Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Ist das Übertragungsverhalten des folgenden Systems zeitinvariant? (1 Punkt)

$$\ddot{y} + 2\sin(\dot{y}) + y = \dot{u} + \cos(\omega t)u$$

☐ Ja
☐ Nein

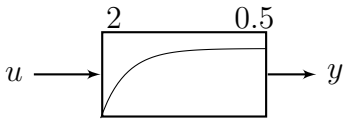
b) Ein lineares System kann nur dann in den Laplace-Bereich transformiert werden, wenn es stabil ist? (1 Punkt)
☐ Ja
☐ Nein

c) $G(s)$ und $G^*(s) = 2G(s)$ haben denselben Phasengang. (1 Punkt)
☐ Ja
☐ Nein

d) Bei der Transformation eines Systems auf Regelungsnormalform ändern sich die Eigenwerte. (1 Punkt)
☐ Ja
☐ Nein

e) Welche Aussagen lassen über ein lineares System mit Nullstellen bei $n_1 = -1$ und $n_2 = 1$ sowie Polstellen bei $p_{1,2} = \pm i$ und $p_{3,4} = -1 \pm 2i$ treffen? (1 Punkt)
☐ Es ist asymptotisch stabil.
☐ Es ist instabil.
☐ Es ist grenzstabil.

f) Wie lautet die Sprungantwort des folgenden Übertragungsgliedes? (2 Punkte)



☐ $h(t) = 2 - \mathrm{e}^{2t}$
☐ $h(t) = 2 - 2\mathrm{e}^{-2t}$
☐ $h(t) = 2 - \mathrm{e}^{-0.5t}$
☐ $h(t) = 2 - 2\mathrm{e}^{-0.5t}$

g) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion eines Systems 3. Ordnung

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 4}{0.5s^3 + 8s^2 + 0.25s + 2}$$

auf asymptotische Stabilität! (2 Punkte)
☐ Sie ist asymptotisch stabil.
☐ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

h) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_1(s) = \dfrac{s^2 + 4}{s^4 - 2s^2 + 1}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_1(\omega) =$ ☐ (1 Punkt)

$G_2(s) = \dfrac{s^3 + 4s^2 + 8s + 7}{6s(s-1)}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_2(\omega) =$ ☐ (1 Punkt)

i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in $\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}$ der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_3(s) = \dfrac{s^2 + 4}{s^4 - 2s^2 + 1}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_3(\omega)}{\mathrm{d}\omega} =$ ☐ (1 Punkt)

$G_4(s) = \dfrac{s^3 + 4s^2 + 8s + 7}{6s(s-1)}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_4(\omega)}{\mathrm{d}\omega} =$ ☐ (1 Punkt)

j) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = \mathrm{e}^{-t}$, das mit der Funktion $u(t) = (t-2)\sigma(t)$ angeregt wird! (3 Punkte)

☐ $y(t) = t + 3\mathrm{e}^{-t} - 3$ ☐ $y(t) = t + \mathrm{e}^{-t} - 1$ ☐ $y(t) = 3\mathrm{e}^{-t} - t + 3$
☐ $y(t) = t - 3\mathrm{e}^{-t} - 3$ ☐ $y(t) = t - \mathrm{e}^{-t} + 1$ ☐ $y(t) = 1 - t + \mathrm{e}^{-t}$

k) Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 2x_1x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + 2x_1x_2 - x_2x_3\\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + x_2x_3\,.\end{aligned}$$

(i) Eine Ruhelage des Systems liegt bei $\underline{x}_{0,1} = [0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie, wenn möglich, die weitere(n) Ruhelage(n) des Systems! (3 Punkte)

☐ $[0,\ 0.5,\ 0]^{\mathrm{T}}$ ☐ $[1,\ 0.5,\ 0]^{\mathrm{T}}$ ☐ $[1,\ 3,\ 0]^{\mathrm{T}}$

☐ $[0,\ 0.5\ -2]^{\mathrm{T}}$ ☐ $[1,\ 3,\ -2]^{\mathrm{T}}$ ☐ $[0,\ 3,\ -2]^{\mathrm{T}}$

(ii) Wie lautet die um die Ruhelage $\underline{x}_0 = [x_{1,0},\ x_{2,0},\ x_{3,0}]^{\mathrm{T}}$ linearisierte Zustandsraumdarstellung des Systems? (3 Punkte)

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1-2x_{2,0} & -2x_{1,0} & 0 \\ 2x_{1,0} & -2+2x_{1,0}-x_{3,0} & -x_{3,0} \\ 0 & x_{3,0} & x_{2,0}-3 \end{bmatrix} \Delta\underline{x}$

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1-2x_{2,0} & 2x_{1,0} & 0 \\ -2x_{2,0} & -2+2x_{1,0}-x_{3,0} & -x_{2,0} \\ 0 & x_{3,0} & 3-x_{2,0} \end{bmatrix} \Delta\underline{x}$

