Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (27 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Welche Eigenschaften erfüllt das System $\dot{x} + x^3 = a(t) \cdot u$, $a \in \mathbb{R}$, $u = u(t)$, $t > t_0$? **(1 Punkt)**
- ☐ Es ist linear.
- ☒ Es ist zeitvariant.
- ☐ Es hat PT2-Verhalten.

b) Ist ein Totzeitglied linear? **(1 Punkt)**
- ☒ Ja
- ☐ Nein

c) Welche der folgenden Differentialgleichungen werden durch $y(t) = \sin(\omega t)$ erfüllt? **(2 Punkte)**
- ☐ $\ddot{y} - \omega^2 y = u$ mit $u(t) = \sigma(t)$.
- ☒ $\ddot{y} = -\omega^2 y$.
- ☒ $\dddot{y} + \omega^2 \dot{y} = 0$.

d) Was ist der Phasengang einer I_2-Strecke (Doppelintegrator)? **(1 Punkt)**
- ☒ $\varphi(\omega) = \pi$
- ☐ $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{2}\omega\right) - \frac{\pi}{2}$
- ☒ $\varphi(\omega) = -\pi$
- ☐ $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

e) Welche Aussage über Impulsantwort $g(t)$ der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s^2 + s + 4}{s^3 + 2s^2 + 0.5s}$$

trifft zu? **(2 Punkte)**
- ☒ $\lim_{t\to\infty} g(t) = 8$
- ☒ $\lim_{t\to 0} g(t) = 2$
- ☐ $\lim_{t\to\infty} g(t) = 4$

f) Bei welchen Verschaltungsarten können die Pole des Gesamtsystems von den Polen der Einzelsysteme abweichen? **(1 Punkt)**

- ☐ Reihenschaltung
- ☐ Parallelschaltung
- ☒ Rückführung

g) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion eines Systems 3. Ordnung

$$G(s) = -\frac{s-1}{24s^3 + 12s^2 + 10s + 4}$$

auf asymptotische Stabilität! **(2 Punkte)**

- ☒ Sie ist asymptotisch stabil.
- ☐ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

Lösung:

Die Vorzeichenbedingung ist erfüllt. Die 1. BWB lautet $10 \cdot 12 = 120 > 24 \cdot 4 = 96$ *und ist erfüllt. Damit ist das System asymptotisch stabil.*

h) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$$G_1(s) = \frac{s^2 - 3s - 10}{4(s+4)^2(s-2)^2} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_1(\omega) = \boxed{-180°} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$G_2(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 5s + 3}{s^2 + 5s} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi_2(\omega) = \boxed{90°} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in $\frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$$G_3(s) = \frac{s^2 - 3s - 10}{4(s+4)^2(s-2)^2} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{dA_3(\omega)}{d\omega} = \boxed{-40\,\frac{\text{dB}}{\text{dec}}} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$G_4(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 5s + 3}{s^2 + 5s} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} = \boxed{20\,\frac{\text{dB}}{\text{dec}}} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

j) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = \sin(0.5t) - \mathrm{e}^{-2t}$, das mit der Funktion $u(t) = \sigma(t)$ angeregt wird! **(2 Punkte)**

- ☐ $y(t) = 0.5\left(\cos(0.5t) - \mathrm{e}^{-2t}\right)$
- ☒ $y(t) = 0.5\left(\mathrm{e}^{-2t} + 3 - 4\cos(0.5t)\right)$
- ☐ $y(t) = -2\cos(0.5t) - 0.5\mathrm{e}^{-2t} + 1.5$
- ☐ $y(t) = -2\cos(0.5t) + 0.5\mathrm{e}^{-2t} - 0.5$
- ☐ $y(t) = 2\left(\mathrm{e}^{-2t} - \cos(0.5t)\right)$
- ☐ $y(t) = 2\left(\cos(0.5t) - \mathrm{e}^{-2t} - 1\right)$

k) Gegeben sei das nichtlineare System des *Lorenz-Attraktors*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1\\ \dot{x}_2 &= x_1(2 - x_3) - x_2\\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - 4x_3\,.\end{aligned}$$

Dieses System besitzt eine Ruhelage bei $\underline{x}_{0,1} = [0,\ 0,\ 0]^T$.

