Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Name, Matrikelnummer: _____

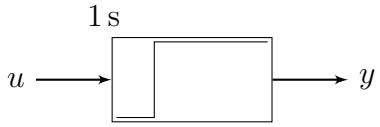
Aufgabe 1: (27 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Ein lineares System 1.Ordnung ist schwingfähig? **(1 Punkt)**
- ☐ Ja
- ☒ Nein

b) Die Stabilitätseigenschaften eines linearen Systems sind invariant gegenüber einer linearer Zustandstransformation? **(1 Punkt)**
- ☒ Ja
- ☐ Nein

c) Für welches Übertragungsglied verwendet man folgendes Schaltzeichen? **(1 Punkt)**



- ☐ Proportionalglied
- ☒ Totzeitglied
- ☐ Integrator

d) Welche Aussagen lassen sich zur Stabilität der Übertragungsfunktion $G(s)$ treffen? **(1 Punkt)**

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s+2)(s+4)(s+3)(s+1)}$$

- ☒ Sie ist grenzstabil.
- ☐ Sie ist asymptotisch stabil.
- ☐ Sie ist instabil.

e) Die Impulsantwort der Differentialgleichung $\dot{y} + 2y = u$ lautet: **(1 Punkt)**

- ☐ $g(t) = 1 - \mathrm{e}^{-2t}$
- ☐ $g(t) = 2\mathrm{e}^{t}$
- ☐ $g(t) = 1 - 2\mathrm{e}^{-t}$
- ☒ $g(t) = \mathrm{e}^{-2t}$

f) Welche Aussagen über das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.5s + 2}{s^2 + s + 1}$$

treffen zu? **(2 Punkte)**

- ☐ Das System besitzt reelle Pole.
- ☐ Das System zeigt Integratorverhalten.
- ☒ Für die Sprungantwort gilt $\lim_{t\to\infty} y(t) = 2$
- ☒ Für die Impulsantwort gilt $\lim_{t\to 0} y(t) = 0.5$

g) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion eines Systems 3. Ordnung

$$G(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 - 2)}{5s^3 + 4s^2 + 10s + 8}$$

auf asymptotische Stabilität! **(2 Punkte)**

- ☐ Sie ist asymptotisch stabil.
- ☒ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

Lösung:

Die Vorzeichenbedingung ist erfüllt. Die 1. BWB lautet $10 \cdot 4 = 40 > 5 \cdot 8 = 40$ *und ist nicht erfüllt. Damit ist das System nicht asymptotisch stabil.*

h) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$$G_1(s) = \frac{s(s + 8)}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_1(\omega) = \boxed{-90^\circ} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$G_2(s) = \frac{s^2(s + 3)^2}{2(s - 2)^2} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_2(\omega) = \boxed{180^\circ} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in $\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}$ der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$$G_3(s) = \frac{s(s + 8)}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_3(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \boxed{-20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$G_4(s) = \frac{s^2(s + 3)^2}{2(s - 2)^2} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_4(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \boxed{40\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

j) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{-t}$, das mit der Sprungfunktion $u(t) = \sigma(t)$ angeregt wird! **(3 Punkte)**

☐ $y(t) = -\mathrm{e}^{-t}\left(\cos(t) - \sin(t)\right)$
☐ $y(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}\sin(t)$
☐ $y(t) = 0.5\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\right)$
☐ $y(t) = 1 - 0.5\mathrm{e}^{-t}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)$
☒ $y(t) = 0.5 - 0.5\mathrm{e}^{-t}\left(\cos(t) - \sin(t)\right)$
☐ $y(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t}\left(\cos(t) - \sin(t)\right)$

k) Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1(x_1 - u)\\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1(3 - x_1x_2)\end{aligned}$$

(i) Eine Ruhelage des Systems liegt bei $\underline{x}_{0,1} = [0,\ 0]^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie, wenn möglich, die weitere(n) Ruhelage(n) des Systems für $u = u_0$! **(2 Punkte)**

☐ Es gibt keine weiteren Ruhelagen.
☒ $\underline{x}_{0,2} = \left[u_0,\ \dfrac{3u_0}{u_0^2 + 2}\right]^{\mathrm{T}}$
☐ $\underline{x}_{0,2} = \left[u_0,\ \dfrac{2u_0}{u_0^2 + 3}\right]^{\mathrm{T}}$
☐ $\underline{x}_{0,2} = \left[u_0,\ \dfrac{3u_0}{u_0 + 2}\right]^{\mathrm{T}}$
☐ $\underline{x}_{0,2} = \left[u_0,\ \dfrac{3u_0}{u_0^2 - 2}\right]^{\mathrm{T}}$

(ii) Wie lautet die um die Ruhelage $\underline{x}_0 = [x_{1,0},\ x_{2,0}]^{\mathrm{T}},\ u_0$ linearisierte Zustandsraumdarstellung des Systems? **(3 Punkte)**

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -x_{1,0} + u_0 & 0 \\ 3 - 2x_{1,0}x_{2,0} & -2 + x_{1,0}^2 \end{bmatrix}\Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}\Delta u$

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2x_{1,0} + u_0 & 0 \\ 3 - 2x_{1,0}x_{2,0} & -2 + x_{1,0}^2 \end{bmatrix}\Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} -x_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}\Delta u$

