

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (27 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

- a) Die Eigenwerte der Systemmatrix eines Systems in Zustandsraumdarstellung entsprechen den Polstellen der dazugehörigen Übertragungsfunktion? (1 Punkt)

☐ Ja
☐ Nein

- b) Ein zeitinvariantes System ist immer linear? (1 Punkt)

☐ Ja
☐ Nein

- c) Ein lineares System besitzt für $u(t) \equiv 0$ nur eine Ruhelage? (1 Punkt)

☐ Ja
☐ Nein

- d) Zu welchem Übertragungsglied passt folgende Differentialgleichung? (1 Punkt)

$$2y - 5\dot{u} = 0, \quad u(0) = u_0$$

☐ Proportionalglied
☐ Totzeitglied
☐ Integrator
☐ Differenzierer

- e) Ist das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + 5u, & x(0) &= 0 \\ y &= x + u\end{aligned}$$

sprungfähig? (1 Punkt)

☐ Ja
☐ Nein

f) Wie viele Zustände besitzt das System mit der Übertragungsfunktion $G_1(s)$? (1 Punkt)

$$G_1(s) = \frac{6}{s} + \frac{4s + 1}{s^2 + 5s + 2}$$

- ☐ Einen
☐ Zwei
☐ Drei
☐ Keinen

g) Transformieren Sie die Sprungantwort $h(t) = 2t + e^{-\frac{1}{2}t}$ in den Frequenzbereich! (2 Punkte)

☐ $H(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s + 0.5}$

☐ $H(s) = \frac{s^2 + s + 0.5}{s^2 + 0.5s}$

☐ $H(s) = 2\frac{1}{s^2} + \frac{0.5}{s + 1}$

☐ $H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 0.5s^2}$

h) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion eines Systems 3. Ordnung

$$G_2(s) = \frac{s}{3s^3 + 2s^2 + 10s + 4}$$

auf asymptotische Stabilität! (2 Punkte)

- ☐ Sie ist asymptotisch stabil.
☐ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

i) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \rightarrow \infty$ an!

$$G_3(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)(s^2 + s - 2)}$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_3(\omega) =$ (1 Punkt)

$$G_4(s) = \frac{(s + 1)(s + 4)(s - 1)}{s^3(s - 4)(s - 2)}$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_4(\omega) =$ (1 Punkt)

j) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in $\frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \rightarrow \infty$ an!

$$G_3(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)(s^2 + s - 2)}$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_3(\omega)}{d\omega} =$ (1 Punkt)

$$G_4(s) = \frac{(s + 1)(s + 4)(s - 1)}{s^3(s - 4)(s - 2)}$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} =$ (1 Punkt)

k) Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2(x_1 - u) \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + x_1 + u \\ y &= x_1 + x_2,\end{aligned}$$

(i) Wie lautet das Zustandsraummodell in Matrix-Schreibweise? (2 Punkte)

$$\square \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\square \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\square \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\square \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

(ii) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! (1 Punkt)

- ☐ asymptotisch stabil
☐ instabil
☐ grenzstabil

l) Linearisieren Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \arctan(2\dot{y}) + (y + 1)y = u$$

um die Ruhelage $y(0) = \dot{y}(0) = u(0) = 0$! (3 Punkte)

Hinweis: $(\arctan x)' = (1 + x^2)^{-1}$

$$\square \quad \Delta \ddot{y} + 2\Delta \dot{y} + \Delta y = \Delta u$$

$$\square \quad \Delta \ddot{y} + 0.5\Delta \dot{y} + 2\Delta y = \Delta u$$

$$\square \quad \Delta \ddot{y} + 2\Delta \dot{y} + 2\Delta y = \Delta u$$

$$\square \quad \Delta \ddot{y} + 0.5\Delta \dot{y} + \Delta y = \Delta u$$

m) Bestimmen Sie – beispielsweise mit Hilfe der Faltung – die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = e^t$, das mit dem Eingang $u(t) = t + \sigma(t)$ angeregt wird! (3 Punkte)

