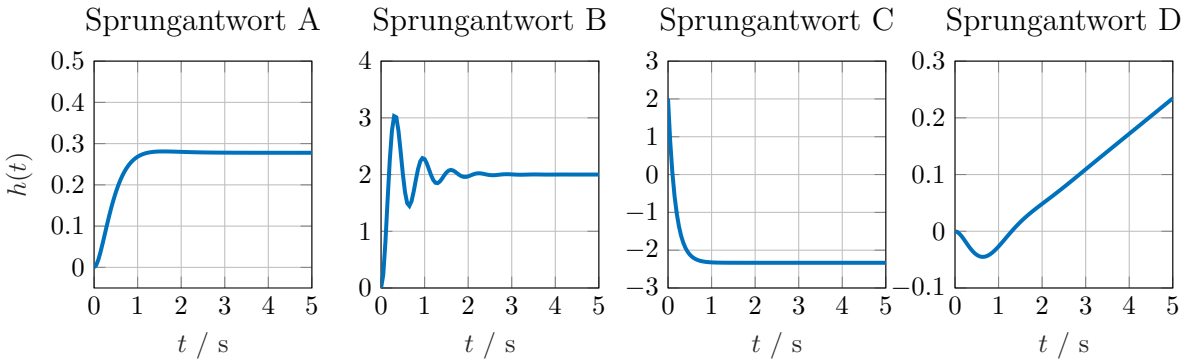


Abbildung 3: Sprungantworten A - D der Übertragungsfunktionen

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

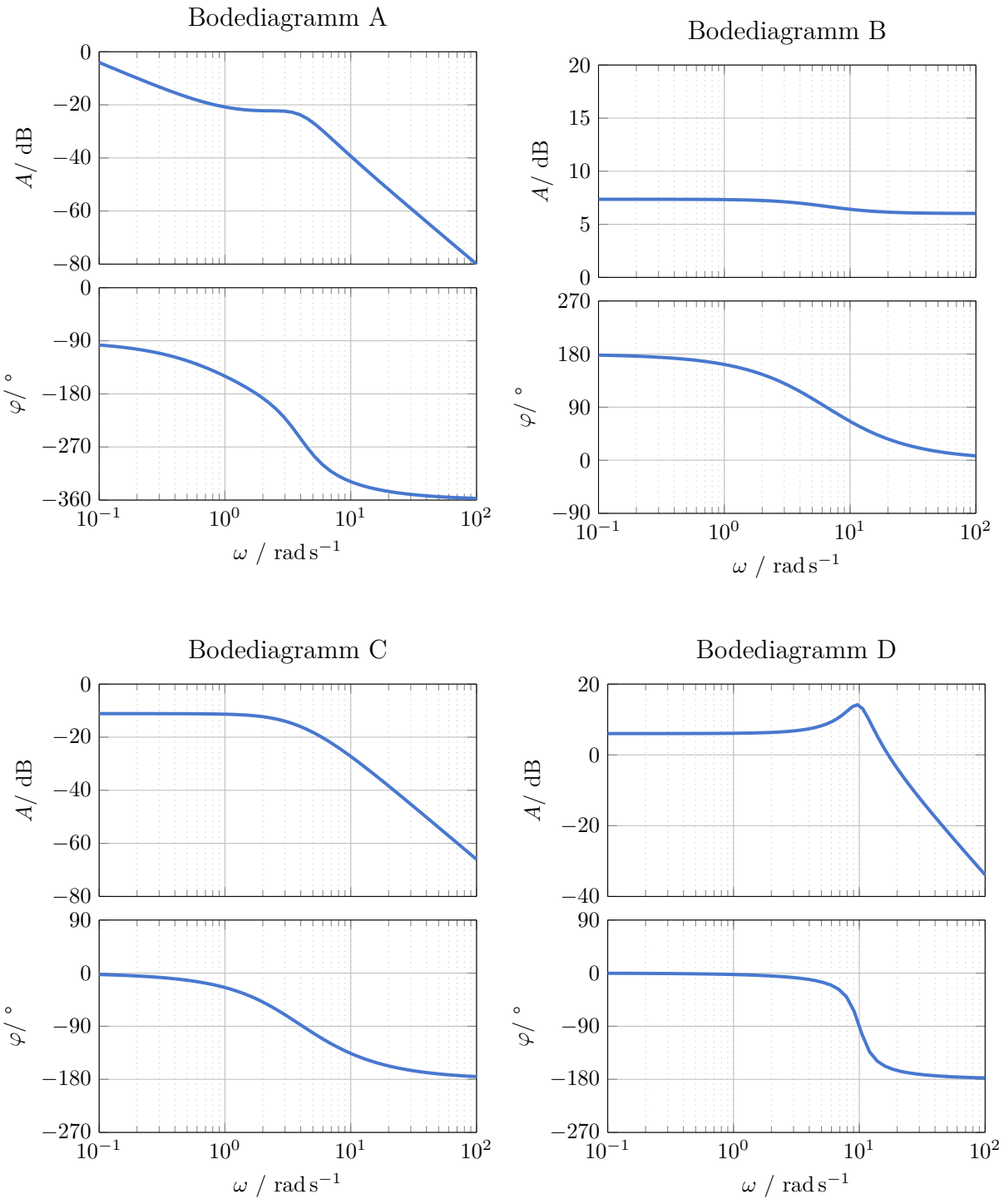


Abbildung 4: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

Aufgabe 2. (8 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingang $U(s)$ und Ausgang $Y(s)$.

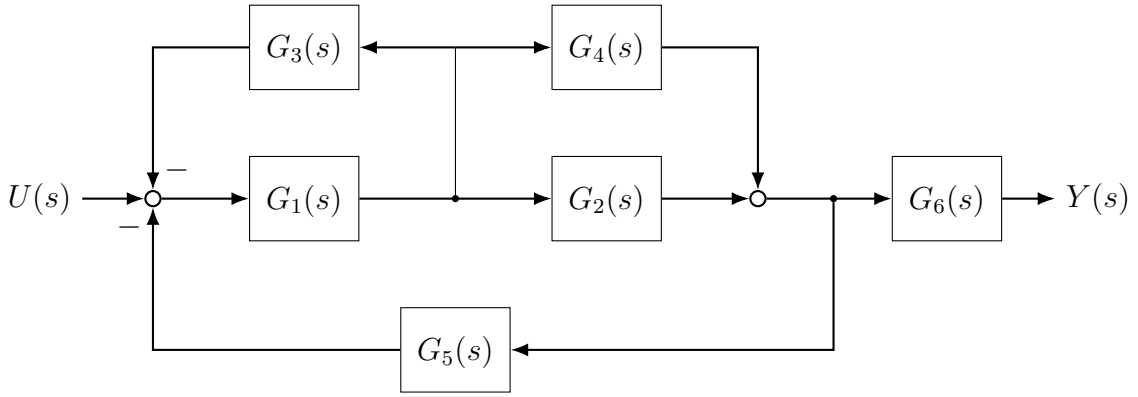


Abbildung 5: Blockschaltbild

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen! (4 Punkte)

b) Wie lautet die Gesamt-Übertragungsfunktion $G(s)$, wenn folgende Übertragungsfunktionen angenommen werden? Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich! (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{1}{2}s + 1, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+4}, \quad G_3(s) = 2, \quad G_4(s) = 0, \quad G_5(s) = 3, \quad G_6(s) = 1$$

c) Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 3. (11 Punkte)

Die Lösung $x(t)$ einer inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$x(t) = -2te^{2t}(u_0 - c)\,.$$

Dabei ist $u_0 = \text{const.}$ die rechte Seite (Anregung) der DGL. Die Anfangsbedingungen der DGL lauten $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 2c \neq 0$.
Hinweis: Aufgabenteil e) kann unabhängig von den vorigen gelöst werden.