☒ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2x_{1,0} + u_0 & 0 \\ 3 - 2x_{1,0}x_{2,0} & -2 - x_{1,0}^2 \end{bmatrix}\Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}\Delta u$

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2x_{1,0} - u_0 & 0 \\ 3 - 2x_{1,0}x_{2,0} & -2 - x_{1,0}^2 \end{bmatrix}\Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} -x_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}\Delta u$

l) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Ortskurven (Abbildung 1) sowie Sprungantworten (Abbildung 2) zu! **(4 Punkte)**

Übertragungsfunktion	Ortskurve				Sprungantwort			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
$G_1(s) = \dfrac{2}{2s^2 - 4s + 2}$	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐
$G_2(s) = \dfrac{s+8}{(s+4)(s+1)}$	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☒	☐
$G_3(s) = \dfrac{s^2+3s}{s^2+2s+4}$	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐
$G_4(s) = \dfrac{s+10}{s^2+6s+5}\mathrm{e}^{-s}$	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

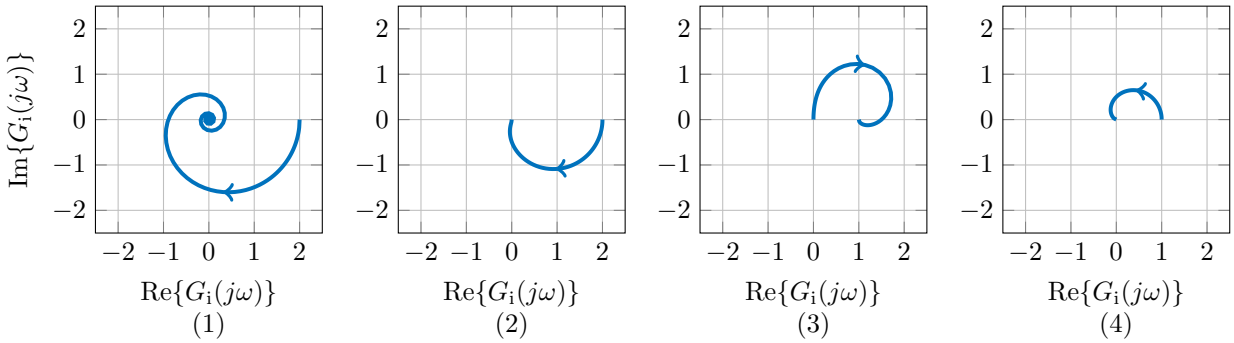


Abbildung 1: Ortskurven der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

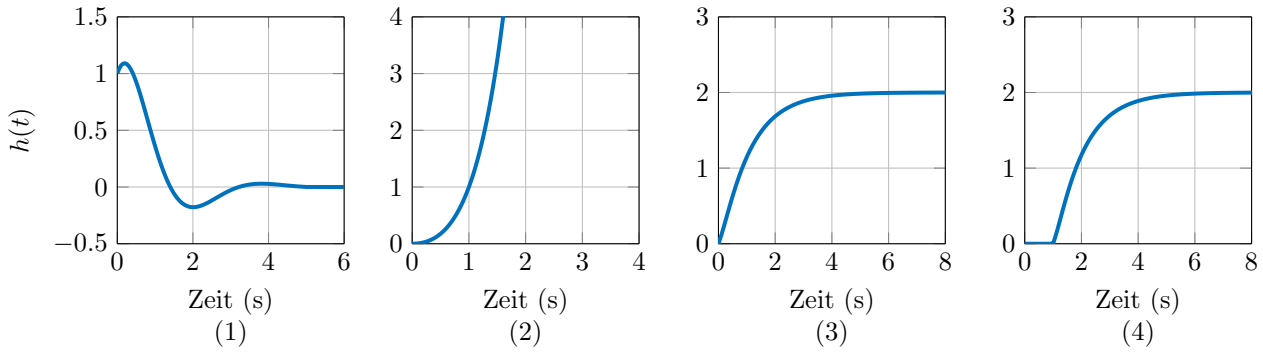
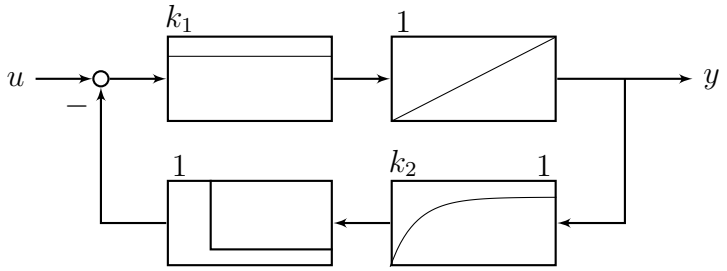


Abbildung 2: Sprungantworten der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

m) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ des folgenden Blockschaltbilds! **(2 Punkte)**



☒ $G(s) = \dfrac{k_1 s + k_1}{s^2 + (1 + k_1 k_2)s}$

☐ $G(s) = \dfrac{s + k_1}{s^2 + (1 + k_1 k_2)s}$

☐ $G(s) = \dfrac{s + k_1}{s^2 + k_1 k_2 s}$

☐ $G(s) = \dfrac{k_1 s + k_1}{s^2 + s + k_1 k_2}$

☐ $G(s) = \dfrac{k_1 s + k_1}{s^2 + k_1 k_2 s}$

☐ $G(s) = \dfrac{s + k_1}{s^2 + s + k_1 k_2}$

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dddot{y} + c(t)\ddot{y} + \big(4 - c(t)\big)\,\dot{y} + 3y = 3u$$

mit $c(t) \in \mathbb{R}\,\forall\, t > 0$.