$$\square \quad y(t) = 2e^t + t + 2$$

$$\square \quad y(t) = e^t - t - 1$$

$$\square \quad y(t) = 2e^t - t - 2$$

$$\square \quad y(t) = 2e^t + t - 2$$

$$\square \quad y(t) = 2e^t - t + 2$$

$$\square \quad y(t) = e^t + t - 2$$

- n) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Ortskurven (Abbildung 1) sowie Sprungantworten (Abbildung 2) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Ortskurve				Sprungantwort			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
$G_1(s) = \frac{20}{s^2 + 7s + 10}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G_2(s) = \frac{2}{s^2 - 1}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G_3(s) = \frac{2s^3 + 4}{s^3 + 2s^2}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G_4(s) = \frac{-4\pi^2}{s^2 + 2\pi s + 2\pi^2}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

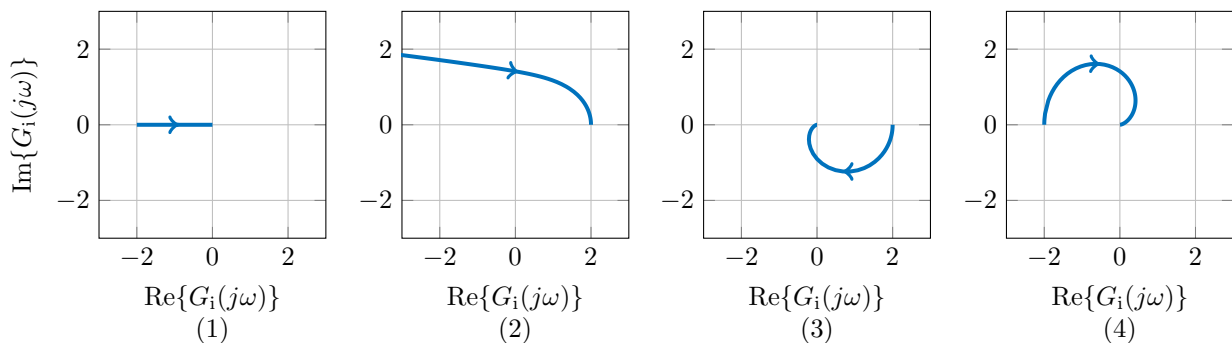


Abbildung 1: Ortskurven der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

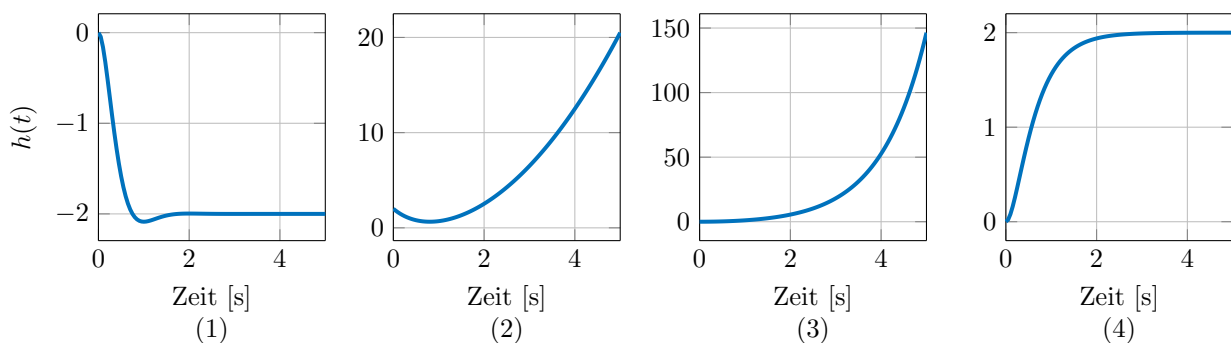
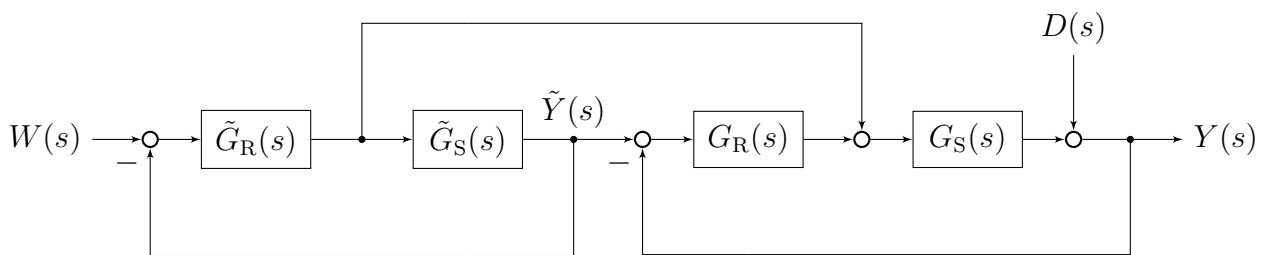


