Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (26 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Die Sprungantwort eines asymptotisch stabilen Systems konvergiert immer gegen 0 für $t \to \infty$! (1 Punkt)
- ☐ Wahr
- ☒ Falsch

b) Ein lineares System der Ordnung n besitzt genau n Polstellen! (1 Punkt)
- ☒ Wahr
- ☐ Falsch

c) Ist die Differentialgleichung $\dddot{y} + (a(t)\ddot{y} + \dot{y})\, y = 0$ linear? (1 Punkt)
- ☐ Ja
- ☒ Nein

d) Geben Sie die Gleichung für das Ein-Ausgangsverhalten eines Totzeit-Glieds mit Verstärkung $k = 2$ und Totzeit $T_t = 1$ an! (1 Punkt)

$$y(t) = 2u(t-1)$$

e) Ist das System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}\,, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

diagonalisierbar? (1 Punkt)
- ☐ Ja
- ☒ Nein

f) Welche Aussage über die Sprungantwort $h_1(t)$ der Übertragungsfunktion $G_1(s)$

$$G_1(s) = \frac{4s^2 + s}{s^2 - 5s + 2}$$

trifft zu? (2 Punkte)

☐ $\lim_{t\to\infty} h_1(t) = 0$
☐ $\lim_{t\to 0} h_1(t) = 0.5$
☒ $\lim_{t\to 0} h_1(t) = 4$
☒ $\lim_{t\to\infty} h_1(t) = \infty$

g) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion eines Systems 4. Ordnung

$$G_2(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s^3 + 0.5s^2 + 10s + 4)(s + 1)}$$

auf asymptotische Stabilität! (2 Punkte)

☒ Sie ist asymptotisch stabil.
☐ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

Lösung:

Die Vorzeichenbedingung ist erfüllt. Die 1. BWB lautet $0.5 \cdot 10 = 5 > 4 \cdot 1 = 4$ *und ist erfüllt. Damit ist das System asymptotisch stabil.*

h) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_3(s) = \dfrac{s^2 - 2s - 3}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_3(\omega) =$ $\boxed{-450°}$ (1 Punkt)

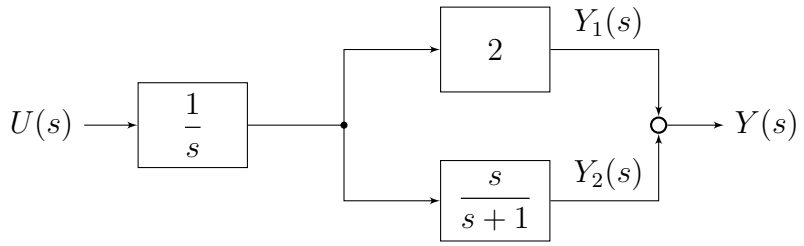
$G_4(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 2s}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_4(\omega) =$ $\boxed{-90°}$ (1 Punkt)

i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in $\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}$ der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_3(s) = \dfrac{s^2 - 2s - 3}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_3(\omega)}{\mathrm{d}\omega} =$ $\boxed{-20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}}$ (1 Punkt)

$G_5(s) = \dfrac{s^3 - 2s^2 - 3s - 1}{s^2 + 2s + 3}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_4(\omega)}{\mathrm{d}\omega} =$ $\boxed{20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}}$ (1 Punkt)

j) Gegeben sei das folgende Blockschaltbild



(i) Geben Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s) = Y_1(s)/U(s)$ und $G_2(s) = Y_2(s)/U(s)$ an! (2 Punkte)

$G_1(s) = \boxed{\frac{2}{s}}$ $\qquad$ $G_2(s) = \boxed{\frac{1}{s+1}}$

(ii) Wie viele Zustände hat das System? (1 Punkt)

☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3

(iii) Wie lautet ein Zustandsraummodell in Matrix-Schreibweise? (3 Punkte)

☒ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u\,,$ $\quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\,,$ $\quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u\,,$ $\quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u\,,$ $\quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u\,,$ $\quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\,,$ $\quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$

k) Bestimmen Sie – beispielsweise mit Hilfe der Faltung – die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = t - 2 + \mathrm{e}^{-0.25t}$, das mit dem Eingang $u(t) = 2\sigma(t)$ angeregt wird! (3 Punkte)