a) Charakterisieren Sie die Differentialgleichung hinsichtlich Linearität, Kausalität, Zeitvarianz und Ordnung! **(2 Punkte)**

Lösung:

Es handelt sich um eine lineare kausale zeitvariante (wegen $c(t)$) Differentialgleichung 3. Ordnung.

b) Können Sie mithilfe der in der Vorlesung behandelten Methoden eine Aussage über die Stabilität des Systems treffen? Wenn ja, welche? **(1 Punkt)**

Lösung:

Nein.

c) Für die weiteren Untersuchungen kann davon ausgegangen werden, dass $c(t) \equiv c$ konstant ist. Geben Sie den Wertebereich des Parameters c an für den das System asymptotisch stabil ist! **(3 Punkte)**

Lösung:

Mit dem Hurwitz-Kriterium ergibt sich aus der Vorzeichenbedingung

$$\begin{aligned} c &> 0 \\ c &< 4\,. \end{aligned}$$

Des weiteren erhält man über die 1. BWB

$$\begin{aligned} c \cdot (4 - c) &> 3 \cdot 1 \\ -c^2 + 4c - 3 &> 0 \\ c^2 - 4c + 3 &< 0 \\ (c-1) \cdot (c-3) &> 0 \\ \Rightarrow c > 1 \;&\textit{ und } c < 3 \end{aligned}$$

Einzige Moeglichkeit, sonst VZB nicht erfuellt!

d) Stellen Sie die Zustandsraumdarstellung mit den Zuständen $\underline{x} = [y,\ \dot{y},\ \ddot{y}]^{\mathrm{T}}$ und dem Ausgang y auf! **(3 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\
\dot{x}_2 &= \ddot{y} = x_3 \\
\dot{x}_3 &= \dddot{y} = -c\ddot{y} - (4-c)\dot{y} - 3y + 3u = -cx_3 - (4-c)x_2 - 3x_1 + 3u
\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -(4-c) & -c \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u\ , \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

e) Es sei nun $c = 3$. Was können Sie nun über die Stabilität des Systems sagen? Hinweis: Das System hat einen Pol bei $s = -3$. **(3 Punkte)**

Lösung:

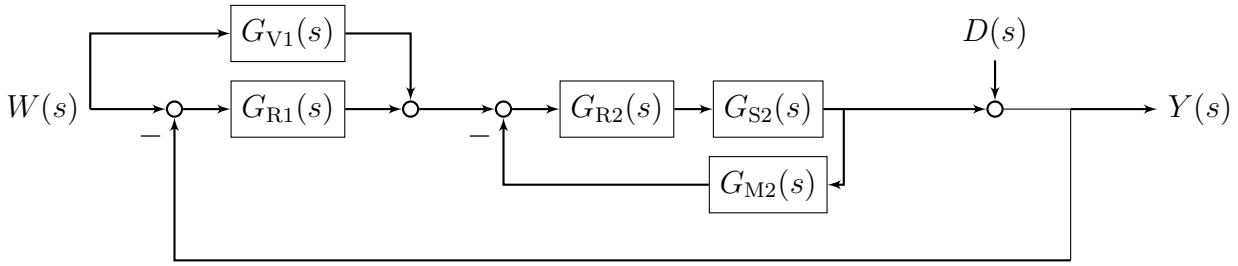
Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned}
s^3 + 3s^2 + s + 3 &= 0 \\
(s+3)(s^2+1) &= 0
\end{aligned}$$

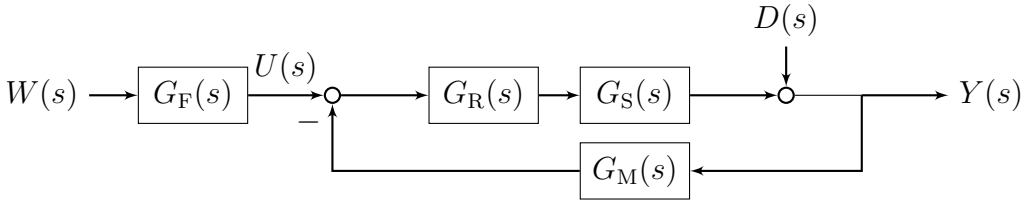
Daraus ergeben sich Pole bei $s_1 = -3$ und $s_{2,3} = \pm i$. Daher ist das System grenzstabil.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



Das Blockschaltbild kann durch Umformung auf folgende Darstellung gebracht werden:



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $G_F(s)$,$G_R(s)$,$G_S(s)$, und $G_M(s)$ des umgeformten Blockschaltbilds in Abhängigkeit der Übertragungsglieder $G_{V1}(s)$, $G_{R1}(s)$, $G_{R2}(s)$, $G_{S2}(s)$ und $G_{M2}(s)$! **(4 Punkte)**

Lösung:

$$
\begin{aligned}
G_F(s) &= 1 + G_{R1}^{-1}(s) G_{V1}(s) \\
G_R(s) &= G_{R1} \\
G_S(s) &= \frac{G_{R2}(s) G_{S2}(s)}{1 + G_{R2}(s) G_{S2(s)} G_{M2}(s)} \\
G_M(s) &= 1
\end{aligned}
$$