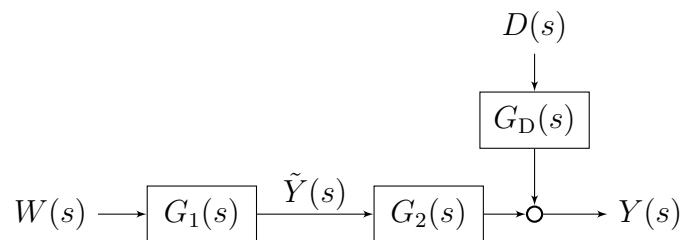
Abbildung 2: Sprungantworten der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2: (11 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt eine Regelkreisstruktur mit einem sogenannten Modellregelkreis. Aufgabe des Modellregelkreises ist sowohl die Berechnung einer Vorsteuerung als auch die Generierung von geeigneten Solltrajektorien für den Ausgang.



Durch Umformen ergibt sich das Blockschaltbild



mit identischer Signalübertragung von $W(s)$ nach $Y(s)$.

- Geben Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ in Abhängigkeit der Übertragungsglieder $\tilde{G}_R(s)$, $\tilde{G}_S(s)$, $G_R(s)$, und $G_S(s)$ für $D(s) = 0$ an! (4 Punkte)
- Geben Sie die Übertragungsfunktion $G_D(s)$ in Abhängigkeit der Übertragungsglieder $\tilde{G}_R(s)$, $\tilde{G}_S(s)$, $G_R(s)$, und $G_S(s)$ für $W(s) = 0$ an! (2 Punkte)
- Bestimmen Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $W(s)$, $D(s)$ und $\tilde{G}_R(s)$, $\tilde{G}_S(s)$, $G_R(s)$, und $G_S(s)$! (3 Punkte)
- Kann die Übertragungsfunktion $\tilde{G}_R(s)$ die Stabilität von $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ beeinflussen? Begründen Sie! (2 Punkte)

Aufgabe 3: (11 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3y - 3y^3 - 2x, \\ \dot{y} &= 6x - 9y - 4xy,\end{aligned}$$

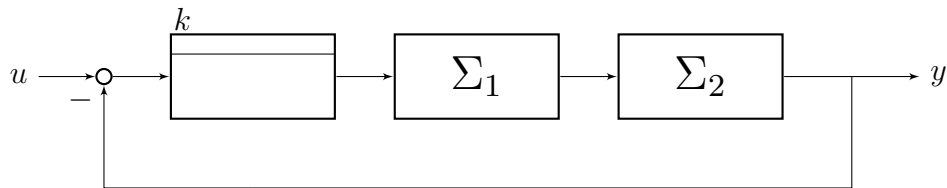
das die triviale Ruhelage $x_0 = y_0 = 0$ besitzt.