(i) Besitzt das System weitere Ruhelagen und wenn ja, wo liegen diese? **(2 Punkte)**

- ☐ Es gibt keine weiteren Ruhelagen.
- ☐ $\underline{x}_{0,2} = [-1,\ -1,\ 0.25]^T$ und $\underline{x}_{0,3} = [1,\ 1,\ 0.25]^T$
- ☐ $\underline{x}_{0,2} = \left[2\sqrt{3}i,\ -2\sqrt{3}i,\ 3\right]^T$ und $\underline{x}_{0,3} = \left[-2\sqrt{3}i,\ 2\sqrt{3}i,\ 3\right]^T$
- ☒ $\underline{x}_{0,2} = [2,\ 2,\ 1]^T$ und $\underline{x}_{0,3} = [-2,\ -2,\ 1]^T$
- ☐ $\underline{x}_{0,2} = [2,\ 2,\ 1]^T$ und $\underline{x}_{0,3} = [2,\ 2,\ -1]^T$

(ii) Wie lautet die um die Ruhelage $\underline{x}_{0,1} = [0,\ 0,\ 0]^T$ linearisierte Zustandsraumdarstellung des Systems? **(2 Punkte)**

☒ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\Delta\underline{x}$ ☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\Delta\underline{x}$

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\Delta\underline{x}$ ☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\Delta\underline{x}$

(iii) Was lässt sich über die Stabilität des linearisierten Systems sagen? **(1 Punkt)**

- ☐ Keine Aussage möglich.
- ☐ Es ist grenzstabil.
- ☐ Es ist asymptotisch stabil.
- ☒ Es ist instabil.

l) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Ortskurven (Abbildung 1) sowie Sprungantworten (Abbildung 2) zu! **(4 Punkte)**

Übertragungsfunktion	Ortskurve				Sprungantwort			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
$G_1(s) = \frac{4}{s(s^3+7s^2+3s)}$	☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐
$G_2(s) = \frac{2s^2+s}{s^2+2s+1}$	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☒
$G_3(s) = \frac{(s+8)(s+3)}{(s+4)(s+6)}$	☐	☐	☒	☐	☐	☒	☐	☐
$G_4(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+5}$	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

