Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Ist das Übertragungsverhalten des folgenden Systems zeitinvariant? **(1 Punkt)**

$$\ddot{y} + 2\sin(\dot{y}) + y = \dot{u} + \cos(\omega t)u$$

- ☐ Ja
- ☒ Nein

b) Ein lineares System kann nur dann in den Laplace-Bereich transformiert werden, wenn es stabil ist? **(1 Punkt)**

- ☐ Ja
- ☒ Nein

c) $G(s)$ und $G^*(s) = 2G(s)$ haben denselben Phasengang. **(1 Punkt)**

- ☒ Ja
- ☐ Nein

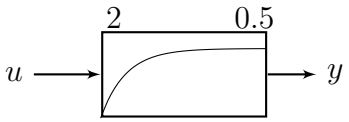
d) Bei der Transformation eines Systems auf Regelungsnormalform ändern sich die Eigenwerte. **(1 Punkt)**

- ☐ Ja
- ☒ Nein

e) Welche Aussagen lassen über ein lineares System mit Nullstellen bei $n_1 = -1$ und $n_2 = 1$ sowie Polstellen bei $p_{1,2} = \pm i$ und $p_{3,4} = -1 \pm 2i$ treffen? **(1 Punkt)**

- ☐ Es ist asymptotisch stabil.
- ☐ Es ist instabil.
- ☒ Es ist grenzstabil.

f) Wie lautet die Sprungantwort des folgenden Übertragungsgliedes? **(2 Punkte)**



- ☐ $h(t) = 2 - \mathrm{e}^{2t}$
- ☒ $h(t) = 2 - 2\mathrm{e}^{-2t}$
- ☐ $h(t) = 2 - \mathrm{e}^{-0.5t}$
- ☐ $h(t) = 2 - 2\mathrm{e}^{-0.5t}$

g) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion eines Systems 3. Ordnung

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 4}{0.5s^3 + 8s^2 + 0.25s + 2}$$

auf asymptotische Stabilität! **(2 Punkte)**

- ☒ Sie ist asymptotisch stabil.
- ☐ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

Lösung:

Die Vorzeichenbedingung ist erfüllt. Die 1. BWB lautet $8 \cdot 0.25 = 2 > 2 \cdot 0.5 = 1$ *und ist erfüllt. Damit ist das System asymptotisch stabil.*

h) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_1(s) = \dfrac{s^2 + 4}{s^4 - 2s^2 + 1}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_1(\omega) =$ $\boxed{\pm 180°}$ **(1 Punkt)**

$G_2(s) = \dfrac{s^3 + 4s^2 + 8s + 7}{6s(s-1)}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_2(\omega) =$ $\boxed{90°}$ **(1 Punkt)**

i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in $\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}$ der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_3(s) = \dfrac{s^2 + 4}{s^4 - 2s^2 + 1}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_3(\omega)}{\mathrm{d}\omega} =$ $\boxed{-40\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}}$ **(1 Punkt)**

$G_4(s) = \dfrac{s^3 + 4s^2 + 8s + 7}{6s(s-1)}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_4(\omega)}{\mathrm{d}\omega} =$ $\boxed{20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}}$ **(1 Punkt)**

j) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = \mathrm{e}^{-t}$, das mit der Funktion $u(t) = (t-2)\sigma(t)$ angeregt wird! **(3 Punkte)**

☒ $y(t) = t + 3\mathrm{e}^{-t} - 3$	☐ $y(t) = t + \mathrm{e}^{-t} - 1$	☐ $y(t) = 3\mathrm{e}^{-t} - t + 3$
☐ $y(t) = t - 3\mathrm{e}^{-t} - 3$	☐ $y(t) = t - \mathrm{e}^{-t} + 1$	☐ $y(t) = 1 - t + \mathrm{e}^{-t}$

k) Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 2x_1x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + 2x_1x_2 - x_2x_3\\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + x_2x_3\,.\end{aligned}$$

(i) Eine Ruhelage des Systems liegt bei $\underline{x}_{0,1} = [0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie, wenn möglich, die weitere(n) Ruhelage(n) des Systems! **(3 Punkte)**

☐	$[0,\ 0.5,\ 0]^{\mathrm{T}}$	☒	$[1,\ 0.5,\ 0]^{\mathrm{T}}$	☐	$[1,\ 3,\ 0]^{\mathrm{T}}$
☐	$[0,\ 0.5\ -2]^{\mathrm{T}}$	☐	$[1,\ 3,\ -2]^{\mathrm{T}}$	☒	$[0,\ 3,\ -2]^{\mathrm{T}}$