Alternative:

$$
\begin{aligned}
G_F(s) &= G_{R1}(s) + G_{V1}(s) \\
G_R(s) &= 1 \\
G_S(s) &= \frac{G_{R2}(s) G_{S2}(s)}{1 + G_{R2}(s) G_{S2(s)} G_{M2}(s)} \\
G_M(s) &= G_{R1}(s)
\end{aligned}
$$

Alternative:

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{F}}(s) &= G_{\mathrm{R1}}(s) + G_{\mathrm{V1}}(s) \\
G_{\mathrm{R}}(s) &= \frac{G_{\mathrm{R2}}(s) G_{\mathrm{S2}}(s)}{1 + G_{\mathrm{R2}}(s) G_{\mathrm{S2}(s)} G_{\mathrm{M2}}(s)} \\
G_{\mathrm{S}}(s) &= 1 \\
G_{\mathrm{M}}(s) &= G_{\mathrm{R1}}(s)
\end{aligned}
$$

Alternative:

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{F}}(s) &= G_{\mathrm{R1}}(s) + G_{\mathrm{V1}}(s) \\
G_{\mathrm{R}}(s) &= G_{\mathrm{R2}}(s) \\
G_{\mathrm{S}}(s) &= \frac{G_{\mathrm{S2}}(s)}{1 + G_{\mathrm{R2}}(s) G_{\mathrm{S2}(s)} G_{\mathrm{M2}}(s)} \\
G_{\mathrm{M}}(s) &= G_{\mathrm{R1}}(s)
\end{aligned}
$$

Alternative:

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{F}}(s) &= G_{\mathrm{R1}}(s) + G_{\mathrm{V1}}(s) \\
G_{\mathrm{R}}(s) &= \frac{G_{\mathrm{R2}}(s)}{1 + G_{\mathrm{R2}}(s) G_{\mathrm{S2}(s)} G_{\mathrm{M2}}(s)} \\
G_{\mathrm{S}}(s) &= G_{\mathrm{S2}}(s) \\
G_{\mathrm{M}}(s) &= G_{\mathrm{R1}}(s)
\end{aligned}
$$

Alternative:

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{F}}(s) &= G_{\mathrm{R1}}(s) + G_{\mathrm{V1}}(s) \\
G_{\mathrm{R}}(s) &= \frac{1}{1 + G_{\mathrm{R2}}(s) G_{\mathrm{S2}(s)} G_{\mathrm{M2}}(s)} \\
G_{\mathrm{S}}(s) &= G_{\mathrm{R2}}(s) G_{\mathrm{S2}}(s) \\
G_{\mathrm{M}}(s) &= G_{\mathrm{R1}}(s)
\end{aligned}
$$

b) Bestimmen Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $W(s)$ und $D(s)$ und der Übertragungsglieder $G_{\mathrm{V1}}(s)$, $G_{\mathrm{R1}}(s)$, $G_{\mathrm{R2}}(s)$, $G_{\mathrm{S2}}(s)$ und $G_{\mathrm{M2}}(s)$! **(3 Punkte)**

Lösung:

$$Y(s) = G_{\mathrm{F}}(s)\frac{G_{\mathrm{R}}(s)G_{\mathrm{S}}(s)}{1+G_{\mathrm{R}}(s)G_{\mathrm{S}}(s)G_{\mathrm{M}}(s)}W(s) + \frac{1}{1+G_{\mathrm{R}}(s)G_{\mathrm{S}}(s)G_{\mathrm{M}}(s)}D(s)$$

$$Y(s) = \frac{(1+G_{\mathrm{R1}}^{-1}(s)G_{\mathrm{V1}}(s))G_{\mathrm{R1}}(s)G_{\mathrm{R2}}(s)G_{\mathrm{S2}}(s)}{1+G_{\mathrm{R2}}(s)G_{\mathrm{S2}}(s)G_{\mathrm{M2}}(s)+G_{\mathrm{R1}}(s)G_{\mathrm{R2}}(s)G_{\mathrm{S2}}(s)}W(s)+ \frac{1+G_{\mathrm{R2}}(s)G_{\mathrm{S2}}(s)G_{\mathrm{M2}}(s)}{1+G_{\mathrm{R2}}(s)G_{\mathrm{S2}}(s)G_{\mathrm{M2}}(s)+G_{\mathrm{R1}}(s)G_{\mathrm{R2}}(s)G_{\mathrm{S2}}(s)}D(s)$$

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ des umgeformten Systems mit $D(s) = 0$ und in Abhängigkeit der Übertragungsglieder $G_{\mathrm{V1}}(s)$, $G_{\mathrm{R1}}(s)$, $G_{\mathrm{R2}}(s)$, $G_{\mathrm{S2}}(s)$ und $G_{\mathrm{M2}}(s)$! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$G_1(s) = \frac{G_{\mathrm{R1}}(s)G_{\mathrm{R2}}(s)G_{\mathrm{S2}}(s)}{1+G_{\mathrm{R2}}(s)G_{\mathrm{S2}}(s)G_{\mathrm{M2}}(s)+G_{\mathrm{R1}}(s)G_{\mathrm{R2}}(s)G_{\mathrm{S2}}(s)}$$

