

Master-/Bachelorprüfung im Fach **Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik**

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer

Sommersemester 2019

am 8. August 2019, 11:30 – 13:00 Uhr

Bitte tragen Sie auf diesem Doppelblatt Ihren Namen, Ihre Fachrichtung und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Lösungsblätter mit Ihrem Namen und legen Sie diese Blätter in das Doppelblatt ein.

Name, Vorname: _____

Fachrichtung/Prüfungsordnung: _____ Matr.-Nr.: _____

☐ Pflichtfach

Zutreffendes bitte ankreuzen und eventuell ausfüllen!

☐ Wahl-/Ergänzungsfach im Haupt-/Vertiefungsfach: _____

Prüfer, Institut: _____

☐ Wiederholungsprüfung

Studierende, die diese schriftliche Prüfung als Wiederholungsprüfung ablegen und nicht bestehen, sind verpflichtet, sich unmittelbar nach Bekanntgabe der Prüfungsergebnisse an den Anschlagbrettern des Instituts persönlich im Sekretariat für eine mündliche Nachprüfung anzumelden.

Zur Kenntnis genommen:

(Unterschrift)

Zugelassen sind alle nichtelektronischen Hilfsmittel sowie ein nichtvernetzbarer nichtgrafikfähiger Taschenrechner. Zugelassene Taschenrechner sind in einer Liste vermerkt, die vorab vom Institut für Systemdynamik zur Verfügung gestellt wurde.

Aufgabe	Punktezahl	Erreichte Punktezahl
1	27	
2	11	
3	11	
4	11	
5	9	
6	9	
7	12	
Summe:	90	

Korrektur: _____

Prüfer: _____

Einsicht: _____

Note: _____

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (27 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

- a) Die Eigenwerte der Systemmatrix eines Systems in Zustandsraumdarstellung entsprechen den Polstellen der dazugehörigen Übertragungsfunktion? (1 Punkt)

☒ Ja
☐ Nein

- b) Ein zeitinvariantes System ist immer linear? (1 Punkt)

☐ Ja
☒ Nein

- c) Ein lineares System besitzt für $u(t) \equiv 0$ nur eine Ruhelage? (1 Punkt)

☐ Ja
☒ Nein

- d) Zu welchem Übertragungsglied passt folgende Differentialgleichung? (1 Punkt)

$$2y - 5\dot{u} = 0, \quad u(0) = u_0$$

☐ Proportionalglied
☐ Totzeitglied
☐ Integrator
☒ Differenzierer

- e) Ist das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + 5u, & x(0) &= 0 \\ y &= x + u\end{aligned}$$

sprungfähig? (1 Punkt)

☒ Ja
☐ Nein

f) Wie viele Zustände besitzt das System mit der Übertragungsfunktion $G_1(s)$? (1 Punkt)

$$G_1(s) = \frac{6}{s} + \frac{4s + 1}{s^2 + 5s + 2}$$

- ☐ Einen
☐ Zwei
☒ Drei
☐ Keinen

g) Transformieren Sie die Sprungantwort $h(t) = 2t + e^{-\frac{1}{2}t}$ in den Frequenzbereich! (2 Punkte)

☒ $H(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s + 0.5}$

☐ $H(s) = \frac{s^2 + s + 0.5}{s^2 + 0.5s}$

☐ $H(s) = 2\frac{1}{s^2} + \frac{0.5}{s + 1}$

☒ $H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 0.5s^2}$

h) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion eines Systems 3. Ordnung

$$G_2(s) = \frac{s}{3s^3 + 2s^2 + 10s + 4}$$

auf asymptotische Stabilität! (2 Punkte)

- ☒ Sie ist asymptotisch stabil.
☐ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

Lösung:

Die Vorzeichenbedingung ist erfüllt. Die 1. BWB lautet $10 \cdot 4 = 40 > 5 \cdot 8 = 40$ und ist nicht erfüllt. Damit ist das System nicht asymptotisch stabil.

i) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \rightarrow \infty$ an!

$$G_3(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)(s^2 + s - 2)}$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_3(\omega) =$ -90° (1 Punkt)

$$G_4(s) = \frac{(s + 1)(s + 4)(s - 1)}{s^3(s - 4)(s - 2)}$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_4(\omega) =$ $\pm 180^\circ$ (1 Punkt)

j) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in $\frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \rightarrow \infty$ an!

$$G_3(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)(s^2 + s - 2)}$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_3(\omega)}{d\omega} =$ $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ (1 Punkt)

$$G_4(s) = \frac{(s + 1)(s + 4)(s - 1)}{s^3(s - 4)(s - 2)}$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} =$ $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ (1 Punkt)

k) Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2(x_1 - u) \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + x_1 + u \\ y &= x_1 + x_2,\end{aligned}$$