(ii) Wie lautet die um die Ruhelage $\underline{x}_0 = [x_{1,0},\ x_{2,0},\ x_{3,0}]^{\mathrm{T}}$ linearisierte Zustandsraumdarstellung des Systems? **(3 Punkte)**

☐ $$\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1-2x_{2,0} & -2x_{1,0} & 0 \\ 2x_{1,0} & -2+2x_{1,0}-x_{3,0} & -x_{3,0} \\ 0 & x_{3,0} & x_{2,0}-3 \end{bmatrix} \Delta\underline{x}$$

☐ $$\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1-2x_{2,0} & 2x_{1,0} & 0 \\ -2x_{2,0} & -2+2x_{1,0}-x_{3,0} & -x_{2,0} \\ 0 & x_{3,0} & 3-x_{2,0} \end{bmatrix} \Delta\underline{x}$$

☒ $$\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1-2x_{2,0} & -2x_{1,0} & 0 \\ 2x_{2,0} & -2+2x_{1,0}-x_{3,0} & -x_{2,0} \\ 0 & x_{3,0} & x_{2,0}-3 \end{bmatrix} \Delta\underline{x}$$

☐ $$\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1-2x_{1,0} & -2x_{2,0} & 0 \\ 2x_{1,0} & -2+2x_{1,0}-x_{3,0} & -x_{2,0} \\ 0 & x_{2,0} & x_{3,0}-3 \end{bmatrix} \Delta\underline{x}$$

(iii) Was können Sie über die Stabilität des um die Ruhelage $\underline{x}_{0,1} = [0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$ linearisierten Systems sagen? **(1 Punkt)**

---

l) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Ortskurven (Abbildung 1) sowie Impulsantworten (Abbildung 2) zu! **(4 Punkte)**

Übertragungsfunktion	Ortskurve				Impulsantwort			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
$G_1(s) = \frac{10}{s^2+2s+10}$	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☒	☐
$G_2(s) = \frac{s+10}{s^3+25s^2+10s}$	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
$G_3(s) = \frac{2}{s^2+4}$	☐	☒	☐	☐	☒	☐	☐	☐
$G_4(s) = \frac{s^2+8}{s^2+s+8}$	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐

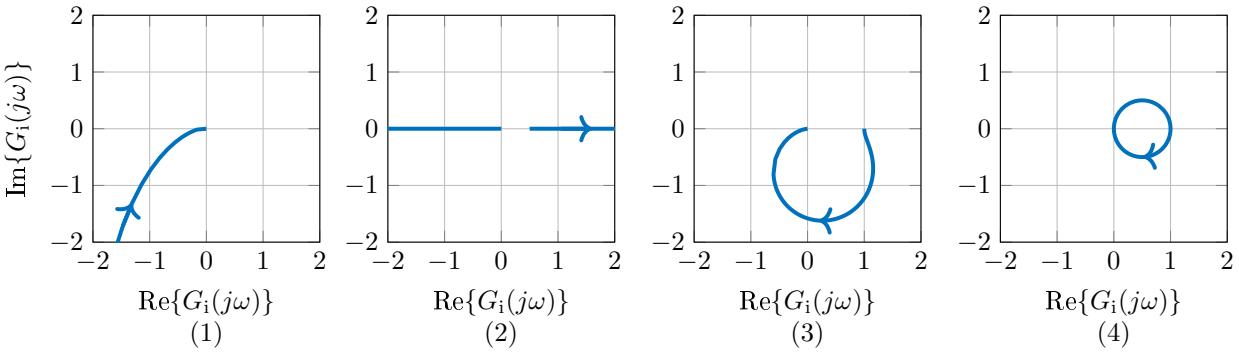


Abbildung 1: Ortskurven der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$.