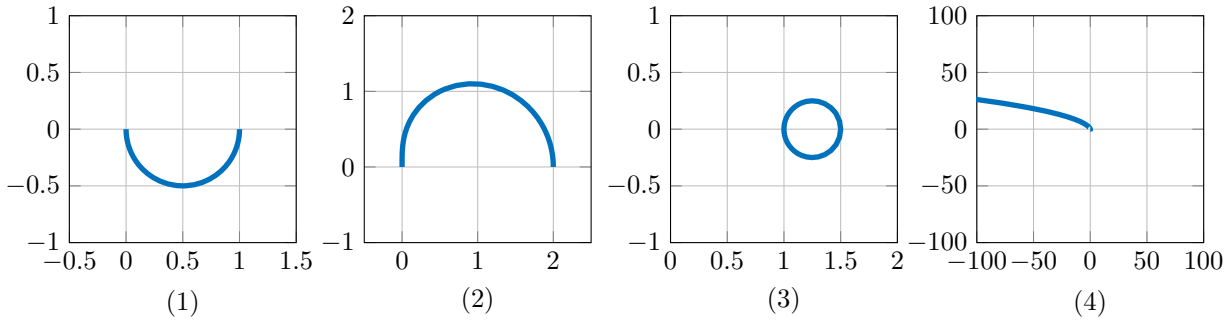


Abbildung 1: Ortskurven der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

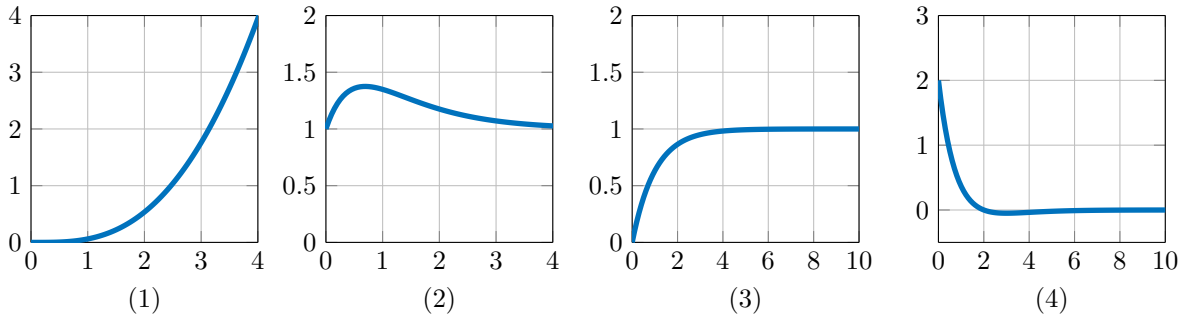
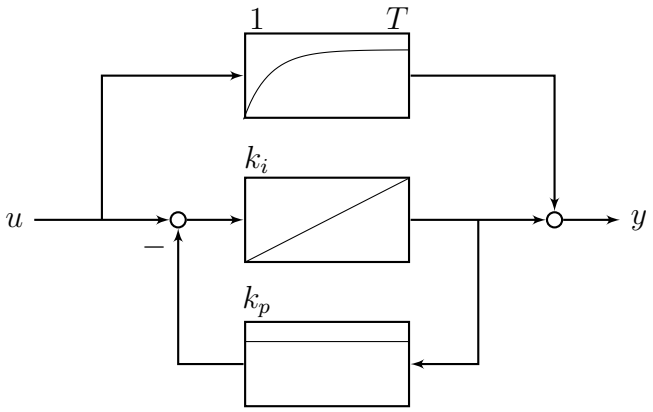


Abbildung 2: Sprungantworten der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

m) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ des folgenden Blockschaltbilds! **(2 Punkte)**



☐ $G(s) = \dfrac{(k_iT+1)s + k_ik_p}{Ts^2 + (k_ik_pT+1)s + k_i}$

☐ $G(s) = \dfrac{k_iTs + k_i}{Ts^2 + (k_ik_pT+1)s + k_i}$

☒ $G(s) = \dfrac{(k_iT+1)s + k_ik_p + k_i}{Ts^2 + (k_ik_pT+1)s + k_ik_p}$

☐ $G(s) = \dfrac{(k_iT+1)s + k_i}{Ts^2 + k_ik_pTs + k_ik_p}$

☐ $G(s) = \dfrac{k_iTs + k_ik_p}{Ts^2 + k_ik_pTs + k_i}$

☐ $G(s) = \dfrac{k_iTs + k_ik_p + k_i}{Ts^2 + (k_ik_pT+1)s + k_ik_p}$

Aufgabe 2: (11 Punkte)

Gegeben sei das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + x_1 &= u \\ 2\dot{x}_2 + x_2 + \dot{x}_1 + ax_1 &= 2u \ , \end{aligned}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Stellen Sie die Zustandsraumdarstellung mit den Zuständen $\underline{x} = [x_1,\ x_2]^T$ und dem Ausgang $y = x_1$ auf indem Sie die Gleichung nach $\underline{\dot{x}} = [\dot{x}_1,\ \dot{x}_2]^T$ auflösen! **(3 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - \dot{x}_2 + u \\ \Rightarrow 2\dot{x}_2 + x_2 - x_1 - \dot{x}_2 + u + ax_1 &= 2u \\ \Rightarrow \dot{x}_2 &= (1-a)x_1 - x_2 + u \\ \Rightarrow \dot{x}_1 &= -x_1 - (1-a)x_1 + x_2 - u + u = (a-2)x_1 + x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{\dot{x}} &= \begin{bmatrix} -(2-a) & 1 \\ (1-a) & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

b) Für welche Werte von a ist das System asymptotisch stabil? **(2 Punkte)**

Lösung:

Charakteristisches Polynom:

$$\det(sI - A) = (s + (2-a))(s+1) - (1-a) = s^2 + (3-a)s + 1$$

Nach Hurrwitz ist das System asymptotisch stabil für $a < 3$

c) Es sei nun $a = 3$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! **(4 Punkte)**