(i) Wie lautet das Zustandsraummodell in Matrix-Schreibweise? (2 Punkte)

$$\square \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\boxed{\times} \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\square \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\square \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

(ii) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (1 Punkt)

- ☒ asymptotisch stabil
☐ instabil
☐ grenzstabil

l) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \arctan(2\dot{y}) + (y + 1)y = u$$

um die Ruhelage $y(0) = \dot{y}(0) = u(0) = 0$! (3 Punkte)

Hinweis: $(\arctan x)' = (1 + x^2)^{-1}$

$$\boxed{\times} \quad \Delta \ddot{y} + 2\Delta \dot{y} + \Delta y = \Delta u$$

$$\square \quad \Delta \ddot{y} + 0.5\Delta \dot{y} + 2\Delta y = \Delta u$$

$$\square \quad \Delta \ddot{y} + 2\Delta \dot{y} + 2\Delta y = \Delta u$$

$$\square \quad \Delta \ddot{y} + 0.5\Delta \dot{y} + \Delta y = \Delta u$$

m) Bestimmen Sie – beispielsweise mit Hilfe der Faltung – die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = e^t$, das mit dem Eingang $u(t) = t + \sigma(t)$ angeregt wird! (3 Punkte)

$$\square \quad y(t) = 2e^t + t + 2$$

$$\square \quad y(t) = e^t - t - 1$$

$$\boxed{\times} \quad y(t) = 2e^t - t - 2$$

$$\square \quad y(t) = 2e^t + t - 2$$

$$\square \quad y(t) = 2e^t - t + 2$$

$$\square \quad y(t) = e^t + t - 2$$

- n) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Ortskurven (Abbildung 1) sowie Sprungantworten (Abbildung 2) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Ortskurve				Sprungantwort			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
$G_1(s) = \frac{20}{s^2 + 7s + 10}$	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☒
$G_2(s) = \frac{2}{s^2 - 1}$	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
$G_3(s) = \frac{2s^3 + 4}{s^3 + 2s^2}$	☐	☒	☐	☐	☐	☒	☐	☐
$G_4(s) = \frac{-4\pi^2}{s^2 + 2\pi s + 2\pi^2}$	☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