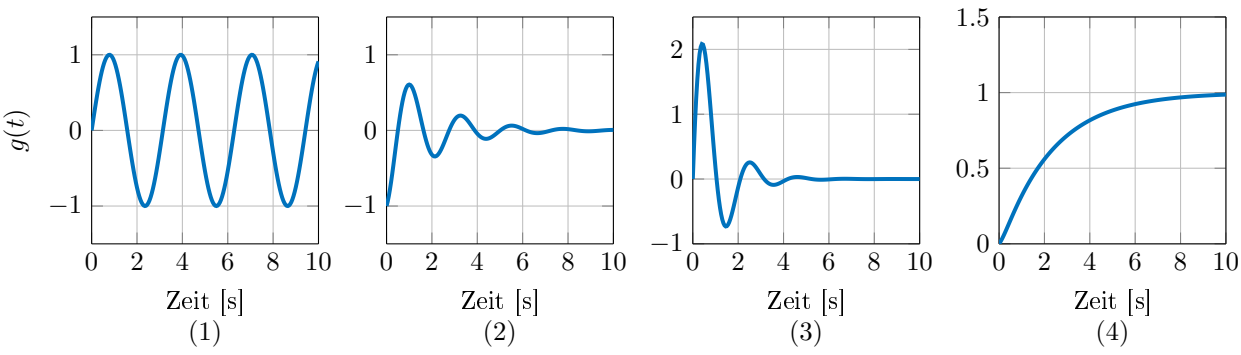


Abbildung 2: Impulsantworten der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$.

m) Bestimmen Sie die modale Zustandsraumdarstellung der folgenden Übertragungsfunktion! **(2 Punkte)**

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 8}$$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}$

☒ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}$

Ist diese Form der Zustandsraumdarstellung eindeutig? **(1 Punkt)**

☐ Ja
☒ Nein

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\Sigma_2: \qquad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \,,$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

welches mithilfe eines Ausgangsreglers mit Verstärkung $k \in \mathrm{R}$ geregelt werden soll. Abbildung 3 zeigt die Regelkreisstruktur.

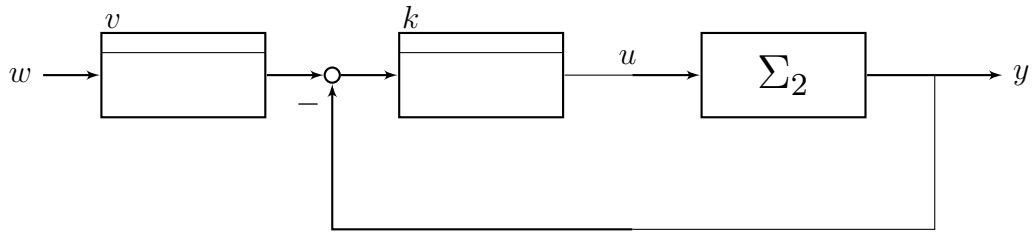


Abbildung 3: Struktur des Regelkreises.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems Σ_2 und beurteilen Sie die Stabilität! **(2 Punkte)**

Lösung:

Char. Polynom

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda+4 & 1 \\ -5 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda+4)(\lambda-2)+5 = \lambda^2+2\lambda-3 = (\lambda-1)(\lambda+3)$$

Daraus ergeben sich dei Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ *und* $\lambda_2 = 1$. *Somit ist das System instabil.*

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s)$ des Systems Σ_2! **(3 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -5 & s-2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s^2+2s-3} & \frac{-1}{s^2+2s-3} \\ \frac{5}{s^2+2s-3} & \frac{s+4}{s^2+2s-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{5}{s^2+2s-3}
\end{aligned}$$

c) Welchen Wert muss der Reglerparamter k annehmen damit der geschlossene Kreis $G_{gk}(s) = Y(s)/W(s)$ eine doppelte Polstelle bei $s_{1,2} = -1$ besitzt? **(3 Punkte)**

Lösung:

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises lautet

$$\begin{aligned}
G_{gk}(s) &= \frac{v \cdot k \cdot G(s)}{1 + k \cdot G(s)} \\
&= \frac{v \cdot k \cdot \frac{5}{s^2+2s-3}}{1 + k \cdot \frac{5}{s^2+2s-3}} \\
&= \frac{5vk}{s^2+2s-3+5k}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit Sollnenner:

$$\begin{aligned}
s^2 + 2s - 3 + 5k &\stackrel{!}{=} s^2 + 2s + 1 \\
-3 + 5k &= 1 \\
k &= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

d) Berechnen Sie die Verstärkung v des Vorfilters so, dass für die Sprungantwort $h(t)$ des geschlossenen Kreises $\lim_{t\to\infty} h(t) = 1$ gilt? **(1 Punkt)**

Lösung:

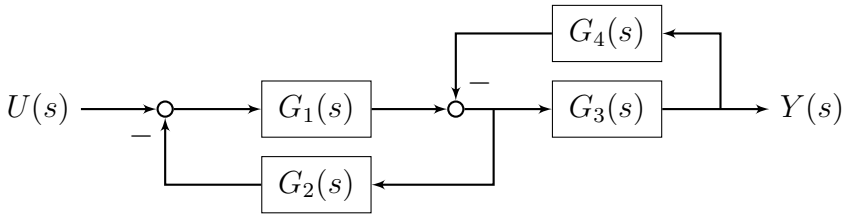
$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} G_{gk}(s) = \frac{5vk}{5k-3} \stackrel{!}{=} 1$$

$$v = \frac{5k-3}{5k} = 1 - \frac{3}{5k}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 3: (9 Punkte)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen! **(4 Punkte)**

Lösung:

Mit Zwischengrösse $Y_1(s)$ als Ausgang von $G_1(s)$ ergibt sich

$$Y = G_3(Y_1 - G_4 Y)$$
$$Y = \frac{G_3}{1 + G_3 G_4} Y_1$$

$$Y_1 = G_1(U - G_2(Y_1 - G_4 Y))$$
$$Y_1 = G_1\left(U - G_2\left(Y_1 - \frac{G_3 G_4}{1 + G_3 G_4} Y_1\right)\right)$$
$$Y_1 = G_1 U - G_1 G_2\left(\frac{1 + G_3 G_4}{1 + G_3 G_4} - \frac{G_3 G_4}{1 + G_3 G_4}\right) Y_1$$
$$Y_1 = G_1 U - \frac{G_1 G_2}{1 + G_3 G_4} Y_1$$
$$\left(1 + \frac{G_1 G_2}{1 + G_3 G_4}\right) Y_1 = G_1 U$$
$$\frac{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4}{1 + G_3 G_4} Y_1 = G_1 U$$
$$Y_1 = \frac{G_1(1 + G_3 G_4)}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4} U$$

$$Y = \frac{G_3}{1 + G_3 G_4} \cdot \frac{G_1(1 + G_3 G_4)}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4} U$$
$$Y = \frac{G_1 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4} U$$

b) Es gelte nun

$$G_1(s) = \frac{1}{s-1}\,, \quad G_2(s) = 2\,, \quad G_3(s) = \frac{1}{s+2}\,, \quad G_4(s) = \frac{a}{s+1}\,.$$

Geben Sie Übertragungsfunktion in Abhängigkeit des Parameters a ohne Verwendung von Doppelbrüchen an! **(3 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{G_1 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4} \\
G(s) &= \frac{\frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s+2}}{1 + \frac{2}{s-1} + \frac{a}{(s+2)(s+1)}} \\
G(s) &= \frac{s+1}{(s+2)(s-1)(s+1) + 2(s+1)(s+2) + a(s-1)} \\
G(s) &= \frac{s+1}{s^3 + 4s^2 + (a+5)s + 2 - a}
\end{aligned}$$

c) Für welche Werte von a ist das System asymptotisch stabil? **(2 Punkte)**

Lösung:

Vorzeichenbedingung liefert

$$\begin{aligned}
a + 5 &> 0 \\
2 - a &> 0 \\
\Rightarrow -5 < a &< 2
\end{aligned}$$

Die 1. BWB lautet hier

$$\begin{aligned}
4(a+5) - (2-a) &> 0 \\
5a + 18 &> 0 \\
\Rightarrow a &> -\frac{18}{5}
\end{aligned}$$

Insgesamt ist das System also für $-3.6 < a < 2$ *asymptotisch stabil.*

Aufgabe 4: (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_4(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 7s + 1}{s^3 + s^2}\,.$$

a) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung der Übertragungsfunktion $G_4(s)$ in Regelungsnormalform an! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + 1\, u$$

b) Beurteilen Sie die Stabilität und Diagonalisierbarkeit des Systems! **(3 Punkte)**

Lösung:

A - Matrix in Dreiecksform liefert direkt die Eigenwerte

$$s_{1,2} = 0\,, \quad s_3 = -1$$

Instabil, da doppelter Eigenwert bei $s = 0$.