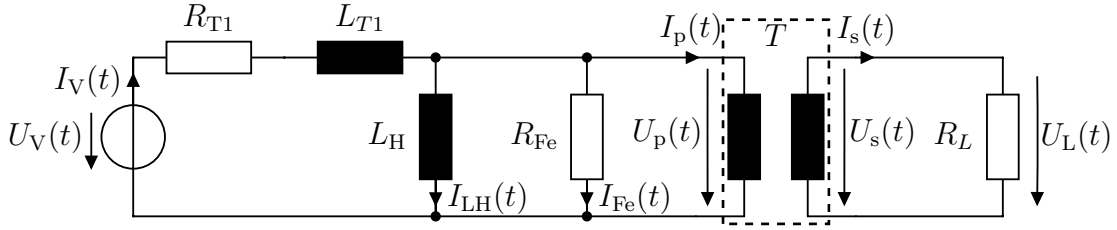
d) Hat die Übertragungsfunktion $G_{\mathrm{V1}}(s)$ Einfluss auf die Stabilität von $G_1(s)$? Begründen Sie Ihre Antwort! **(1 Punkt)**

Lösung:

Nein, da kein Einfluss auf Nennerpolynom von $G_1(s)$.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Eine Produktionsanlage ist über einen Manteltransformator an das öffentliche Mittelspannungsnetz angeschlossen. Dies wird durch folgendes Ersatzschaltbild (ESB) modelliert:



Da die Produktionsanlage, durch eine geschickte Auslegung, keine Blindleistung aufnimmt, wird sie im ESB durch den idealen ohmschen Widerstand R_{L} repräsentiert. Das öffentliche Mittelspannungsnetz wird durch eine ideale Spannungsquelle (U_{V}, I_{V}) und der Transformator zwischen Netz und Anlage durch die restlichen Elemente des ESB modelliert.
Alle Widerstände und Induktivitäten des ESB sind konstant. Das Verhalten des umrahmten Elements T wird durch folgende Gleichungen beschrieben

$$U_s(t) = nU_{\mathrm{p}}(t), \quad I_{\mathrm{s}}(t) = \frac{I_{\mathrm{p}}(t)}{n},$$

wobei n ebenfalls konstant ist.

a) Geben Sie die Systemordnung für das gegebene ESB und eine Wahl physikalisch sinnvoller Zustände an! **(2 Punkte)**

Lösung:

System 2. Ordnung

$$x_1 = I_{\mathrm{LT1}}$$
$$x_2 = I_{\mathrm{LH}}$$

b) Ist das gegebene Modell linear? Begründen Sie Ihre Antwort! **(1 Punkt)**

Lösung:

Ja, da nur lineare Komponenten verwendet werden.

c) Geben Sie das Modell bzw. die Modellgleichungen des oben gezeigten ESB in Zustandsraumdarstellung an. Hierbei ist $U_\mathrm{V}(t)$ der Systemeingang und $U_\mathrm{L}(t)$ der Systemausgang. Verwenden Sie dabei die Abkürzungen $\alpha = \frac{R_\mathrm{L}}{n^2}$ und $\beta = 1 + \frac{R_\mathrm{L}}{n^2 R_\mathrm{Fe}}$.
Hinweis: Es ist hilfreich $I_\mathrm{p}(t)$ temporär als Hilfsgröße zu verwenden! **(5 Punkte)**

Lösung:

Aufstellen der Maschen- und Knotengleichungen für das ESB des öffentlichen Mittelspannungsnetzes:

$$\begin{aligned}
U_\mathrm{V} &= U_\mathrm{RT1} + U_\mathrm{LT1} + U_\mathrm{p} \\
U_\mathrm{p} &= U_\mathrm{LH} \\
U_\mathrm{LH} &= U_\mathrm{Fe} \Rightarrow U_\mathrm{p} = U_\mathrm{Fe} \\
I_\mathrm{V} &= I_\mathrm{RT1} = I_\mathrm{LT1} \\
I_\mathrm{LT1} &= I_\mathrm{LH} + I_\mathrm{Fe} + I_\mathrm{p} \Rightarrow I_\mathrm{Fe} = I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH} - I_\mathrm{p}
\end{aligned}$$

Umformen und Einsetzen der Spulen-Gleichungen für U_LT1 und U_LH:

$$\begin{aligned}
U_\mathrm{LT1} &= L_\mathrm{T1}\dot{I}_\mathrm{LT1} = U_\mathrm{V} - U_\mathrm{RT1} - U_\mathrm{p} = U_\mathrm{V} - U_\mathrm{RT1} - U_\mathrm{Fe} \\
&= L_\mathrm{T1}\dot{I}_\mathrm{LT1} = U_\mathrm{V} - R_\mathrm{T1}I_\mathrm{LT1} - R_\mathrm{Fe}(I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH} - I_\mathrm{p}) \\
U_\mathrm{LH} &= L_\mathrm{H}\dot{I}_\mathrm{LH} = U_\mathrm{Fe} = R_\mathrm{Fe}(I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH} - I_\mathrm{p})
\end{aligned}$$