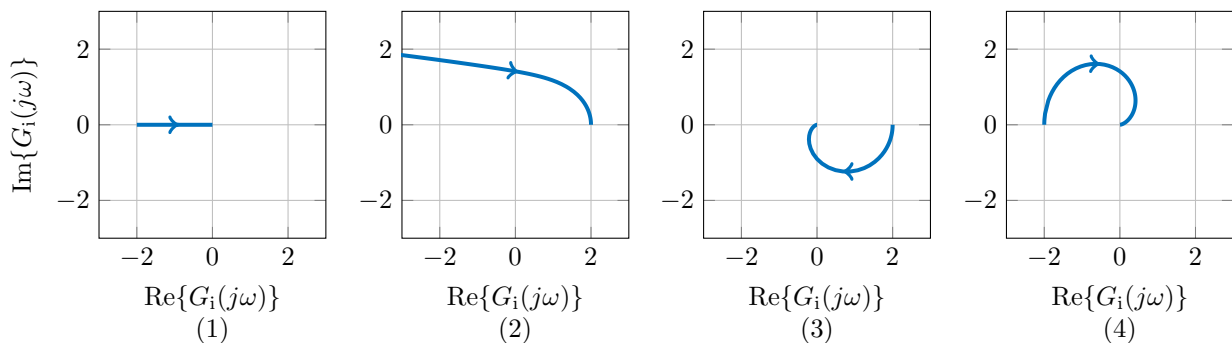


Abbildung 1: Ortskurven der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

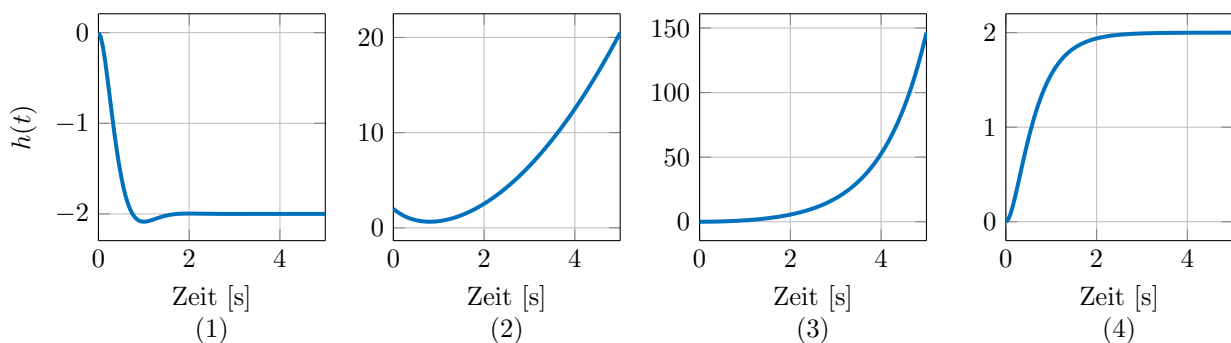
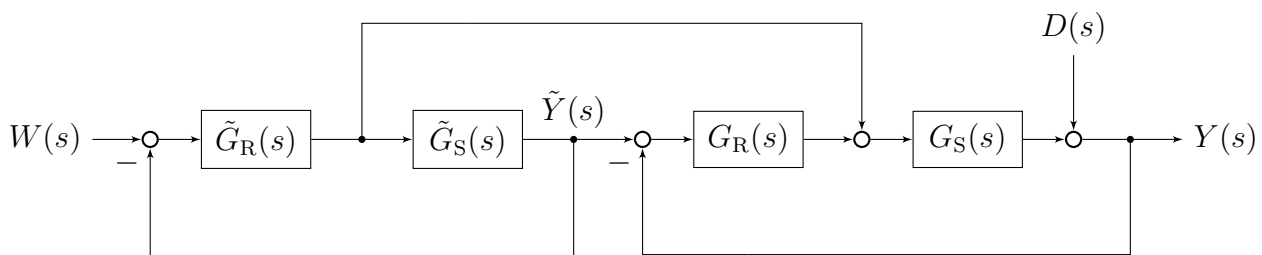


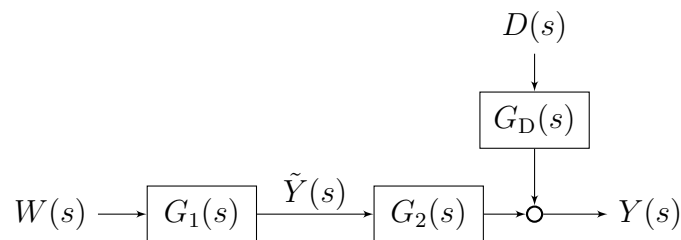
Abbildung 2: Sprungantworten der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2: (11 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt eine Regelkreisstruktur mit einem sogenannten Modellregelkreis. Aufgabe des Modellregelkreises ist sowohl die Berechnung einer Vorsteuerung als auch die Generierung von geeigneten Solltrajektorien für den Ausgang.



Durch Umformen ergibt sich das Blockschaltbild



mit identischer Signalübertragung von $W(s)$ nach $Y(s)$.

- a) Geben Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ in Abhängigkeit der Übertragungsglieder $\tilde{G}_R(s)$, $\tilde{G}_S(s)$, $G_R(s)$, und $G_S(s)$ für $D(s) = 0$ an! (4 Punkte)

Lösung:

Für den Modellregelkreis gilt:

$$\tilde{Y} = \underbrace{\frac{\tilde{G}_R \tilde{G}_S}{1 + \tilde{G}_R \tilde{G}_S}}_{G_1} W$$

Für G_2 erhält man

$$\begin{aligned} Y &= G_S \left(\tilde{G}_S^{-1} \tilde{Y} + G_R (\tilde{Y} - Y) \right) \\ (1 + G_S G_R) Y &= G_S \left(\tilde{G}_S^{-1} + G_R \right) \tilde{Y} \\ Y &= \frac{G_S \left(\tilde{G}_S^{-1} + G_R \right)}{1 + G_S G_R} \tilde{Y} \\ Y &= \frac{G_S \left(1 + \tilde{G}_S G_R \right)}{\tilde{G}_S (1 + G_S G_R)} \tilde{Y} \end{aligned}$$

- b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G_D(s)$ in Abhängigkeit der Übertragungsglieder $\tilde{G}_R(s)$, $\tilde{G}_S(s)$, $G_R(s)$, und $G_S(s)$ für $W(s) = 0$ an! (2 Punkte)

Lösung:

$$Y = \frac{1}{1 + G_S G_R} D$$

- c) Bestimmen Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $W(s)$, $D(s)$ und $\tilde{G}_R(s)$, $\tilde{G}_S(s)$, $G_R(s)$, und $G_S(s)$! (3 Punkte)