Die Diagonalisierbarkeit wird über die geometrische Vielfachheit des EW geprüft. Für $s = 0$ gilt:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - 0\underline{I}_3 \right) \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^3$$

Der Eigenwert $s = 0$ besitzt also die geometrische Vielfachheit 1. Somit ist das System nicht diagonalisierbar.

c) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! **(5 Punkte)**

Lösung:

Methode 1: Ähnlichkeitstransformation

Zunächst Berechnung des Hauptvektors zum EW $s = 0$:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - 0\underline{I}_3 \right) \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor zu EW $s = -1$:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 1\underline{I}_3 \right) \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Transformationsmatrix $\underline{V}$, ihre Inverse $\underline{V}^{-1}$ und die transformierte Matrix $\tilde{\underline{A}}$

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Somit lässt sich die Transitionsmatrix berechnen zu

$$\mathrm{e}^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t + \mathrm{e}^{-t} - 1 \\ 0 & 1 & 1 - \mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

d) Wie lautet die homogene Lösung $y_h(t)$ der Zustandsgleichung aus Aufgabenteil a) für $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$? **(2 Punkte)**

Lösung:

$$y_h(t) = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & t + \mathrm{e}^{-t} - 1 \\ 0 & 1 & 1 - \mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} = 1 + 5\mathrm{e}^{-t}$$

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Ein mechanisches System ist in Abbildung 4 dargestellt. Die Masse m_1 kann über den Positionseingang u bewegt werden, wobei das System durch die Steifigkeiten $k_1, k_2 > 0$ und die nichtlineare Dämpfungskonstante mit einem Polynom 2. Ordnung $d_1(\dot{s}) = d_{1,0} + d_{1,1}\dot{s}^2$ mit $d_1, d_2 > 0$ beschrieben wird. Die Gewichtskraft wird für die folgenden Aufgaben vernachlässigt.

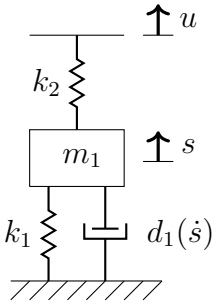


Abbildung 4: Mechanisches System.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das mechanische System mit Hilfe des Impulssatzes auf! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$m_1\ddot{s} = -F_{k1} - F_{k2} - F_{d1}$$
$$m_1\ddot{s} = -k_2(s-u) - k_1 s - (d_{1,0} + d_{1,1}\dot{s}^2)\dot{s}$$

b) Bringen Sie das System in Zustandsraumdarstellung mit dem Ausgang $y = s$ und einer geeigneten Wahl für die Zustände! **(3 Punkte)**

Lösung:

Wahl der Zustände $\underline{x} = \begin{bmatrix} s & \dot{s} \end{bmatrix}^T$ *ergibt:*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1}\right) x_1 - \frac{d_{1,0}}{m_1} x_2 - \frac{d_{1,1}}{m_1} x_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

c) Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^T$! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1}\right) & -\frac{d_{1,0}}{m_1} - 3\frac{d_{1,1}}{m_1} x_{2,0}^2 \end{bmatrix} \Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta\underline{x}$$

d) Bestimmen Sie die Stabilität des linearen Systems um die Ruhelage $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$! **(1 Punkt)**

Lösung:

Das System ist asymptotisch stabil, da alle Parameter größer Null.

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + 10\dot{y} = \dddot{u} + 4\ddot{u} + 23\dot{u} + 20u,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0\,,\ \dot{y}(0) = 1\,,\ \ddot{y}(0) = 0\,,\ u(0) = 1\,,\ \dot{u}(0) = 0\,, \ddot{u}(0) = 0\,,$$

beschrieben.

a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an! **(2 Punkte)**

Lösung:

Laplace-Transformation auf beiden Seiten ergibt

$$\begin{aligned}
&s^3Y(s) - s^2\cancelto{0}{y(0)} - s\dot{y}(0) - \cancelto{0}{\ddot{y}(0)} \\
&\quad +2(s^2Y(s) - s\cancelto{0}{y(0)} - \dot{y}(0)) \\
&\qquad +10(sY(s) - \cancelto{0}{y(0)}) = s^3U(s) - s^2u(0) - s\cancelto{0}{\dot{u}(0)} - \cancelto{0}{\ddot{u}(0)} + \\
&\qquad\qquad + 4(s^2U(s) - su(0) - \cancelto{0}{\dot{u}(0)}) \\
&\qquad\qquad + 23(sU(s) - u(0)) + 20U(s) \\
&(s^3 + 2s^2 + 10s)Y(s) = (s^3 + 4s^2 + 23s + 20)U(s) + s + 2 - s^2 - 4s - 23
\end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 23s + 20}{s^3 + 2s^2 + 10s}U(s) - \frac{s^2 + 3s + 21}{s^3 + 2s^2 + 10s}$$