☐ $y(t) = t^2 + 4\mathrm{e}^{-0.25t} - 2t + 4$

☒ $y(t) = t^2 - 8\mathrm{e}^{-0.25t} - 4t + 8$

☐ $y(t) = t^2 + 8\mathrm{e}^{-0.25t} + 4t - 8$

☐ $y(t) = t^2 - 4\mathrm{e}^{-0.25t} - 4t + 4$

☐ $y(t) = t^2 - 4\mathrm{e}^{-0.25t} - 2t + 4$

☐ $y(t) = t^2 + 8\mathrm{e}^{-0.25t} - 4t + 8$

l) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Ortskurven (Abbildung 1) sowie Sprungantworten (Abbildung 2) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Ortskurve (1)	(2)	(3)	(4)	Sprungantwort (1)	(2)	(3)	(4)
$G_1(s) = \frac{2s^2}{2s^2+5s+40}$	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☒	☐
$G_2(s) = \frac{4s^2+20}{2s^2-3s+20}$	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☒
$G_3(s) = \frac{s+20}{s^3+6s^2+9s}$	☒	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
$G_4(s) = \frac{80}{s^3+15s^2+66s+80}$	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐

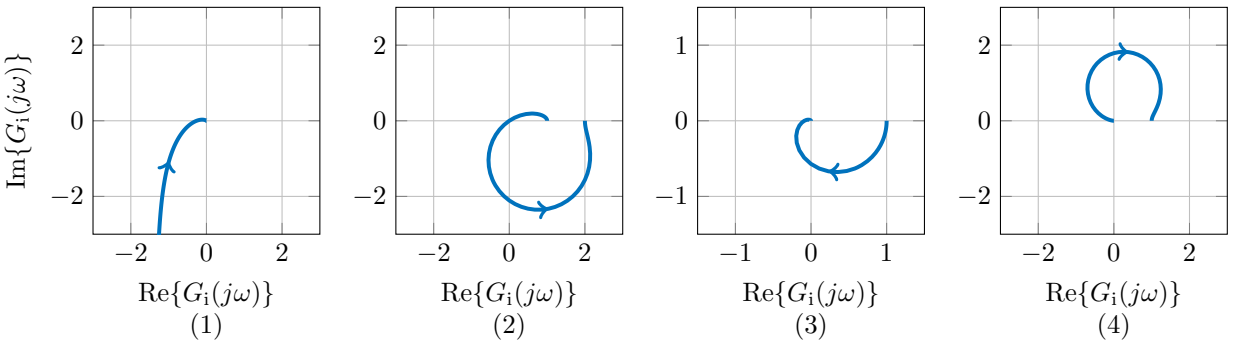


Abbildung 1: Ortskurven der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

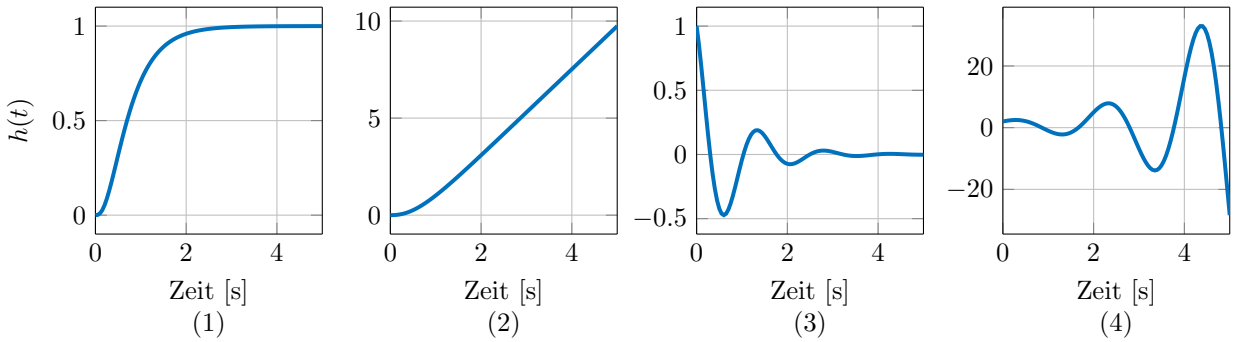
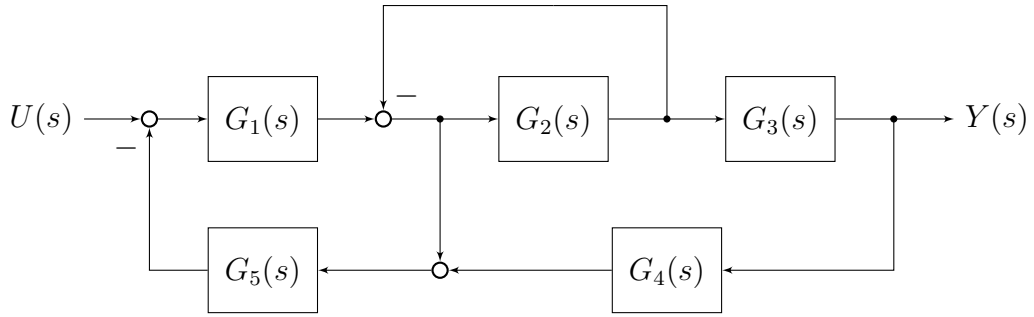