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1-2x_{2,0} & -2x_{1,0} & 0 \\ 2x_{2,0} & -2+2x_{1,0}-x_{3,0} & -x_{2,0} \\ 0 & x_{3,0} & x_{2,0}-3 \end{bmatrix} \Delta\underline{x}$

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1-2x_{1,0} & -2x_{2,0} & 0 \\ 2x_{1,0} & -2+2x_{1,0}-x_{3,0} & -x_{2,0} \\ 0 & x_{2,0} & x_{3,0}-3 \end{bmatrix} \Delta\underline{x}$

(iii) Was können Sie über die Stabilität des um die Ruhelage $\underline{x}_{0,1} = [0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$ linearisierten Systems sagen? (1 Punkt)

---

l) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Ortskurven (Abbildung 1) sowie Impulsantworten (Abbildung 2) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Ortskurve (1)	(2)	(3)	(4)	Impulsantwort (1)	(2)	(3)	(4)
$G_1(s) = \frac{10}{s^2+2s+10}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G_2(s) = \frac{s+10}{s^3+25s^2+10s}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G_3(s) = \frac{2}{s^2+4}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G_4(s) = \frac{s^2+8}{s^2+s+8}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

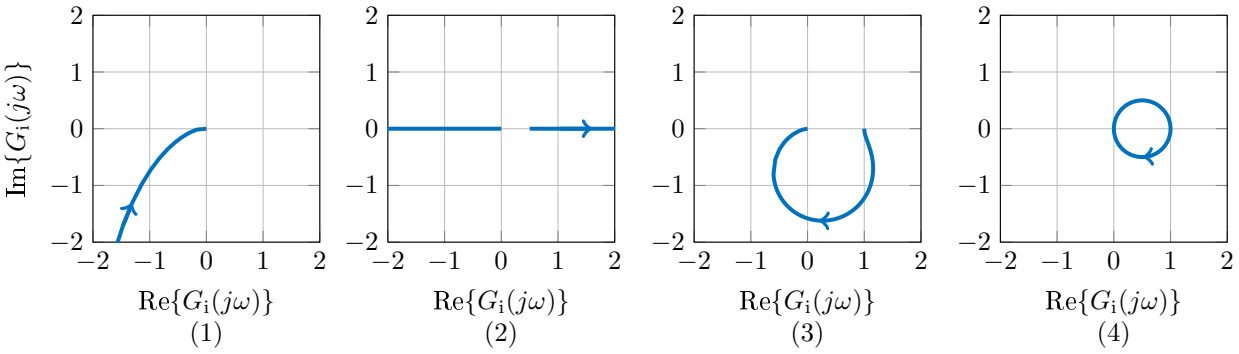


Abbildung 1: Ortskurven der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$.

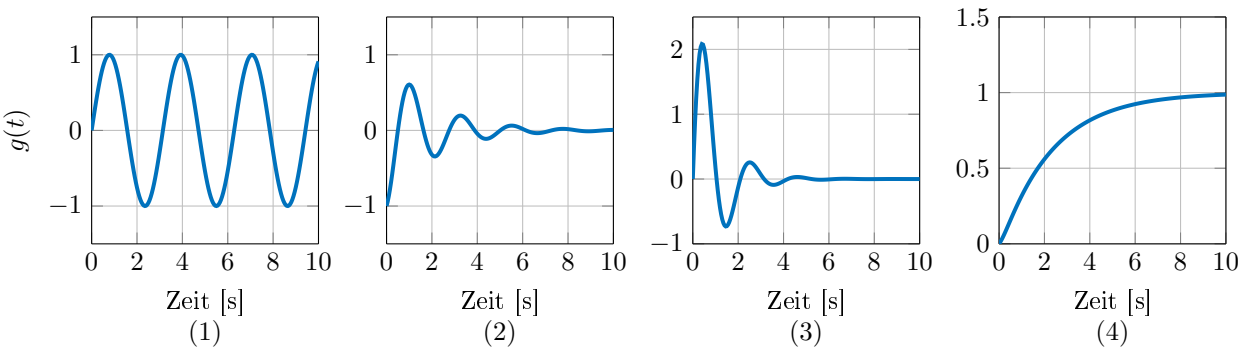


Abbildung 2: Impulsantworten der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$.

m) Bestimmen Sie die modale Zustandsraumdarstellung der folgenden Übertragungsfunktion! (2 Punkte)

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 8}$$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}$

☐ $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u$
$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}$

Ist diese Form der Zustandsraumdarstellung eindeutig? (1 Punkt)

☐ Ja
☐ Nein

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\Sigma_2: \qquad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \,,$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

welches mithilfe eines Ausgangsreglers mit Verstärkung $k \in \mathrm{R}$ geregelt werden soll. Abbildung 3 zeigt die Regelkreisstruktur.