Lösung:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{G_S \left(1 + \tilde{G}_S G_R \right)}{\tilde{G}_S (1 + G_S G_R)} \tilde{Y} + \frac{1}{1 + G_S G_R} D \\ &= \frac{G_S \left(1 + \tilde{G}_S G_R \right)}{\tilde{G}_S (1 + G_S G_R)} \frac{\tilde{G}_R \tilde{G}_S}{1 + \tilde{G}_R \tilde{G}_S} W + \frac{1}{1 + G_S G_R} D \\ &= \frac{G_S \tilde{G}_R \left(1 + \tilde{G}_S G_R \right)}{\left(1 + G_S G_R \right) \left(1 + \tilde{G}_R \tilde{G}_S \right)} W + \frac{1}{1 + G_S G_R} D \end{aligned}$$

- d) Kann die Übertragungsfunktion $\tilde{G}_R(s)$ die Stabilität von $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ beeinflussen? Begründen Sie! (2 Punkte)

Lösung:

Ja, da sie im Nenner von $G(s)$ vorkommt und dadurch die Pole verändern kann.

Aufgabe 3: (11 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3y - 3y^3 - 2x, \\ \dot{y} &= 6x - 9y - 4xy,\end{aligned}$$

das die triviale Ruhelage $x_0 = y_0 = 0$ besitzt.

- a) Bestimmen Sie die weitere(n) Ruhelage(n) des Systems! (3 Punkte)

Lösung:

Für die Ruhelage gilt $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}0 &= 3y_0 - 3y_0^3 - 2x_0, \\ 0 &= 6x_0 - 9y_0 - 4x_0y_0.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man

$$x_0 = \frac{3}{2} (y_0 - y_0^3).$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}9(y_0 - y_0^3) - 9y_0 - 6(y_0 - y_0^3)y_0 &= 0 \\ 6y_0^4 - 9y_0^3 - 6y_0^2 &= 0 \\ 3y_0^2(2y_0^2 - 3y_0 - 2) &= 0 \\ \Rightarrow y_{01,2} &= 0, \quad y_{03,4} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \\ \Rightarrow y_{03} &= 2, \quad y_{04} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die x_0 -Werte zu

$$\begin{aligned}x_{03} &= \frac{3}{2} (y_{03} - y_{03}^3) = \frac{3}{2} (2 - 8) = -9 \\ x_{04} &= \frac{3}{2} (y_{04} - y_{04}^3) = -\frac{9}{16}\end{aligned}$$

- b) Linearisieren Sie das System um die allgemeine Ruhelage $[x_0 \ y_0]^T$ und beurteilen Sie die Stabilität der trivialen Ruhelage $[0 \ 0]^T$! (3 Punkte)

Lösung:

Mit den Definitionen $x = x_0 + \Delta x$ und $y = y_0 + \Delta y$ erhält man

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 - 9y_0^2 \\ 6 - 4y_0 & -9 - 4x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}.$$

Setzt man die triviale Ruhelage ein erhält man das System

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix},$$

mit dem char. Polynom

$$\begin{aligned} (\lambda + 2)(\lambda + 9) - 18 &= \lambda^2 + 11\lambda = \lambda(\lambda + 11) = 0. \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = -11 \end{aligned}$$

Da das System einen negativen Eigenwert und einen Eigenwert bei 0 besitzt ist das System grenzstabil!

- c) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (5 Punkte) Hierbei ist A die Systemmatrix des linearisierten Systems aus Aufgabenteil b). Falls Sie keine Lösung in Aufgabenteil b) gefunden haben, rechnen Sie mit folgender Systemmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Lösung:

Berechnung mithilfe der Laplace-Transformation:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

Nebenrechnungen:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ -6 & s+9 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s(s+11)} \begin{bmatrix} s+9 & 3 \\ 6 & s+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+9}{s(s+11)} & \frac{3}{s(s+11)} \\ \frac{6}{s(s+11)} & \frac{s+2}{s(s+11)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Laplace-Rücktransformation mithilfe der Tabelle:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+9}{s(s+11)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+11} + \frac{9}{s(s+11)} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+11} \right\} + \frac{9}{11} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1+s\frac{1}{11})} \right\} \\ &= e^{-11t} + \frac{9}{11} (1 - e^{-11t}) \\ &= \frac{1}{11} (9 + 2e^{-11t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s(s+11)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+11} + \frac{2}{s(s+11)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+11}\right\} + \frac{2}{11}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+s\frac{1}{11})}\right\} \\ &= e^{-11t} + \frac{2}{11}(1 - e^{-11t}) \\ &= \frac{1}{11}(2 + 9e^{-11t})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+11)}\right\} &= \frac{3}{11}(1 - e^{-11t}) \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s(s+11)}\right\} &= \frac{6}{11}(1 - e^{-11t})\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