Die Gleichungen für die Produktionsanlage lauten:

$$\begin{aligned}
U_\mathrm{s} &= U_\mathrm{L} = R_\mathrm{L}I_\mathrm{s} = R_\mathrm{L}\frac{I_\mathrm{p}}{n} = U_\mathrm{p}n \\
I_\mathrm{p} &= \frac{U_\mathrm{p}}{R_\mathrm{L}}n^2 = \frac{1}{\alpha}U_\mathrm{p} = \frac{1}{\alpha}U_\mathrm{FE} = \frac{R_\mathrm{Fe}}{\alpha}(I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH} - I_\mathrm{p}) \\
I_\mathrm{p} &= \frac{\alpha}{R_\mathrm{Fe} + \alpha}\frac{R_\mathrm{Fe}}{\alpha}(I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH}) = \frac{1}{\beta}(I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH})
\end{aligned}$$

Durch einsetzen der Gleichungen ineinander ergibt sich:

$$\begin{aligned}
L_\mathrm{T1}\dot{I}_\mathrm{LT1} &= U_\mathrm{V} - R_\mathrm{T1}I_\mathrm{LT1} - R_\mathrm{Fe}\left(I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH} - \frac{1}{\beta}(I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH})\right) \\
\dot{I}_\mathrm{LT1} &= \frac{1}{L_\mathrm{T1}}U_\mathrm{V} + \frac{1}{L_\mathrm{T1}}\left(\frac{R_\mathrm{Fe}}{\beta} - R_\mathrm{Fe} - R_\mathrm{T1}\right)I_\mathrm{LT1} + \frac{1}{L_\mathrm{T1}}\left(-\frac{R_\mathrm{Fe}}{\beta} + R_\mathrm{Fe}\right)I_\mathrm{LH} \\
L_\mathrm{H}\dot{I}_\mathrm{LH} &= R_\mathrm{Fe}(I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH} - \frac{1}{\beta}(I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH})) \\
\dot{I}_\mathrm{LH} &= \frac{1}{L_\mathrm{H}}\left(-\frac{R_\mathrm{Fe}}{\beta} + R_\mathrm{Fe}\right)I_\mathrm{LT1} + \frac{1}{L_\mathrm{H}}\left(\frac{R_\mathrm{Fe}}{\beta} - R_\mathrm{Fe}\right)I_\mathrm{LH}
\end{aligned}$$

Für den Ausgang gilt:

$$U_\mathrm{L} = R_\mathrm{L} I_\mathrm{s} = R_\mathrm{L} \frac{I_\mathrm{p}}{n} = \frac{R_\mathrm{L}}{\beta n} (I_\mathrm{LT1} - I_\mathrm{LH})$$

Zusammengefasst lässt sich das System somit beschreiben als

$$u = U_\mathrm{V}, \quad y = U_\mathrm{L}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\mathrm{T1}} \left(\frac{R_\mathrm{Fe}}{\beta} - R_\mathrm{Fe} - R_\mathrm{T1} \right) & \frac{1}{L_\mathrm{T1}} \left(-\frac{R_\mathrm{Fe}}{\beta} + R_\mathrm{Fe} \right) \\ \frac{1}{L_\mathrm{H}} \left(-\frac{R_\mathrm{Fe}}{\beta} + R_\mathrm{Fe} \right) & \frac{1}{L_\mathrm{H}} \left(\frac{R_\mathrm{Fe}}{\beta} - R_\mathrm{Fe} \right) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\mathrm{T1}} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{R_\mathrm{L}}{\beta n} & -\frac{R_\mathrm{L}}{\beta n} \end{bmatrix} x$$

Aufgabe 5: (12 Punkte)

Gegeben sei das lineare System

$$\Sigma_5: \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ a & -2b \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad \underline{x}(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Zur Identifikation der Parameter a und b wird der Systemausgang $y(t)$ für die Anfangsbedingungen $\underline{x}_0 = [1\ 0]^{\mathrm{T}}$ gemessen. Hierbei gilt für den Eingang $u(t) \equiv 0$. Das gemessene Signal lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben

$$y(t) = 5\mathrm{e}^{-t} \sin(t)\,.$$

a) Was lässt sich basierend auf diesem Signal über die Eigenwerte und die Stabilität des Systems sagen? **(2 Punkte)**

Lösung:

Aus dem Signal lässt sich (z.B mit Laplace-Trafo) ablesen, dass die EW bei $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ liegen. Somit ist das System asymptotisch stabil.

b) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b! **(4 Punkte)** Hinweis: Es ist nicht notwendig die allgemeine Lösung $y(t)$ zu berechnen.

Lösung:

Charakteristische Gleichung (1 Punkt):

$$\det(sI - A) = (s-2)(s+2b) + 2a = s^2 + 2(b-1)s + 2(a-2b) \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte (1 Punkt):

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 - 2(a-2b)} \\ &= 1 - b \pm \sqrt{(b+1)^2 - 2a} \\ &= \sigma \pm \omega i \end{aligned}$$

Es muss also

$$\sigma = 1 - b \stackrel{!}{=} -1 \Rightarrow b = 2$$
$$\omega = \sqrt{2a - (b+1)^2} = \sqrt{2a - 9} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow a = 5$$

gelten.