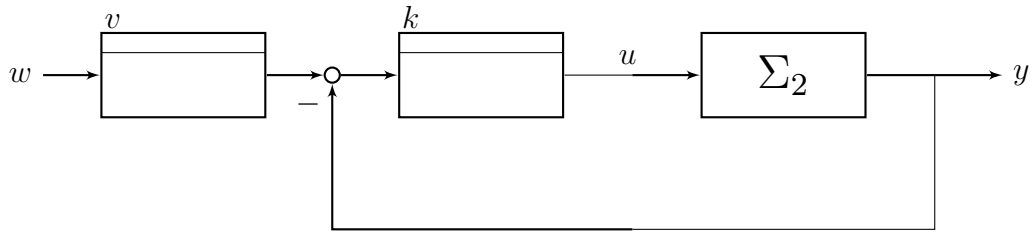


Abbildung 3: Struktur des Regelkreises.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems Σ_2 und beurteilen Sie die Stabilität! (2 Punkte)

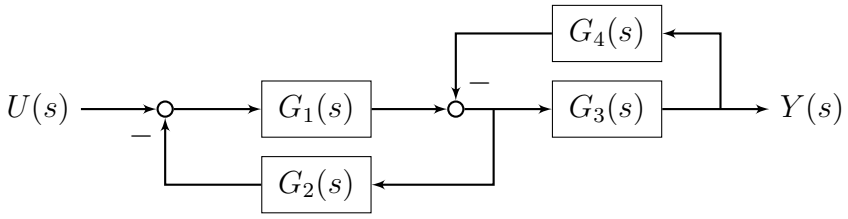
b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s)$ des Systems Σ_2! (3 Punkte)

c) Welchen Wert muss der Reglerparamter k annehmen damit der geschlossene Kreis $G_{gk}(s) = Y(s)/W(s)$ eine doppelte Polstelle bei $s_{1,2} = -1$ besitzt? (3 Punkte)

d) Berechnen Sie die Verstärkung v des Vorfilters so, dass für die Sprungantwort $h(t)$ des geschlossenen Kreises $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = 1$ gilt? (1 Punkt)

Aufgabe 3: (9 Punkte)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_(s) = Y(s)/U(s)$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen! (4 Punkte)

b) Es gelte nun

$$G_1(s) = \frac{1}{s-1}\,, \quad G_2(s) = 2\,, \quad G_3(s) = \frac{1}{s+2}\,, \quad G_4(s) = \frac{a}{s+1}\,.$$

Geben Sie Übertragungsfunktion in Abhängigkeit des Parameters a ohne Verwendung von Doppelbrüchen an! (3 Punkte)

c) Für welche Werte von a ist das System asymptotisch stabil? (2 Punkte)

Aufgabe 4: (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_4(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 7s + 1}{s^3 + s^2}\,.$$

a) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung der Übertragungsfunktion $G_4(s)$ in Regelungsnormalform an! (2 Punkte)

b) Beurteilen Sie die Stabilität und Diagonalisierbarkeit des Systems! (3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} mit einer geeigneten Methode! (5 Punkte)

d) Wie lautet die homogene Lösung $y_h(t)$ der Zustandsgleichung aus Aufgabenteil a) für $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$? (2 Punkte)

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Ein mechanisches System ist in Abbildung 4 dargestellt. Die Masse m_1 kann über den Positionseingang u bewegt werden, wobei das System durch die Steifigkeiten $k_1, k_2 > 0$ und die nichtlineare Dämpfungskonstante mit einem Polynom 2. Ordnung $d_1(\dot{s}) = d_{1,0} + d_{1,1}\dot{s}^2$ mit $d_1, d_2 > 0$ beschrieben wird. Die Gewichtskraft wird für die folgenden Aufgaben vernachlässigt.

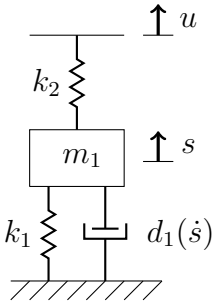


Abbildung 4: Mechanisches System.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das mechanische System mit Hilfe des Impulssatzes auf! (2 Punkte)

b) Bringen Sie das System in Zustandsraumdarstellung mit dem Ausgang $y = s$ und einer geeigneten Wahl für die Zustände! (3 Punkte)

c) Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^T$! (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Stabilität des linearen Systems um die Ruhelage $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$! (1 Punkt)

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + 10\dot{y} = \dddot{u} + 4\ddot{u} + 23\dot{u} + 20u,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0\,,\ \dot{y}(0) = 1\,,\ \ddot{y}(0) = 0\,,\ u(0) = 1\,,\ \dot{u}(0) = 0\,, \ddot{u}(0) = 0\,,$$

beschrieben.

a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an! (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! (1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Impulsantwort $g(t)$ des Systems! (5 Punkte)

d) Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to 0} y(t)$ für $u(t) = \sigma(t)$, wobei $\sigma(t)$ der Sprungfunktion entspricht! Ist das System sprungfähig? (2 Punkte)

Aufgabe 7: (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = \frac{4s^3 + 15s^2 + 16}{s^4 - 100s^2} \, .$$

a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme niedrigster Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! (4 Punkte) *Hinweis: Der Zähler besitzt eine Nullstelle bei* $s_1 = -4$.