- a) Bestimmen Sie die weitere(n) Ruhelage(n) des Systems! (3 Punkte)
- b) Linearisieren Sie das System um die allgemeine Ruhelage $[x_0 \ y_0]^T$ und beurteilen Sie die Stabilität der trivialen Ruhelage $[0 \ 0]^T$! (3 Punkte)
- c) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (5 Punkte) Hierbei ist A die Systemmatrix des linearisierten Systems aus Aufgabenteil b). Falls Sie keine Lösung in Aufgabenteil b) gefunden haben, rechnen Sie mit folgender Systemmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4: (11 Punkte)

Ein lineares SISO-System ist durch das folgende Blockschaltbild gegeben:



Das Teilsystem Σ_1 wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{y}_1 + 3y_1 = \dot{u}_1 + 0.5u, \quad y_1(0) = u_1(0) = 0$$

und das Teilsystem Σ_2 durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}_2 - \dot{y}_2 + 1.5 = u_2, \quad y_2(0) = \dot{y}_2(0) = u_2(0) = 0$$

beschrieben.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen der beiden Teilsysteme Σ_1 und Σ_2 ! (2 Punkte)
- Beurteilen Sie die Stabilität des offenen Kreises! (3 Punkte)
- Für welche Werte von k ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil? (4 Punkte)
- Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des geschlossenen Kreises an! (2 Punkte)

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 8y = \ddot{u} - 2\dot{u} - 16u,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1, \ddot{y}(0) = 0, u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1,$$

beschrieben.

- a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an! (2 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! (1 Punkt)
- c) Berechnen Sie die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion und beurteilen Sie die Stabilität! (2 Punkte)
- d) Ermitteln Sie die Impulsantwort $g(t)$! (4 Punkte)

Aufgabe 6: (9 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen die Wasserstandshöhen eines Mehrtanksystems modelliert werden. Abbildung 3 zeigt den schematischen Aufbau des Systems.

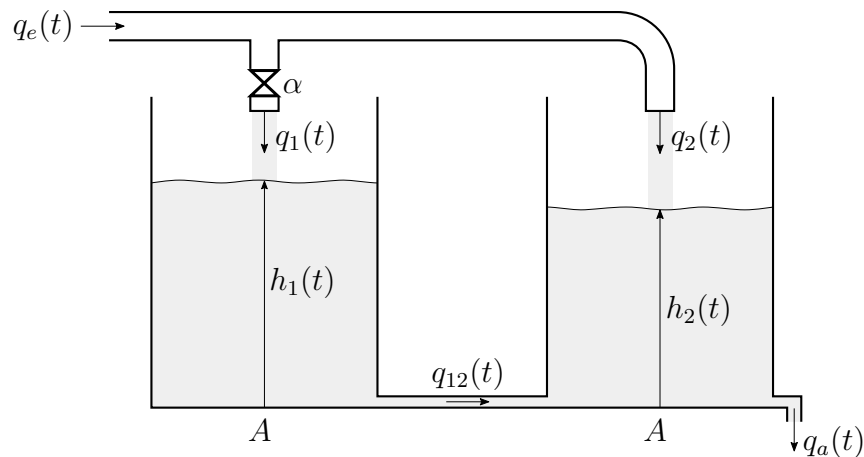


Abbildung 3: Schematischer Aufbau des Tanksystems

Beide Tanks besitzen die Grundfläche $A > 0$. Über das Ventil kann die Verteilung der Zuflüsse $q_1(t)$ und $q_2(t)$ gesteuert werden. Hierbei gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} q_e(t) &= q_1(t) + q_2(t) \\ q_1(t) &= \alpha q_e(t) \end{aligned}$$

mit $\alpha \in [0, 1]$. Der Fluss zwischen den beiden Behältern ist proportional zur Höhendifferenz, d.h. $q_{12}(t) = k_1 \Delta h(t)$. Zudem gilt für den Ausfluss $q_a(t) = k_2 h_2(t)$. Hierbei gilt $k_1, k_2 > 0$.

- Stellen Sie die Füllstandsbilanzen der beiden Wassertanks auf! (2 Punkte)
- Wie lautet die Zustandsraumdarstellung des Systems? Wählen Sie geeignete Zustände sowie den Eingang $u(t) = q_e(t)$ und den Ausgang $y(t) = h_2(t)$. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$! (4 Punkte)

Aufgabe 7: (12 Punkte)