Alternative mit Koeffizientenvergleich des char. Polynoms:

$$(s-2)(s+2b)+2a = s^2+2(b-1)s+2(a-2b) \stackrel{!}{=} s^2+2s+2$$
$$2(b-1) \stackrel{!}{=} 2 \Rightarrow b = 2$$
$$2(a-2b) = 2(a-4) \stackrel{!}{=} 2 \Rightarrow a = 5$$

c) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} durch Laplace-Transformation! Falls Sie im Aufgabenteil keine Lösung gefunden haben, rechnen Sie mit $a = 1$ und $b = 0$ weiter. **(6 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{At} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s-2 & 2 \\ -5 & s+4 \end{bmatrix}^{-1}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{bmatrix} s+4 & -2 \\ 5 & s-2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+2s+2}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s^2+2s+2}\right\} \\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+2s+2}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2+2s+2}\right\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}\left(\cos(t)+3\sin(t)\right) & -2\mathrm{e}^{-t}\sin(t) \\ 5\mathrm{e}^{-t}\sin(t) & \mathrm{e}^{-t}\left(\cos(t)-3\sin(t)\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} \stackrel{(18)}{=} \mathrm{e}^{-t}\sin(t)$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\} \stackrel{(19)}{=} \mathrm{e}^{-t}\cos(t)$$

Oder mit den gegeben Werten für a und b:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{At} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s-2 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+2}\begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+2}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s^2-2s+2}\right\} \\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+2}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2-2s+2}\right\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t\left(\cos(t)+\sin(t)\right) & -2\mathrm{e}^t\sin(t) \\ \mathrm{e}^t\sin(t) & \mathrm{e}^t\left(\cos(t)-\sin(t)\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} \overset{(18)}{=} \mathrm{e}^t\sin(t)
$$

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\} \overset{(19)}{=} \mathrm{e}^t\cos(t)
$$

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\dddot{y} + 13\ddot{y} + 52\dot{y} + 60y = \ddot{u} + 7\dot{u} + 12u,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1\,,\ \dot{y}(0) = 1\,,\ \ddot{y}(0) = 1\,,\ u(0) = 0\,,\ \dot{u}(0) = 0\,,$$

beschrieben.

a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 13s^2 + 52s + 60}U(s) + \frac{s^2 + 14s + 66}{s^3 + 13s^2 + 52s + 60}$$

Ein Punkt für Übertragungsfunktion und ein Punkt für Anfangsbedingungen.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! **(1 Punkt)**

Lösung:

$$G(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 13s^2 + 52s + 60}$$

c) Ermitteln Sie die Sprungantwort $h(t)$! Hinweis: Eine Polstelle befindet sich bei $s_1 = -2$! **(4 Punkte)**

Lösung:

$$s^3 + 13s^2 + 52s + 60 : (s+2) = s^2 + 11s + 30 = (s+5)(s+6)$$

$$\frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 13s^2 + 52s + 60} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+5)} + \frac{C}{(s+6)}$$

$$A + B + C = 1$$

$$11A + 8B + 7C = 7$$

$$30A + 12B + 10C = 12$$

$$A = \frac{1}{6} \qquad B = -\frac{2}{3} \qquad C = \frac{3}{2}$$

$$g(t) = \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} + \frac{3}{2}e^{-6t}$$

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$$

$$h(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t} - \frac{1}{4}e^{-6t}$$

d) Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ für $u(t) = \sigma(t)$, wobei $\sigma(t)$ der Sprungfunktion entspricht! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 7: (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = 100\frac{(s^2+5s)(s-2)}{(25s^2+10s+16)(s+50)} \, .$$

a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme niedrigster Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar)! **(3 Punkte)**

Lösung:

Für den Zähler gilt (1 Punkt):

$$(s^2+5s)(s-2) = s(s+5)(s-2)$$

Der Nenner lässt sich nicht weiter zerlegen, da komplexes Poolpaar bei $s_{1,2} = -0.2 \pm \sqrt{0.6}i$. *Jedoch muss der Faktor* 25 *ausgeklammert werden*

$$(25s^2+10s+16)(s+50) = 25\left(s^2+\frac{2}{5}s+\frac{16}{25}\right)\left(s+50\right) \, .$$

Damit ergibt sich die Faktorisierung zu

$$G(s) = 4 \cdot s^1 \cdot (s-2) \cdot (s+5) \cdot \frac{1}{s^2+\frac{2}{5}s+\frac{16}{25}} \cdot \frac{1}{s+50}$$

b) Berechnen Sie Frequenz-, Amplituden- und Phasengang von $G_7(s)$!
Hinweis: Verwenden Sie die faktorisierte Übertragungsfunktion! **(5 Punkte)**

Lösung:

Der Frequenzgang lautet (entweder mit Ergebnis aus Teil a) oder direkt aus Übertragungsfunktion) (1 Punkt):

$$G_7(j\omega) = 100 \cdot \frac{\omega j(-2+\omega j)(5+\omega j)}{(50+\omega j)(16-25\omega^2+10\omega j)}$$

Für den Amplitudengang ergibt sich (2 Punkte):

$$|G_7(j\omega)| = \frac{100\omega\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{25+\omega^2}}{\sqrt{2500+\omega^2}\sqrt{(16-25\omega^2)^2+100\omega^2}}$$

Für den Phasengang ergibt sich (2 Punkte):

$$\angle G_7(j\omega) = \frac{\pi}{2} + \pi - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{50}\right) - \phi(\omega)$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{10\omega}{16-25\omega^2}\right) & \omega < \dfrac{4}{5} \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{10\omega}{16-25\omega^2}\right) & \omega \geq \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten! **(4 Punkte)**

Lösung:

Die Übertragungsfunktion besitzt Nullstellen bei $n_0 = 0$, $n_1 = 2$ *und* $n_2 = -5$ *und Polstellen bei* $p_3 = -50$ *sowie ein komplex konj. Polpaar mit Knickfrequenz bei* $q_4 = 0.8$ *und* $D_4 q_4 = 0.4 > 0$. $\Rightarrow \omega_{\min} = 0.8$

Des weiteren gilt $c = 4$, $r = 1$ *und* $G^*(0) = \dfrac{-10}{32} = -\dfrac{5}{16}$

Amplitudengang:

Die Startamplitude ergibt sich zu

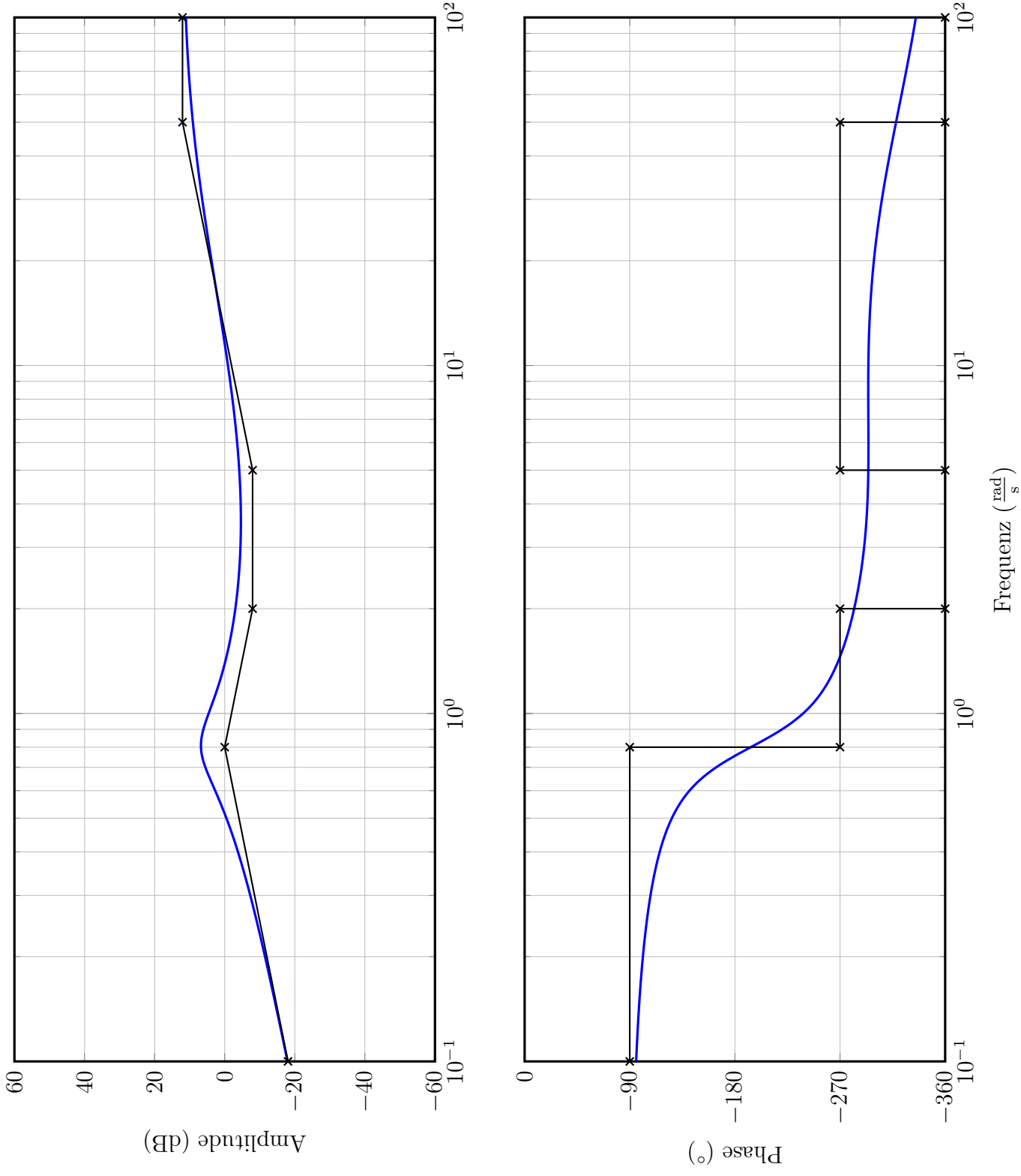
$$A_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(\left|4 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right)\right| \cdot \frac{4}{5}\right) = 20 \cdot \log_{10}(1) = 0$$

Links davon steigt der fällt die Amplitude mit 20 *dB/Dekade.*

Phasengang: Die Phase bei $\omega = 0$ *berechnet sich zu*

$$c \cdot G^*(0) = 4 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right) = -\frac{5}{4} < 0$$
$$\Rightarrow \phi(0) = 90^\circ - 1 \cdot 180^\circ = -90^\circ$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart



Punkte für Aufgabe 1: 27 von 27

Punkte für Aufgabe 2: 12 von 12

Punkte für Aufgabe 3: 10 von 10

Punkte für Aufgabe 4: 8 von 8

Punkte für Aufgabe 5: 12 von 12

Punkte für Aufgabe 6: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 7: 12 von 12

Insgesamt vergebene Punkte: 90 von 90