Ein Punkt für Übertragungsfunktion und ein Punkt für Anfangsbedingungen.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! **(1 Punkt)**

Lösung:

$$G(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 23s + 20}{s^3 + 2s^2 + 10s}$$

c) Berechnen Sie die Impulsantwort $g(t)$ des Systems! **(5 Punkte)**

Lösung:

$$\frac{s^3+4s^2+23s+20}{s(s^2+2s+10)} = A + \frac{B}{s} + \frac{C+Ds}{s^2+2s+10}$$
$$s^3+4s^2+23s+20 = As(s^2+2s+10) + B(s^2+2s+10) + Cs + Ds^2$$
$$s^3+4s^2+23s+20 = As^3 + (2A+B+D)s^2 + (10A+2B+C)s + 10B$$
$$A = 1\,, \quad B = 2\,, \quad C = 9\,, \quad D = 0$$
$$G(s) = 1 + \frac{2}{s} + \frac{9}{s^2+2s+10}$$
$$G(s) = 1 + \frac{2}{s} + 3\frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$
$$g(t) = \delta(t) + 2\sigma(t) + 3\mathrm{e}^{-t}\sin(3t)$$

d) Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to 0} y(t)$ für $u(t) = \sigma(t)$, wobei $\sigma(t)$ der Sprungfunktion entspricht! Ist das System sprungfähig? **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} G(s) = 1$$

Das System ist sprungfähig.

Aufgabe 7: (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = \frac{4s^3 + 15s^2 + 16}{s^4 - 100s^2} .$$

a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme niedrigster Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! **(4 Punkte)** *Hinweis: Der Zähler besitzt eine Nullstelle bei $s_1 = -4$.*

Lösung:

Für den Nenner gilt:

$$s^4 - 100s^2 = s^2(s^2 - 100) = s^2(s - 10)(s + 10)$$

Polynomdivision mit bekannter Polstelle $s_1 = -4$ führt dann auf die weitere Zerlegung (2 Punkte):

$$\begin{array}{rl} 4s^3 + 15s^2 & + 16 = (s+4)(4s^2 - s + 4) \\ \underline{4s^3 + 16s^2} & \\ -\quad s^2 + 0s & \\ -\ \underline{\quad s^2 - 4s} & \\ \qquad\qquad 4s + 16 & \\ \qquad\qquad \underline{4s + 16} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Damit ergibt sich die Faktorisierung zu

$$G(s) = 4 \cdot s^{-2} \cdot (s + 4) \cdot (s^2 - 0.25s + 1) \cdot \frac{1}{s - 10} \cdot \frac{1}{s + 10}$$

b) Berechnen Sie Frequenz-, Amplituden- und Phasengang von $G_7(s)$! **(4 Punkte)**

Lösung:

Der Frequenzgang lautet (entweder mit Ergebnis aus Teil a) oder direkt aus Übertragungsfunktion) (1 Punkte):

$$\begin{aligned} G_7(j\omega) &= 4 \cdot \frac{(j\omega+4)\cdot(-\omega^2-0.25j\omega+1)}{-\omega^2(j\omega-10)(j\omega+10)} \\ &= 4 \cdot \frac{(j\omega+4)\cdot(\omega^2+0.25j\omega-1)}{\omega^2(j\omega-10)(j\omega+10)} \end{aligned}$$

Für den Amplitudengang ergibt sich (1.5 Punkte):

$$|G_7(j\omega)| = 4\frac{\sqrt{\omega^2+16}\sqrt{(\omega^2-1)^2+0.25^2}}{\omega^2(\omega^2+100)}$$

Für den Phasengang ergibt sich (1.5 Punkte):