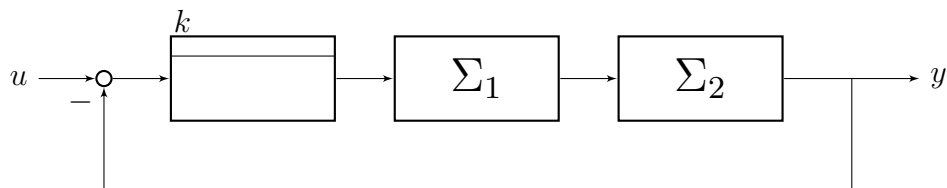
$$e^{At} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 9 + 2e^{-11t} & 3 - 3e^{-11t} \\ 6 - 6e^{-11t} & 2 + 9e^{-11t} \end{bmatrix}$$

Mit der alternativen Systemmatrix erhält man

$$e^{At} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 + e^{-9t} & 2 - 2e^{-9t} \\ 4 - 4e^{-9t} & 1 + 8e^{-9t} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4: (11 Punkte)

Ein lineares SISO-System ist durch das folgende Blockschaltbild gegeben:



Das Teilsystem Σ_1 wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{y}_1 + 3y_1 = \dot{u}_1 + 0.5u_1, \quad y_1(0) = u_1(0) = 0$$

und das Teilsystem Σ_2 durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}_2 - \dot{y}_2 + 1.5y_2 = u_2, \quad y_2(0) = \dot{y}_2(0) = u_2(0) = 0$$

beschrieben.

- a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen der beiden Teilsysteme Σ_1 und Σ_2 ! (2 Punkte)

Lösung:

Für das System Σ_1 gilt

$$Y_1(s) = \underbrace{\frac{s + 0.5}{s + 3}}_{G_1(s)} U_1(s)$$

und für das System Σ_2

$$Y_2(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2 - s + 1.5}}_{G_2(s)} U_2(s)$$

- b) Beurteilen Sie die Stabilität des offenen Kreises! (3 Punkte)

Lösung:

Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises lautet

$$G_o(s) = \frac{k(s + 0.5)}{(s + 3)(s^2 - s + 1.5)}$$

*und besitzt Pole bei $s_1 = -3$, $s_{2,3} = 0.5 \pm \sqrt{0.25 - 1.5} = 0.5 \pm \sqrt{1.25}i$.
Aufgrund des positiven Realteils des komplexen Nullstellenpaares ist der offene Kreis instabil.*

- c) Für welche Werte von k ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil? (4 Punkte)

Lösung:

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises lautet

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_o}{1 + G_o} \\ &= \frac{k(s + 0.5)}{(s + 3)(s^2 - s + 1.5) + k(s + 0.5)} \\ &= \frac{k(s + 0.5)}{s^3 + 2s^2 + (k - 1.5)s + 4.5 + 0.5k} \end{aligned}$$

Für die asymptotische Stabilität muss das Hurwitz-Kriterium erfüllt sein. Aus der Vorzeichenbedingung folgt

$$k - 1.5 > 0 \Rightarrow k > 1.5 \text{ und } 9 + k > 0 \Rightarrow k > -9.$$

Die Beiwertebedingung liefert

$$\begin{aligned} 2(k - 1.5) &> 4.5 + 0.5k \\ 1.5k &> 7.5 \Rightarrow k > 5. \end{aligned}$$

- d) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des geschlossenen Kreises an! (2 Punkte)

Lösung:

Die Regelungsnormalform lautet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4.5 - 0.5k & 1.5 - k & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0.5k & k & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 4\ddot{y} + 8\dot{y} = \ddot{u} - 2\dot{u} - 16u,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1, \ddot{y}(0) = 0, u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1,$$

beschrieben.

- a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an! (2 Punkte)

Lösung:

Die Laplace-Transformation angewandt auf beide Seiten der DGL ergibt

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s \dot{y}(0) - \ddot{y}(0) \\ + 4 (s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)) \\ + 8 (s Y(s) - y(0)) &= s^2 U(s) - s u(0) - \dot{u}(0) \\ &\quad - 2 (s U(s) - u(0)) \\ &\quad - 16 U(s) \end{aligned}$$

Das lässt sich zusammenfassen zu

$$(s^3 + 4s^2 + 8s)Y(s) = (s^2 - 2s - 16)U(s) + s + 3$$

und damit gilt

$$Y(s) = \frac{s^2 - 2s - 16}{s^3 + 4s^2 + 8s} U(s) + \frac{s + 3}{s^3 + 4s^2 + 8s}$$

Ein Punkt für Übertragungsfunktion und ein Punkt für Anfangsbedingungen.