Abbildung 2: Sprungantworten der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

Aufgabe 2: (11 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingang $U(s)$ und Ausgang $Y(s)$.



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen! (4 Punkte)

Lösung:

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 + G_1 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}$$

b) Wo liegen den Pole der Strecke $G(s)$, wenn folgende Übertragungsfunktionen angenommen werden? (2 Punkte)

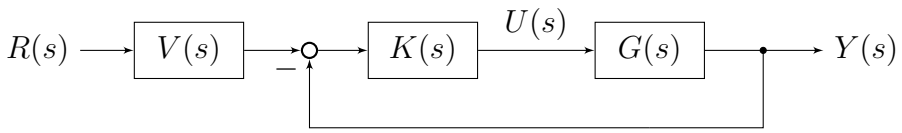
$$G_1(s) = \frac{1}{2s}, \quad G_2(s) = \frac{3}{s}, \quad G_3(s) = \frac{2}{3}, \quad G_4(s) = \frac{3}{2}, \quad G_5(s) = -2\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\frac{6}{6s^2}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{-2}{2s} + \frac{-36}{12s^2}} \\ &= \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \end{aligned}$$

Die Pole der Übertragungsfunktion liegen bei $s_1 = 1$ *und* $s_2 = -3$.

Diese Strecke soll nun mit Hilfe des Reglers $K(s) = k$ und des Vorfilters $V(s) = v$ geregelt werden.



c) Wie lautet die Übertagungsfunktion des geschlossenen Kreises $G_{\mathrm{gk}}(s) = Y(s)/R(s)$? (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie k und v so, dass der geschlossene Kreis einen doppelten Pol bei $s_{1,2} = -1$ hat und für die Sprungantwort $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$ gilt! (3 Punkte)

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2 + x_1 u\,,\\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2 - 1\,,\end{aligned}$$

das einen Eingang u besitzt.

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems! (4 Punkte)

- zunächst für $u = 0$,
- dann für beliebiges $u = u_0 \neq 0$.

Lösung:

Für die Ruhelage gilt $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$.
Daraus ergibt sich im Fall $u = 0$ *das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned}0 &= x_1 x_2\,,\\ 0 &= x_1 + x_2^2 - 1\,.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man entweder $x_{1,R,1} = 0$ *oder* $x_{2,R,2} = 0$.
Einsetzen in die zweite Gleichung liefert jeweils:

$$\begin{aligned}&\underline{x_{1,R,1} = 0} \quad (RL1): \qquad 0 = x_{2,R,1}^2 - 1 \qquad \Rightarrow \underline{x_{2,R,1} = \pm 1}\\ &\underline{x_{2,R,2} = 0} \quad (RL2): \qquad 0 = x_{1,R,2} - 1 \qquad \Rightarrow \underline{x_{1,R,2} = 1}.\end{aligned}$$

Im Fall $u \neq 0$ *ergibt sich das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned}0 &= x_1(x_2 + u)\,,\\ 0 &= x_1 + x_2^2 - 1\,.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man entweder $x_{1,R,1} = 0$ *oder* $x_{2,R,2} = -u$.
Einsetzen in die zweite Gleichung liefert jeweils:

$$\begin{aligned}&\underline{x_{1,R,1} = 0} \quad (RL1): \qquad 0 = x_{2,R,1}^2 - 1 \qquad \Rightarrow \underline{x_{2,R,1} = \pm 1}\\ &\underline{x_{2,R,2} = -u}\ (RL2): \qquad 0 = x_{1,R,2} + u^2 - 1 \qquad \Rightarrow \underline{x_{1,R,2} = 1 - u^2}.\end{aligned}$$

b) Linearisieren Sie das System für ein Eingangssignal $u = u_0 + \Delta u,\ u_0 = \text{const.}$ um die Ruhelage $[x_{1,R} \quad x_{2,R}]^T = [0 \quad 1]^T,\ u = u_0$! (2 Punkte)