Lösung:

$$G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+1}$$

d) Berechnen Sie den Ausgang $y(t)$, wenn am Eingang die Sprungfunktion $u(t) = \sigma(t)$ anliegt? Es gelte weiterhin $a = 3$! **(2 Punkte)**

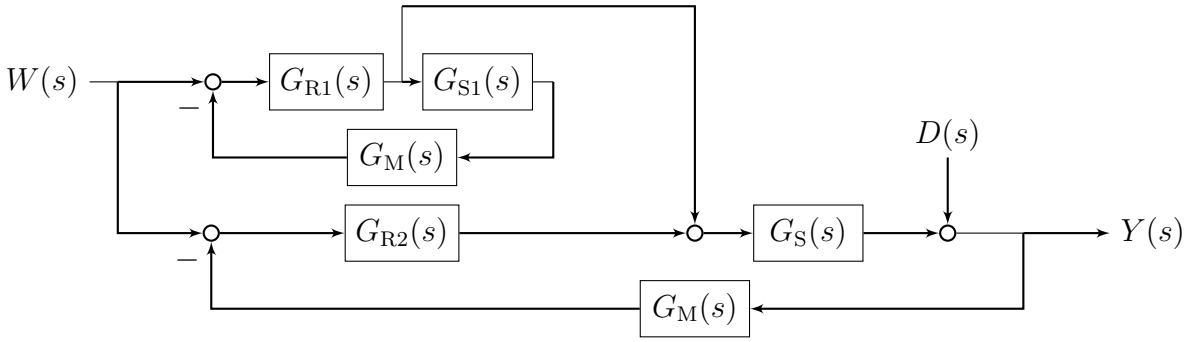
Lösung:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$y(t) = 1 - cos(t) \quad \textit{Direkt aus Laplace-Tabelle Zeile 21}$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\frac{Y(s)}{W(s)}$. Nehmen Sie $D(s) = 0$ an. **(4 Punkte)**

Lösung:

$$Y(s) = \frac{G_\mathrm{S}G_\mathrm{I} + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2}}{1 + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2}G_\mathrm{M}}W(s)$$
$$G_\mathrm{I} = \frac{G_\mathrm{R1}}{1 + G_\mathrm{R2}G_\mathrm{M}G_\mathrm{S1}}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_\mathrm{S}G_\mathrm{R1} + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2} + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2}G_\mathrm{R1}G_\mathrm{S1}G_\mathrm{M}}{(1 + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2}G_\mathrm{M})(1 + G_\mathrm{R1}G_\mathrm{S1}G_\mathrm{M})}$$

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\frac{Y(s)}{D(s)}$. Nehmen Sie $W(s) = 0$ an. **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2}G_\mathrm{M}}$$

c) Geben Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $W(s)$ und $D(s)$ an. **(2 Punkte)**

Lösung:

$$Y(s) = \frac{G_\mathrm{S}G_\mathrm{R1} + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2} + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2}G_\mathrm{R1}G_\mathrm{S1}G_\mathrm{M}}{(1 + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2}G_\mathrm{M})(1 + G_\mathrm{R1}G_\mathrm{S1}G_\mathrm{M})}W(s) + \frac{1}{1 + G_\mathrm{S}G_\mathrm{R2}G_\mathrm{M}}D(s)$$

Aufgabe 4: (13 Punkte)

Zur Regelung eines Kippspiegels soll ein mechanisches Ersatzmodell erstellt werden. Dazu wird der Spiegel, wie in Abbildung 3 dargestellt, vereinfacht. Ein starrer Körper mit der Masse m und dem Trägheitsmoment J ist an zwei Punkten mit einem Los- und Festlager mit einem Feder-Dämpfer-System verbunden, welches fest eingespannt ist. Die Schwerkraft wird in der Modellierung nicht berücksichtigt. An den Lagerpunkten werden die äußeren Kräfte F_1 und F_2 angelegt, um den Spiegel bewegen zu können.