- b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! (1 Punkt)

Lösung:

$$G(s) = \frac{s^2 - 2s - 16}{s^3 + 4s^2 + 8s}$$

- c) Berechnen Sie die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion und beurteilen Sie die Stabilität! (2 Punkte)

Lösung:

Nullstellen:

$$s^2 - 2s - 16 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{17}$$

Polstellen

$$s^3 + 4s^2 + 8s = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4 - 8} = -2 \pm 2i$$

Das System ist grenzstabil da es eine Polstelle auf der imaginären Achse besitzt und das komplexe Polstellenpaar negativen Realteil hat.

- d) Ermitteln Sie die Impulsantwort $g(t)$! (4 Punkte)

Lösung:

Die Impulsantwort berechnet sich über PBZ

$$\begin{aligned}\frac{s^2 - 2s - 16}{s^3 + 4s^2 + 8s} &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 8} \\ s^2 - 2s - 16 &= A(s^2 + 4s + 8) + Bs^2 + Cs \\ s^2 - 2s - 16 &= (A + B)s^2 + (4A + C)s + 8A \\ 8A &= -16 \Rightarrow A = -2 \\ A + B &= 1 \Rightarrow B = 3 \\ 4A + C &= -2 \Rightarrow C = 6\end{aligned}$$

$$\frac{s^2 - 2s - 16}{s^3 + 4s^2 + 8s} = -\frac{2}{s} + \frac{3s + 6}{s^2 + 4s + 8}$$

Mithilfe der Tabelle zur Laplace-Trafo ergibt sich dann die Impulsantwort

$$\begin{aligned}g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s} + \frac{3s + 6}{s^2 + 4s + 8}\right\} \\ &= -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 4}\right\} \\ &= -2\sigma(t) + 3e^{-2t}\cos(2t)\end{aligned}$$

Aufgabe 6: (9 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen die Wasserstandshöhen eines Mehrtanksystems modelliert werden. Abbildung 3 zeigt den schematischen Aufbau des Systems.

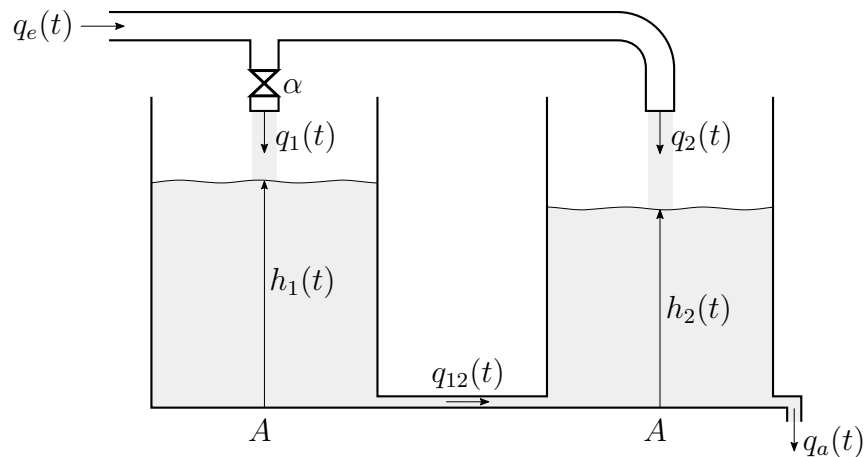


Abbildung 3: Schematischer Aufbau des Tanksystems

Beide Tanks besitzen die Grundfläche $A > 0$. Über das Ventil kann die Verteilung der Zuflüsse $q_1(t)$ und $q_2(t)$ gesteuert werden. Hierbei gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} q_e(t) &= q_1(t) + q_2(t) \\ q_1(t) &= \alpha q_e(t) \end{aligned}$$

mit $\alpha \in [0, 1]$. Der Fluss zwischen den beiden Behältern ist proportional zur Höhendifferenz, d.h. $q_{12}(t) = k_1 \Delta h(t)$. Zudem gilt für den Ausfluss $q_a(t) = k_2 h_2(t)$. Hierbei gilt $k_1, k_2 > 0$.