Lösung:

Mit den Definitionen $x_1 = x_{1,R} + \Delta x_1$ und $x_2 = x_{2,R} + \Delta x_2$ erhält man

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2,R} + u & x_{1,R} \\ 1 & 2x_{2,R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1,R} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u.$$

Setzt man die Ruhelage ein erhält man das System

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u_0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u.$$

Aufgabe 4: (11 Punkte)

Für die Identifikation eines unbekannten dynamischen Systems wird das System zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einem Einheitssprung angeregt. Die folgende Systemantwort wird dabei aufgenommen:

$$y(t) = 2t - \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\,, \quad t > 0\,.$$

Es wird davon ausgegangen, dass es sich um ein lineares zeitinvariantes System handelt.

a) Beurteilen basierend auf der Sprungantwort die Stabilität des Systems! (2 Punkte)

Lösung:

Das System ist grenzstabil, da der erste Term (2t) integratives Verhalten zeigt und die Pole des zweiten Terms bei $-1 \pm 2i$ liegen müssen.

b) Wie lautet die Laplace-Transformierte $U(s)$ des Eingangs $u(t)$? (1 Punkt)

Lösung:

$$U(s) = \mathscr{L}\{u(t)\} = \mathscr{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$$

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$! (3 Punkte)

Lösung:

Zunächst wird die Laplace-Transformierte des Ausgangs $y(t)$ mithilfe der Tabelle aus den Hilfsblättern gebildet:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2} - \frac{2}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{2s^2+4s+10-2s^2}{s^2(s^2+2s+5)} \\ &= \frac{4s+10}{s^2(s^2+2s+5)} \end{aligned}$$

Für die Übertragungsfunktion gilt nun

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = Y(s)s = \frac{4s+10}{s(s^2+2s+5)}$$

d) Gegen welchen Wert konvergiert die Impulsantwort $g(t)$ des Systems für $t \to \infty$? *Hinweis: Sollten Sie auf keine Lösung im vorherigen Aufgabenteil gekommen sein, dann rechnen Sie mit der Übertragungsfunktion $\hat{G}(s)$ weiter.* (2 Punkte)

$$\hat{G}(s) = \frac{2s+5}{s(s^2+3s+7)}$$

Lösung:

Mithilfe des Grenzwertsatzes ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} G(s)s = \lim_{s\to 0} \frac{4s+10}{s(s^2+2s+5)}s = \lim_{s\to 0} \frac{4s+10}{s^2+2s+5} = 2$$

e) Geben Sie zwei mögliche Zustandsraumdarstellungen des Systems an! (3 Punkte)

Lösung:

Die Regelungsnormalform lautet

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_R &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_R + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\,, \quad \boldsymbol{x}_R(0) = \boldsymbol{x}_{R,0}\\ y &= \begin{bmatrix}10 & 4 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_R\end{aligned}$$

und die Beobachtungsnormalform ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_B &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_B + \begin{bmatrix}10\\4\\0\end{bmatrix}u\,, \quad \boldsymbol{x}_B(0) = \boldsymbol{x}_{B,0}\\ y &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\end{aligned}$$

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch folgende lineare Differentialgleichung

$$a\ddot{y} + b\dot{y} - \dot{y} + cy = d\dot{u} + e\,u,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 3\,,\ \dot{y}(0) = 0\,,\ u(0) = 1\,,$$

und Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ beschrieben.

a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von U(s) an! (3 Punkte)

Lösung:

Die Laplace-Transformation angewandt auf beide Seiten der DGL ergibt

$$\begin{aligned} &a\left(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right) + (b-1)\left(sY(s) - y(0)\right) + cY(s) \\ &= d\left(sU(s) - u(0)\right) + eU(s) \\ &a\left(s^2Y(s) - 3s\right) + (b-1)\left(sY(s) - 3\right) + cY(s) = d\left(sU(s) - 1\right) + eU(s)\,. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$Y(s) = \frac{ds + e}{as^2 + (b-1)s + c}U(s) + \frac{3as + 3(b-1) - d}{as^2 + (b-1)s + c}$$

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems! (1 Punkt)

Lösung:

$$G(s) = \frac{ds + e}{as^2 + (b-1)s + c}$$

Im Folgenden sei $a = 1\,, b = 0\,, c = -6\,, d = 3\,, e = 11$.

c) Erklären Sie, wie Sie die Stabilität des Systems ohne Berechnung der Pole und Nullstellen beurteilen können! (1 Punkt).