a) Beurteilen Sie basierend auf dem Signal $x(t)$ die Stabilität des Systems! (1 Punkt)

b) Wie lautet die Laplace-Transformierte $X(s)$ von $x(t)$? (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie durch Laplace-Rücktransformation in den Zeitbereich die Differentialgleichung, die durch $x(t)$ gelöst wird! (2 Punkte)

d) Bringen Sie die Differentialgleichung aus dem vorigen Aufgabenteil mit den Zuständen $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ in Zustandsraumdarstellung mit Ausgang $y = x$! (2 Punkte)

e) Transformieren Sie das System aus d) in die kanonische Normalform, sodass die transformierte Systemmatrix $\underline{\tilde{A}}$ eine Jordan-Matrix ist! (4 Punkte)
Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil d) nicht lösen konnten, bestimmen Sie die kanonische Normalform von

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} u, \qquad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Aufgabe 4. (12 Punkte)

Die Differentialgleichung

$$ML \cdot \ddot{\theta}(t) - g(m+M) \cdot \theta(t) = u(t) \tag{1}$$

beschreiben das linearisierte dynamische Verhalten eines inversen Pendels auf einem Wagen mit Pendellänge L, Pendelmasse m, Wagenmasse M, Erdbeschleunigung g, linearisiertem Pendelwinkel $\theta(t)$ und der Kraft am Wagen $u(t)$.

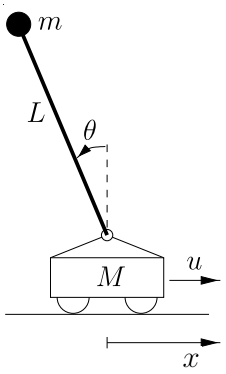


Abbildung 6: Pendel

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch

$$\theta(0) = \theta_0, \ \dot{\theta}(0) = 0.$$

a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\Theta(s)$ in Abhängigkeit von $U(s)$! (2 Punkte)

b) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (2 Punkte)

Es sei nun $m = 0.6\,\text{kg}$, $M = 1\,\text{kg}$, $L = 1\,\text{m}$ und $g = 10\,\text{m/s}^2$

c) Wie lautet die Lösung $\theta(t)$, wenn am Eingang eine impulsförmige Kraft $u(t) = \delta(t)$ wirkt und $\theta_0 = 0$ ist? (3 Punkte)

d) Es wird nun ein Regler und ein Vorfilter eingesetzt, um den Pendelwinkel zu regeln (siehe Abbildung 7). Der Regler hat die Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{as+b}{s+1}, \quad a, b \in \mathrm{R}$$

(i) Für welche Werte a und b ist der geschlossene Kreis $G_{gk}(s) = \Theta(s)/W(s)$ asymptotisch stabil? (4 Punkte)

(ii) Wie muss v gewählt werden, damit die stationäre Verstärkung bei 1 ist? (1 Punkt)

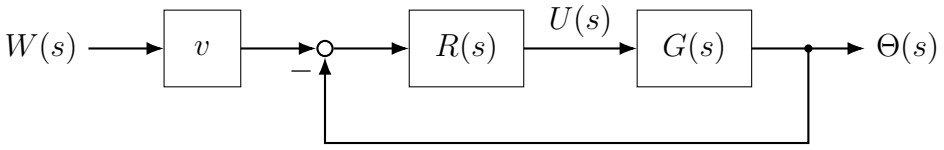


Abbildung 7: Geschlossener Regelkreis

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 5. (12 Punkte)