- a) Stellen Sie die Füllstandsbilanzen der beiden Wassertanks auf! (2 Punkte)

Lösung:

Für den linken Wassertank ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{m}_1(t) &= \dot{m}_{zu}(t) - \dot{m}_{ab}(t) \\ \rho A \dot{h}_1 &= \rho q_1(t) - \rho q_{12}(t) \\ A \dot{h}_1(t) &= \alpha q_e(t) - k_1(h_1(t) - h_2(t)) \end{aligned}$$

und analog gilt für den rechten

$$A \dot{h}_2(t) = (1 - \alpha) q_e(t) + k_1(h_1(t) - h_2(t)) - k_2 h_2(t)$$

- b) Wie lautet die Zustandsraumdarstellung des Systems? Wählen Sie geeignete Zustände sowie den Eingang $u(t) = q_e(t)$ und den Ausgang $y(t) = h_2(t)$. (3 Punkte)

Lösung:

Mit den Zuständen $x_1 = h_1$ und $x_2 = h_2$ lautet die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A} & \frac{k_1}{A} \\ \frac{k_1}{A} & -\frac{k_1+k_2}{A} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{A} \\ \frac{1-\alpha}{A} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$! (4 Punkte)

Lösung:

Allgemein gilt $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Daher erhält man die Übertragungsfunktion des Mehrtanksystems zu

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{k_1}{A} & -\frac{k_1}{A} \\ -\frac{k_1}{A} & s + \frac{k_1+k_2}{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{A} \\ \frac{1-\alpha}{A} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\left(s + \frac{k_1}{A}\right)\left(s + \frac{k_1+k_2}{A}\right) - \frac{k_1^2}{A^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{k_1+k_2}{A} & \frac{k_1}{A} \\ \frac{k_1}{A} & s + \frac{k_1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{A} \\ \frac{1-\alpha}{A} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{2k_1+k_2}{A}s + \frac{k_1k_2}{A^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{k_1+k_2}{A} & \frac{k_1}{A} \\ \frac{k_1}{A} & s + \frac{k_1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{A} \\ \frac{1-\alpha}{A} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{2k_1+k_2}{A}s + \frac{k_1k_2}{A^2}} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{A} & s + \frac{k_1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{A} \\ \frac{1-\alpha}{A} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\frac{1-\alpha}{A}s + \frac{k_1}{A^2}}{s^2 + \frac{2k_1+k_2}{A}s + \frac{k_1k_2}{A^2}} \\ &= \frac{A(1-\alpha)s + k_1}{A^2s^2 + A(2k_1 + k_2)s + k_1k_2} \end{aligned}$$

Aufgabe 7: (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = \frac{(s^2 - 16)(5s + 1)}{s(s + 2)^2 + 100s}.$$

- a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! (3 Punkte)

Lösung:

Für den Zähler gilt (1 Punkt):

$$(s^2 - 16)(5s + 1) = 5(s + 4)(s - 4)(s + 0.2)$$

Der Nenner lässt sich zerlegen zu

$$s(s + 2)^2 + 100s = s((s + 2)^2 + 100) = s(s^2 + 4s + 104)$$

mit komplexen Polpaar $s^2 + 4s + 104$. Damit erhält man die Faktorisierung:

$$G(s) = 5s^{-1}(s + 4)(s - 4)(s + 0.2) \frac{1}{s^2 + 4s + 104}$$

- b) Berechnen Sie Frequenzgang von $G_7(s)$ und ermitteln Sie daraus den Amplituden- und Phasengang des Systems! (5 Punkte)

Lösung:

Der Frequenzgang lautet mit $s = j\omega$ (1 Punkt)

$$G_7(j\omega) = \frac{-(\omega^2 + 16)(1 + 5\omega j)}{j\omega(104 - \omega^2 + 4\omega j)}.$$

Daraus ergibt sich der Amplitudengang

$$A_7(\omega) = \frac{(\omega^2 + 16) \sqrt{1 + 25\omega^2}}{\omega \sqrt{(104 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}}$$

und der Phasengang

$$\begin{aligned} \varphi_7(\omega) &= \angle(-(\omega^2 + 16)) + \angle(1 + 5\omega j) - \angle(j\omega) - \angle(104 - \omega^2 + 4\omega j) \\ &= -\pi + \arctan(5\omega) - \frac{\pi}{2} - \psi(\omega) = -\frac{3}{2}\pi + \arctan(5\omega) - \psi(\omega). \end{aligned}$$

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{4\omega}{104 - \omega^2}\right) & \text{für } 104 - \omega^2 \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{4\omega}{104 - \omega^2}\right) & \text{für } 104 - \omega^2 < 0 \end{cases}$$

- c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten! (4 Punkte)