Lösung:

Die Koeffizienten des Nennerpolynoms von $G(s)$ mit den gegebenen Konstanten haben unterschiedliche Vorzeichen. Damit ist die Vorzeichenbedingung verletzt. Diese ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Stabilität eines Systems zweiter Ordnung. Man sieht daher bereits an der Übertragungsfunktion, dass das System instabil ist.

d) Berechnen Sie die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion und bestätigen Sie damit Ihre Aussage bezüglich der Stabilität aus Aufgabenteil c)! (2 Punkte)

Lösung:

Nullstellen:

$$3s + 11 = 0 \Rightarrow n = \frac{-11}{3}$$

Polstellen:

$$s^2 - s - 6 = 0 \Rightarrow p_1 = 3,\, p_2 = -2$$

Das System ist instabil, da eine Polstelle einen positiven Realteil hat.

e) Ermitteln Sie die Impulsantwort $g(t)$! (3 Punkte)

Lösung:

Die Impulsantwort lässt sich über Partialbruchzerlegung berechnen. Ausgehend vom Nennerpolynom $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ berechnet sich

$$\begin{aligned}
\frac{3s+11}{s^2-s-6} &= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} \\
3s + 11 &= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} \\
3s + 11 &= A(s+2) + B(s-3) \\
3s + 11 &= (A+B)s + 2A - 3B \\
A + B &= 3 \Rightarrow B = 3 - A \\
2A - 3(3-A) = 5A - 9 &= 11 \Rightarrow A = 4 \\
\Rightarrow B &= 3 - A = -1
\end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{4}{s-3} + \frac{-1}{s+2}$$

Mithilfe der Tabelle zur Laplace-Trafo ergibt sich dann die Impulsantwort

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} \\ &= 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - 1\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= 4\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

Aufgabe 6: (8 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Dynamik eines tauchenden U-Boots modelliert werden. Abbildung 3 zeigt das U-Boot im betrachteten x-z-Koordinatensystem.

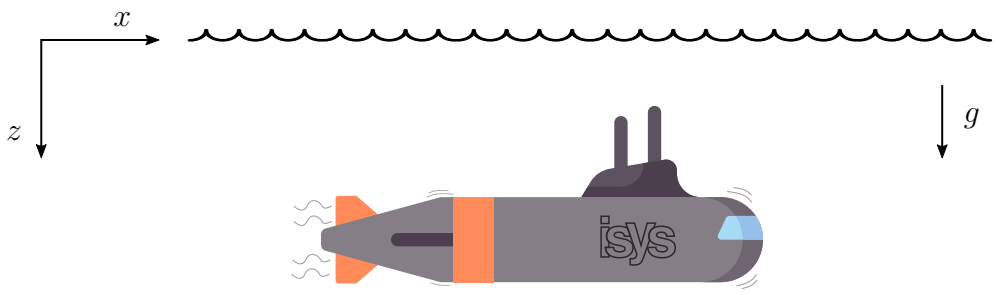


Abbildung 3: Betrachtetes U-Boot im x-z-Koordinatensystem

Das U-Boot besitzt die Masse $m_u = \bar{\rho}_u V_u$ bei konstantem Volumen V_u und der konstanten mittleren Dichte $\bar{\rho}_u$. Ein Propeller stellt die Antriebskraft F_p. Der Strömungswiderstand in x-Richtung kann durch die Gleichung

$$F_{W,x}(\dot{x}, \alpha) = c_W(\alpha)\frac{\rho_w}{2}\dot{x}^2 A$$

beschrieben werden und wirkt entgegen der Bewegungsrichtung. Hierbei ist ρ_w die Dichte des Wassers, A die Flügelfläche und $c_W(\alpha)$ der Widerstandsbeiwert, welcher abhängig vom Anstellwinkel α ist.
Die vertikale Dynamik des U-Boots lässt sich mithilfe der dynamischen und statischen Auftriebskraft beschreiben. Hierbei ist statische Auftriebskraft $F_{A,stat}$ gleich der Gewichtskraft des verdrängten Wassers und für die dynamische Auftriebskraft gilt

$$F_{A,dyn}(\dot{x}, \alpha) = c_A(\alpha)\frac{\rho_w}{2}\dot{x}^2 A$$

a) Stellen Sie die Impulssätze in horizontaler (entlang der x-Achse) sowie vertikaler Richtung (entlang der z-Achse) auf! (3 Punkte)