Im Folgenden wird das in nebenstehender Abbildung gezeigte System aus zwei untereinander angebrachten Flüssigkeitstanks betrachtet. Der obere Tank 1 wird über einen eingehenden Volumenstrom $\dot{V}_{1,ein} = u$ gespeist. Tank 1 besitzt außerdem ein Abflussventil, durch das der Volumenstrom $\dot{V}_{1,aus} = k_1 h_1(t)$ mit $k_1 > 0$ in Behälter 2 abfließt. Behälter 2 besitzt ebenfalls einen Abfluss, durch den der Volumenstrom $\dot{V}_{2,aus} = k_2\sqrt{h_2(t)}, k_2 > 0$ abfließt. Zu Beginn sind die Behälter leer. Aus einer Volumenbilanz der Form $\dot{V}_i = \dot{V}_{i,ein} - \dot{V}_{i,aus}$ je Behälter erhält man

$$\pi\left(r_1 - \frac{h_1(t)}{2}\right)^2 \dot{h}_1(t) = u(t) - k_1 h_1(t)$$

$$\pi r_2^2 \dot{h}_2(t) = k_1 h_1(t) - k_2\sqrt{h_2(t)}$$

Hinweis: Aufgabenteil d) kann unabhängig von den vorigen gelöst werden

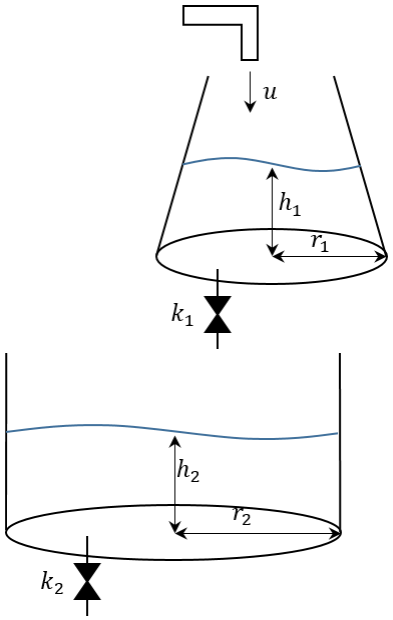


Abbildung 8: Tankkaskade

a) Wie lautet die nichtlineare Zustandsraumdarstellung mit Zuständen $\underline{x} = [h_1,\ h_2]^T$, Eingang $u = \dot{V}_{1,ein}$ und Ausgang $y = h_2$? (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Ruhelage $\underline{x}_0 = [x_{1,0},\ x_{2,0}]^T$ des Systems in Abhängigkeit des stationären Eingangs u_0! (2 Punkte)

c) Der obere Behälter hat die Gesamthöhe $h_{1,max} = \frac{4}{3} r_1$, der untere Behälter die Gesamthöhe $h_{2,max} = 10\, r_2$. Was muss für die Ausflussraten k_1 und k_2 bei einem konstanten Zufluss u_0 gelten, damit keiner der Behälter überläuft? (3 Punkte)

d) Für eine bestimmte Wahl von r_1, r_2, k_1, k_2 lautet die nichtlineare Zustandsraumdarstellung des Systems

$$\dot{x}_1 = \frac{u - \frac{\pi}{2} x_1}{\pi\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)^2}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\pi} x_1 - \frac{8}{\pi}\sqrt{x_2}.$$

Linearisieren Sie das System um die allgemeine Ruhelage $x_{1,0}, x_{2,0}$ für einen konstanten Eingang u_0! Die in A5 b) bestimmte Ruhelage müssen Sie *nicht* einsetzen. (4 Punkte)

Aufgabe 6. (7 Punkte)

Gegeben sei folgendes System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_6: \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

a) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (5 Punkte)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 7. (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = 18\frac{4s^2 - 1}{s^4 + 5s^3 - 14s^2 + 360s} \; .$$