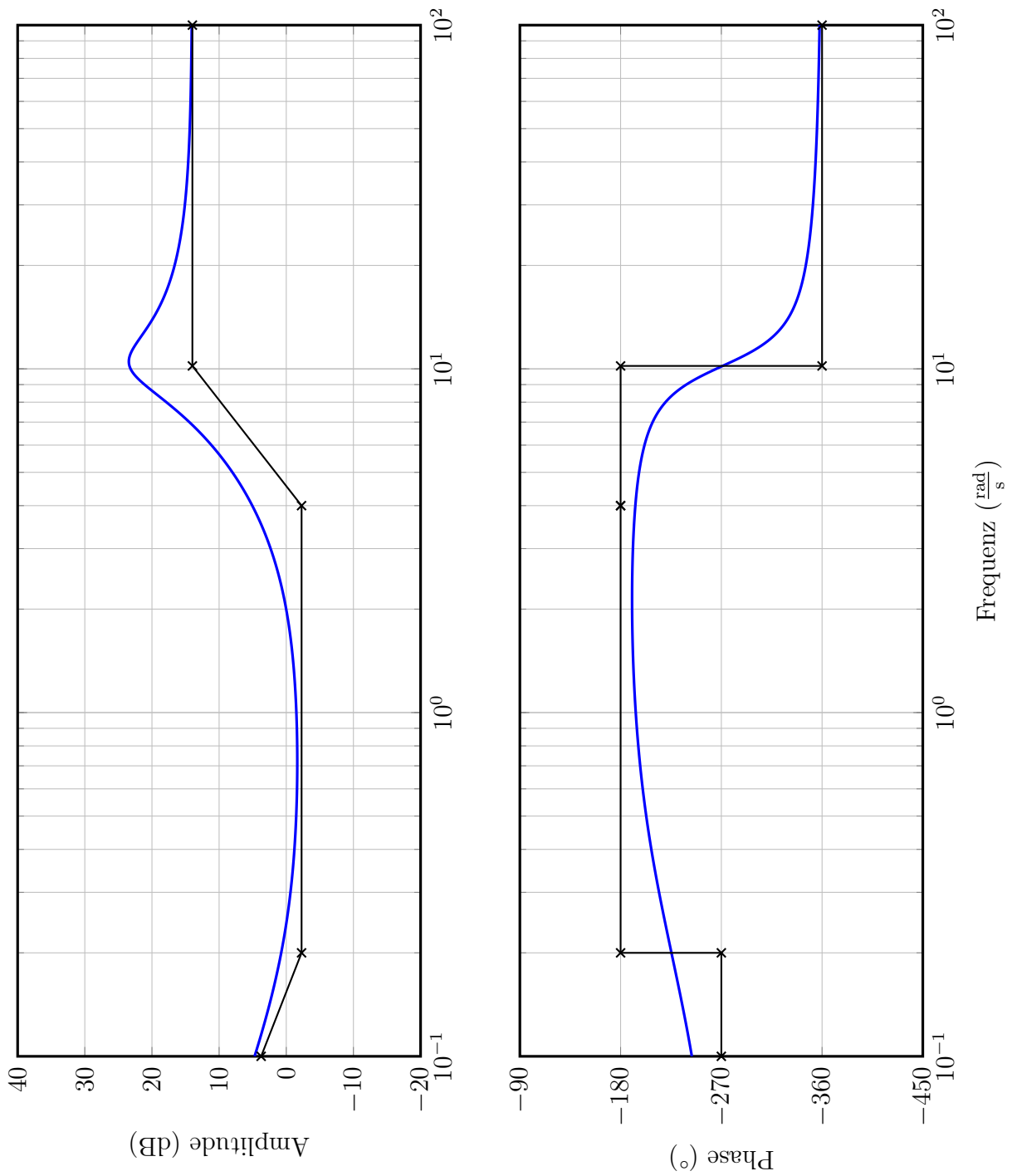
Lösung:

Aus der faktorisierten Darstellung der Übertragungsfunktion lassen sich die notwendigen Werte für das Zeichnen des Bodediagramms bestimmen:

$$c = 5, r = -1, G_7^*(0) = -\frac{4}{130}, \omega_{min} = 0.2 \text{ rad s}^{-1}$$

$$A_{7,db}(\omega_{min}) = 20 \log \left(\left| -5 \cdot \frac{4}{130} \right| 0.2^{-1} \right) = -2.2789 \text{ dB}$$

$$\varphi_7(0) = -180^\circ - 1 \cdot 90^\circ = -270^\circ$$



Punkte für Aufgabe 1: 27 von 27

Punkte für Aufgabe 2: 11 von 11

Punkte für Aufgabe 3: 11 von 11

Punkte für Aufgabe 4: 11 von 11

Punkte für Aufgabe 5: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 6: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 7: 12 von 12

Insgesamt vergebene Punkte: 90 von 90 Falls die Soll- mit der Ist-Punktezahl übereinstimmt und trotzdem rot eingefärbt ist, wurden zu viele Punkte vergeben, jedoch weniger als ein Punkt zu viel.