Lösung:

Über das Kräftegleichgewicht ergibt sich für die horizontale Richtung

$$m_u\ddot{x} = F_p - F_{W,x}(\dot{x}, \alpha)$$
$$V_u\rho_u\ddot{x} = F_p - c_W(\alpha)\frac{\rho_w}{2}\dot{x}^2 A$$

Für die Vertikalbewegung gilt

$$\begin{aligned} m_u \ddot{z} &= m_u g - (F_{A,stat} + F_{A,dyn}(\dot{x}, \alpha)) \\ V_u \bar{\rho}_u \ddot{z} &= V_u \rho_u g - V_u \rho_w g - c_A(\alpha) \frac{\rho_w}{2} \dot{x}^2 A \\ V_u \bar{\rho}_u \ddot{z} &= V_u g(\rho_u - \rho_w) - c_A(\alpha) \frac{\rho_w}{2} \dot{x}^2 A \end{aligned}$$

b) Welche stationäre Horizontalgeschwindigkeit $\dot{x}_0$ stellt sich für eine konstante Antriebskraft $F_{p,0}$ in Abhängigkeit des Anstellwinkels α ein? (2 Punkte)

Lösung:

Für die stationäre Geschwindigkeit muss $\ddot{x} = 0$ gelten. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= F_{p,0} - c_W(\alpha) \frac{\rho_w}{2} \dot{x}_0^2 A \\ \dot{x}_0(\alpha) &= \sqrt{\frac{2F_{p,0}}{c_W(\alpha)\rho_w A}} \end{aligned}$$

c) Es gelte nun $\bar{\rho}_u = \rho_w$ und $\dot{x} = \dot{x}_0(\alpha)$. Zu Beginn befindet sich das U-Boot in einer Tiefe z_0 und es sinkt nicht. Wie lautet die Zustandsraumdarstellung der resultierenden Vertikaldynamik? Der Ausgang y sei die Tauchtiefe des U-Boots und der Eingang u sei das Verhältnis $c_A(\alpha)/c_W(\alpha)$. (3 Punkte)

Lösung:

Einsetzen von $\bar{\rho}_u = \rho_w$ und $\dot{x}^2 = \dot{x}_0(\alpha)^2 = \frac{2F_{p,0}}{c_W(\alpha)\rho_w A}$ in den Impulssatz in z-Richtung ergibt

$$\begin{aligned} V_u \rho_u \ddot{z} &= V_u g(\rho_u - \rho_w) - c_A(\alpha) \frac{\rho_w}{2} \dot{x}_0^2 A \\ V_u \rho_w \ddot{z} &= -c_A(\alpha) \frac{\cancel{\rho_w}}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}F_{p,0}}{c_W(\alpha)\cancel{\rho_w}\cancel{A}} \cancel{A} \\ V_u \rho_w \ddot{z} &= -\frac{c_A(\alpha)}{c_W(\alpha)} F_{p,0} = -F_{p,0} u \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-F_{p,0}}{V_u \rho_w} \end{bmatrix} u\,, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} z_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Aus der Linearisierung eines mechanischen Systems ergibt sich die Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_7: \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\,,$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x + 2u$$

mit $m > 0$.

a) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix e^{At} des Systems Σ_7 ! (4 Punkte)

Lösung:

Berechnung mithilfe der Laplace-Transformation:

$$\mathrm{e}^{At} = \mathscr{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

Nebenrechnungen:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ m^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + m^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -m^2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + m^2} & \frac{1}{s^2 + m^2} \\ \frac{-m^2}{s^2 + m^2} & \frac{s}{s^2 + m^2} \end{bmatrix}$$

Durch eine Laplace-Rücktransformation mithilfe der Tabelle erhält man:

$$\mathrm{e}^{At} = \begin{bmatrix} \cos(mt) & \frac{1}{m}\sin(mt) \\ -m\sin(mt) & \cos(mt) \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ des Systems Σ_7, die sich für die Anfangsbedingungen $x(t_0 = 0) = [1 \quad 0]^T$ ergeben! Hierbei gelte $u(t) = 0$. (2 Punkte)