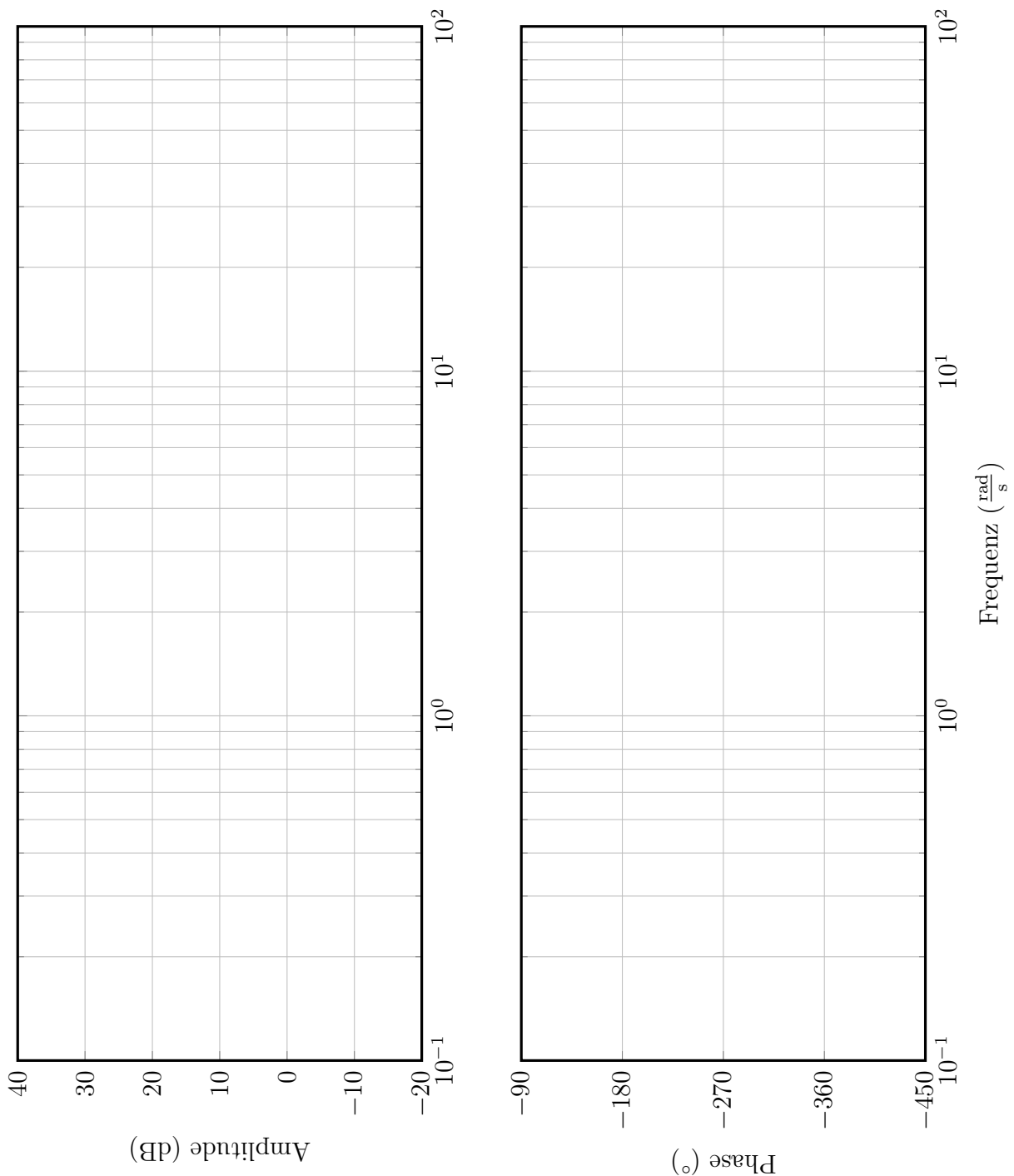
Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = \frac{(s^2 - 16)(5s + 1)}{s(s + 2)^2 + 100s}.$$

- a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! (3 Punkte)
- b) Berechnen Sie Frequenzgang von $G_7(s)$ und ermitteln Sie daraus den Amplituden- und Phasengang des Systems! (5 Punkte)
- c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten! (4 Punkte)

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 11 und 12 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 12 bewertet.



Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 11 und 12 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 12 bewertet.