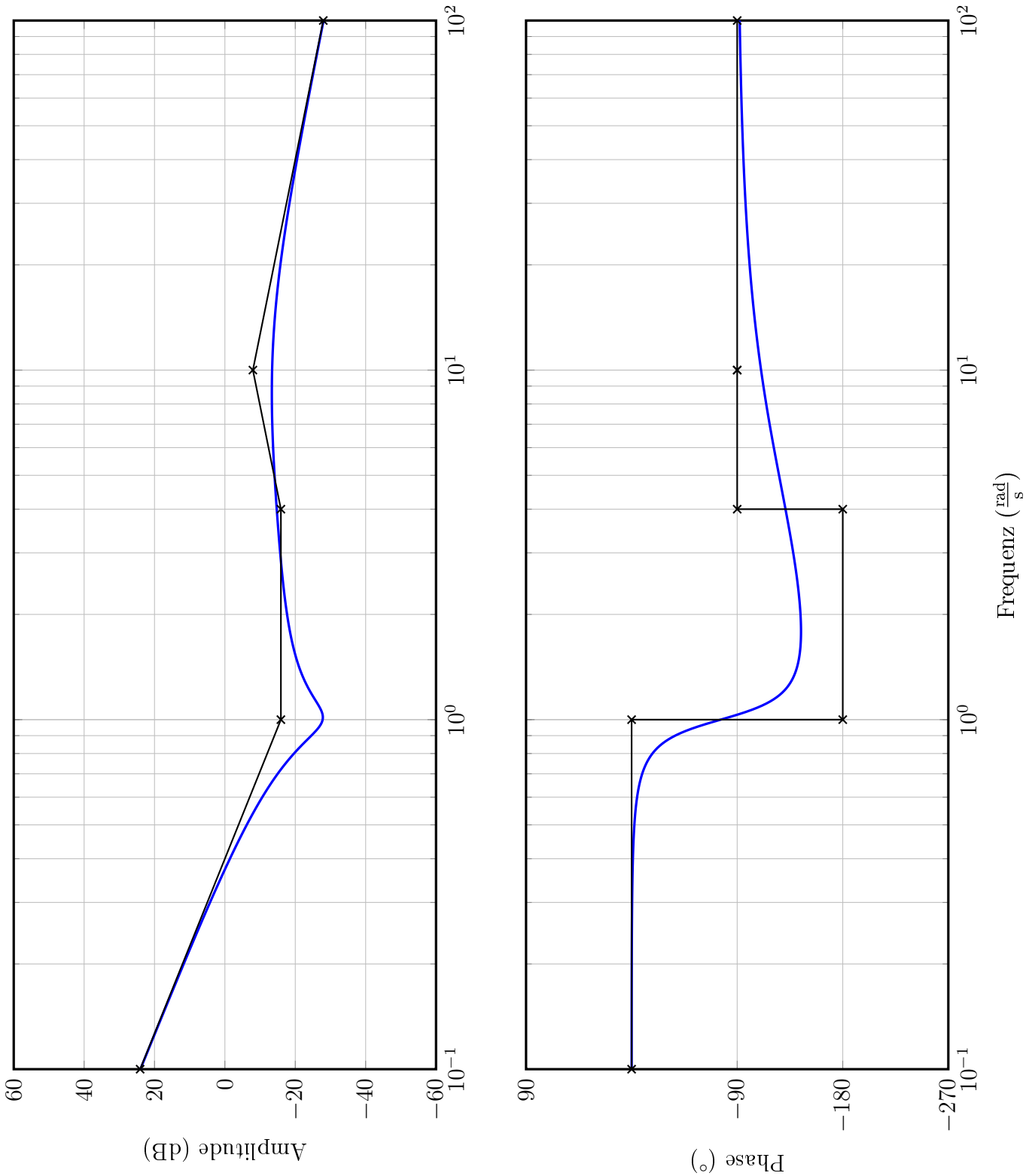
$$\begin{aligned} \angle G_7(j\omega) &= \arctan\left(\frac{\omega}{4}\right) + \phi(\omega) - \pi - \left(\pi + \arctan\left(\frac{\omega}{-10}\right)\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\omega}{4}\right) + \phi(\omega) \end{aligned}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{-0.25\omega}{-\omega^2+1}\right) & \omega < 1 \\ -\pi + \arctan\left(\dfrac{-0.25\omega}{-\omega^2+1}\right) & \omega \geq 1 \end{cases}$$

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten! **(4 Punkte)**

Lösung:

Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart



Punkte für Aufgabe 1: 30 von 30

Punkte für Aufgabe 2: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 3: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 4: 12 von 12

Punkte für Aufgabe 5: 8 von 8

Punkte für Aufgabe 6: 10 von 10

Punkte für Aufgabe 7: 12 von 12

Insgesamt vergebene Punkte: 90 von 90