Lösung:

Die Lösung $x(t)$ für den Zustand des Systems berechnet sich im Zustandsraum als

$$x(t) = \mathrm{e}^{At} x_0 \,.$$

Mit der zuvor berechneten Transitionsmatrix erhält man

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos(mt) & \frac{1}{m}\sin(mt) \\ -m\sin(mt) & \cos(mt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(mt) \\ -m\sin(mt) \end{bmatrix}$$

Die Lösung $y(t)$ für den Ausgang berechnet sich über

$$y(t) = c^T \mathrm{e}^{At} x_0 \,.$$

Damit erhält man

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(mt) \\ -m\sin(mt) \end{bmatrix} = \cos(mt) - m\sin(mt)$$

Aufgabe 8: (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_8(s) = \frac{(5s+1)(s^2-20s)}{(\frac{1}{2}s^2+11s+20)(s^2+7s+16)}\,.$$

a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_8(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n=1$ bei reeller Polstelle, $n=2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! (3 Punkte)

Lösung:

Für den Zähler gilt:

$$(5s+1)(s^2-20s) = 5s(s+0.2)(s-20)$$

Der Nenner lässt sich zerlegen zu

$$(\frac{1}{2}s^2+11s+20)(s^2+7s+16) = \frac{1}{2}(s+2)(s+20)(s^2+7s+16)$$

mit Polstellen -2 und -20 sowie dem komplexen Polpaar aus $s^2+7s+16$. Damit erhält man die Faktorisierung:

$$G(s) = 10s^1(s+0.2)(s-20)\,\frac{1}{s+2}\,\frac{1}{s+20}\,\frac{1}{s^2+7s+16}$$

b) Berechnen Sie Frequenzgang von $G_8(s)$ und ermitteln Sie daraus den Amplituden- und Phasengang des Systems! (5 Punkte)

Lösung:

Der Frequenzgang lautet mit $s = j\omega$ (1 Punkt)

$$G_7(j\omega) = \frac{10j\omega(\omega j+0.2)(\omega j-20)}{(16-\omega^2+7\omega j)(\omega j+2)(\omega j+20)}\,.$$

Daraus ergibt sich der Amplitudengang

$$A_7(\omega) = \frac{10\omega\sqrt{0.04+\omega^2}\sqrt{400+\omega^2}}{\sqrt{(-\omega^2+16)^2+49\omega^2}\sqrt{400+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}}$$

und der Phasengang

$$\begin{aligned}\varphi_7(\omega) &= \angle(\omega j) + \angle(0.2+\omega j) + \angle(-20+\omega j) - \angle\left(16-\omega^2+7\omega j\right)\\ &\quad - \angle(2+\omega j) - \angle(20+\omega j)\\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan(5\omega) + \pi - \arctan\left(\frac{\omega}{20}\right) - \psi(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)\\ &\quad - \arctan\left(\frac{\omega}{20}\right)\\ &= \frac{3}{2}\pi + \arctan(5\omega) - 2\arctan\left(\frac{\omega}{20}\right) - \psi(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

$$\psi(\omega) = \begin{cases}\arctan\left(\dfrac{7\omega}{16-\omega^2}\right) & \textit{für } 16-\omega^2 \geq 0\\ \pi + \arctan\left(\dfrac{7\omega}{16-\omega^2}\right) & \textit{für } 16-\omega^2 < 0\end{cases}$$

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (4 Punkte)