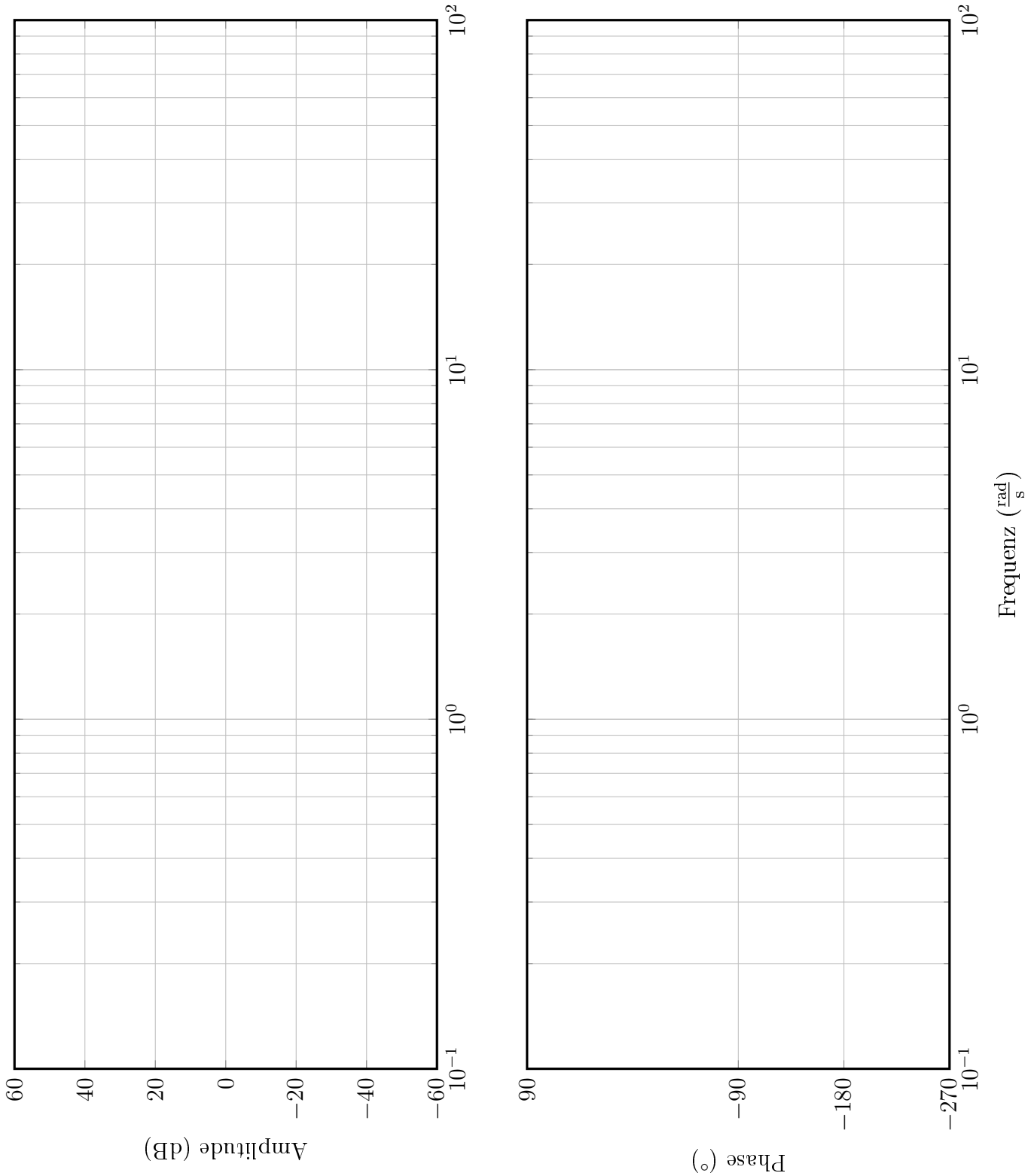
b) Berechnen Sie Frequenz-, Amplituden- und Phasengang von $G_7(s)$! (4 Punkte)

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten! (4 Punkte)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 12 und 13 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 13 bewertet.



Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 12 und 13 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 13 bewertet.