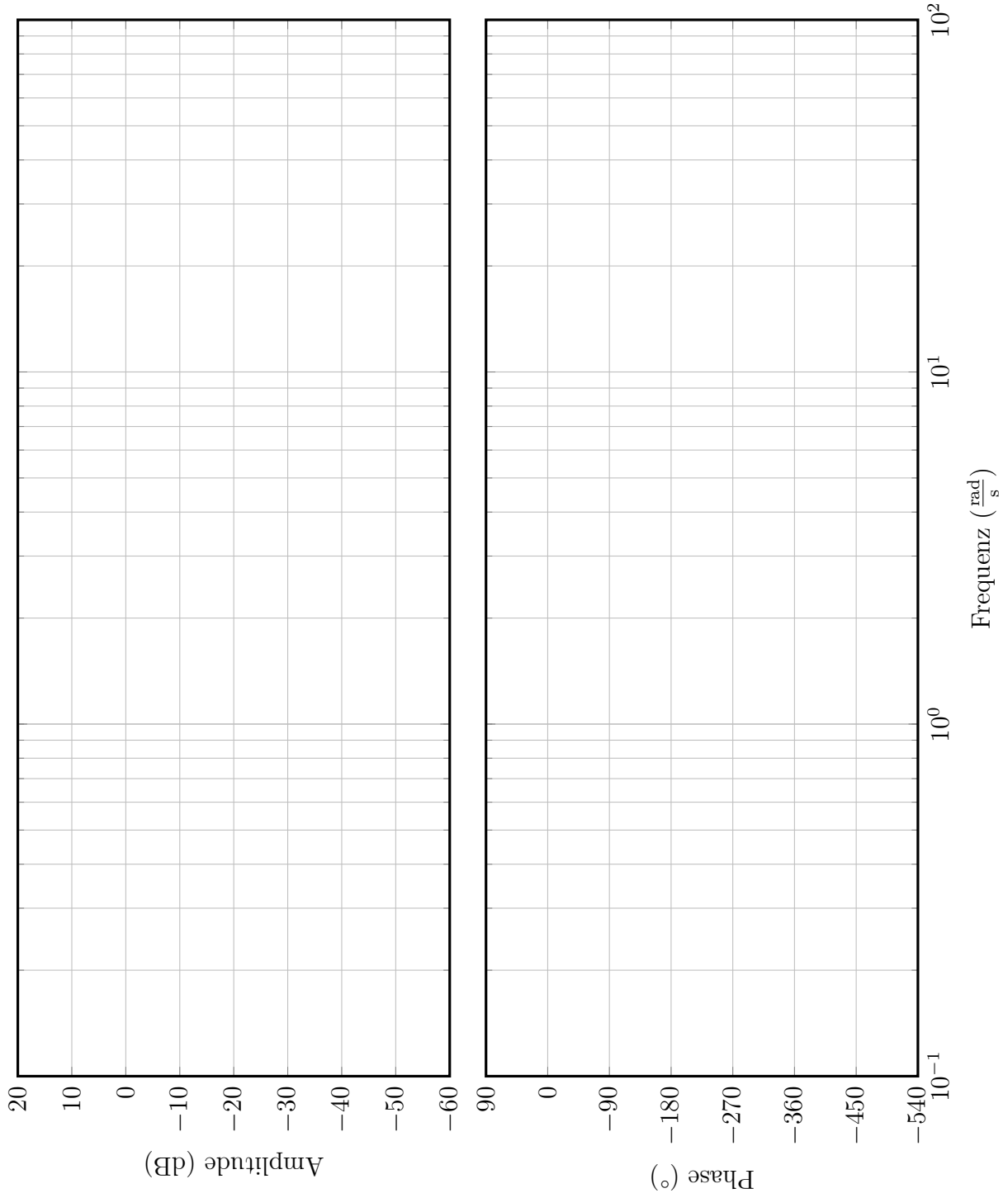
a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! (3 Punkte)
Hinweis: Die Übertragungsfunktion besitzt eine Polstelle bei $s = -10$

b) Berechnen Sie Frequenzgang von $G_7(s)$ und ermitteln Sie daraus den Amplituden- und Phasengang des Systems! (5 Punkte)

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (4 Punkte)

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 15 und 16 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 16 bewertet.



Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 15 und 16 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 16 bewertet.