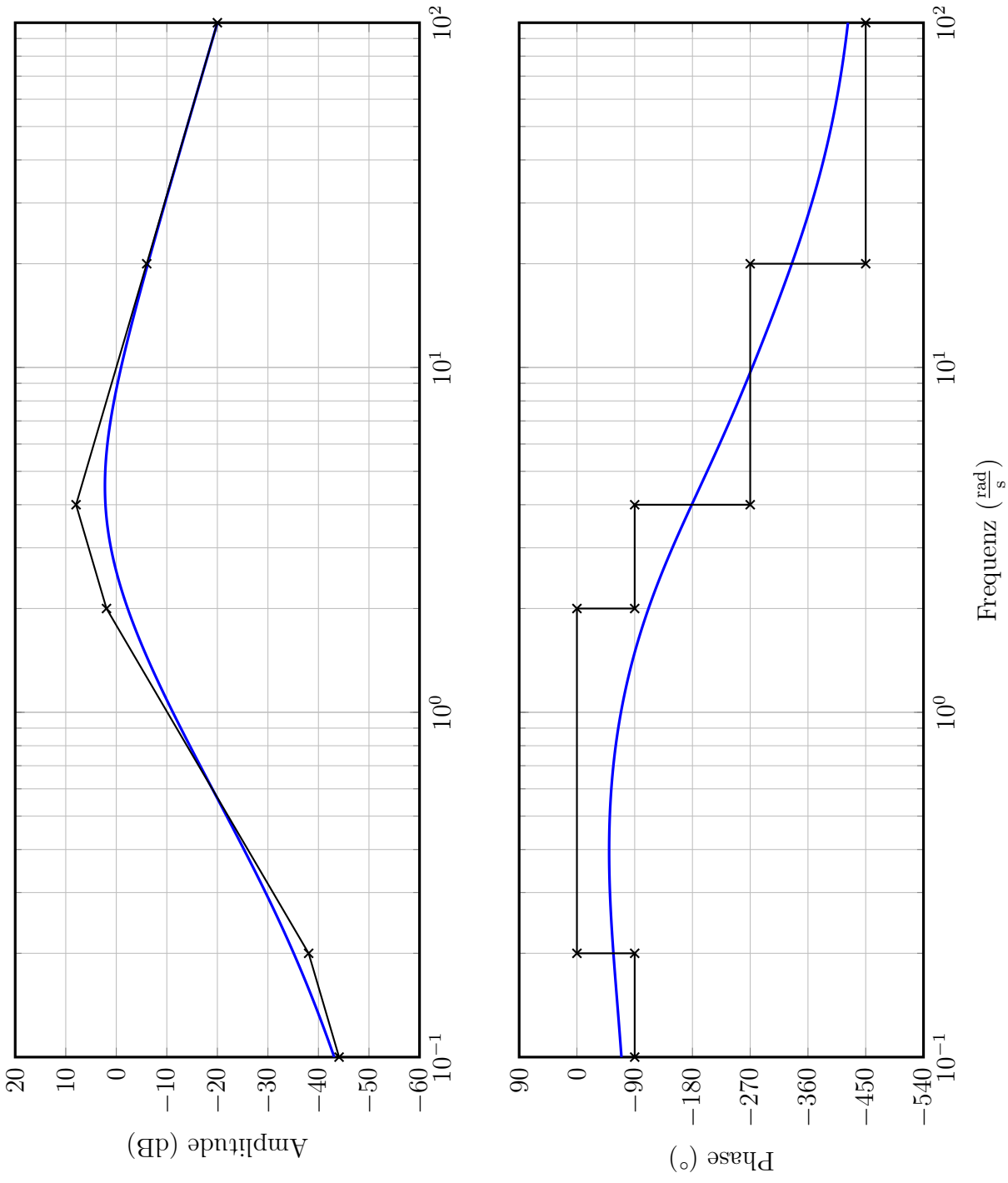
Lösung:

Aus der faktorisierten Darstellung der Übertragungsfunktion lassen sich die notwendigen Werte für das Zeichnen des Bodediagramms bestimmen:

$$c = 10,\ r = 1,\ G_8^*(0) = -\frac{1}{160},\ \omega_{min} = 0.2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

$$A_{7,db}(\omega_{min}) = 20\log\left(\left|-10\cdot\frac{1}{160}\right|0.2^1\right) = -38.06\,\mathrm{dB}$$

$$\varphi_7(0) = -180^\circ + 1\cdot 90^\circ = -90^\circ$$


Amplitude (dB)
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Phase (°)
90
0
−90
−180
−270
−360
−450
−540
Frequenz $(\frac{\text{rad}}{\text{s}})$

Punkte für Aufgabe 1: 26 von 26

Punkte für Aufgabe 2: 11 von 11

Punkte für Aufgabe 3: 6 von 6

Punkte für Aufgabe 4: 11 von 11

Punkte für Aufgabe 5: 10 von 10

Punkte für Aufgabe 6: 8 von 8

Punkte für Aufgabe 7: 6 von 6

Punkte für Aufgabe 8: 12 von 12

Insgesamt vergebene Punkte: 90 von 90 **Falls die Soll- mit der Ist-Punktezahl übereinstimmt und trotzdem rot eingefärbt ist, wurden zu viele Punkte vergeben, jedoch weniger als ein Punkt zu viel.**