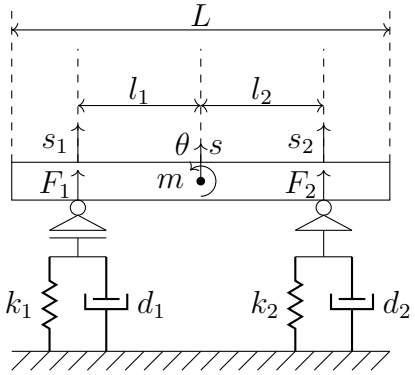


Abbildung 3: Mechanisches Modell des Kippspiegels.

a) Bestimmen Sie die Verschiebungen s_1 und s_2 an den beiden Lagerpunkten in Abhängigkeit der Translation s und Rotation θ. Nehmen Sie dazu die Kleinwinkelnäherung an! **(3 Punkte)**

Lösung:

$$s_1 = s - l_1 \tan\theta \approx s - l_1\theta$$
$$s_2 = s + l_2 \tan\theta \approx s + l_2\theta$$

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Translation s und die Rotation θ auf. Verwenden Sie dazu den Impuls- und Drallsatz! **(4 Punkte)**

Lösung:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{s} &= F_{\mathrm{F1}} + F_{\mathrm{F2}} + F_1 + F_2 \\
J\ddot{\theta} &= -F_{\mathrm{F1}} l_1 + F_{\mathrm{F2}} l_2 - F_1 l_1 + F_2 l_2 \\
F_{\mathrm{F1}} &= -k_1 s_1 - d_1 \dot{s_1} = -k_1 s + k_1 l_1 \theta - d_1 \dot{s} + d_1 l_1 \dot{\theta} \\
F_{\mathrm{F2}} &= -k_2 s_2 - d_2 \dot{s_2} = -k_2 s - k_2 l_2 \theta - d_2 \dot{s} - d_2 l_2 \dot{\theta} \\
m\ddot{s} &= -(k_1 + k_2)x - (d_1 + d_2)\dot{s} + (k_1 l_1 - k_2 l_2)\theta + (d_1 l_1 - d_2 l_2)\dot{\theta} + F_1 + F_2 \\
J\ddot{\theta} &= (k_1 l_1 - k_2 l_2)s + (k_2 l_2^2 - k_1 l_1^2)\theta + (d_1 l_1 - d_2 l_2)\dot{s} + (d_2 l_2^2 - d_1 l_1^2)\dot{\theta} + l_1 F_1 + l_2 F_2
\end{aligned}
$$

c) Bestimmen Sie die Ruhelage des Systems für $F_1 = F_2 = 0$! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$
\begin{aligned}
0 &= -(k_1 + k_2)s^* + (k_1 l_1 - k_2 l_2)\theta^* \\
0 &= (k_1 l_1 - k_2 l_2)s^* + (k_2 l_2^2 - k_1 l_1^2)\theta^*
\end{aligned}
$$

$$
s^* = 0 \qquad \theta^* = 0
$$

d) Überführen Sie die Bewegungsgleichungen in ein Zustandsraummodell mit dem Ausgang $y = s_1$, wobei s_1 der Verschiebung am Lagerpunkt 1 entspricht. Verwenden Sie die Zustände $x_1 = s$, $x_2 = \dot{s}$, $x_3 = \theta$ und $x_4 = \dot{\theta}$! **(3 Punkte)**

Lösung:

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1+k_2)}{m} & \frac{-(d_1+d_2)}{m} & \frac{(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{m} & \frac{(d_1 l_1 - d_2 l_2)}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{J} & \frac{(d_1 l_1 - d_2 l_2)}{J} & \frac{(k_2 l_2^2 - k_1 l_1^2)}{J} & \frac{(d_2 l_2^2 - d_1 l_1^2)}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{-l_1}{J} & \frac{l_2}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}
$$

$$
y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_1 & 0 \end{bmatrix} x
$$

e) Ist das System asymptotisch stabil? Bedenken Sie den mechanischen Aufbau! **(1 Punkt)**

Lösung:

Ja, da gedämpftes System.

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare System Σ_5

$$\Sigma_5: \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} \, .$$

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems! **(3 Punkte)**

Lösung:

Charakteristische Gleichung (1 Punkt):

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda + 4) + 1 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte (1 Punkt) (kann man auch direkt sehen):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-6 \pm 0}{2} = \frac{-6}{2}$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -3$$

Für den Eigenwert $\lambda_1 = -3$ ergibt sich folgender Eigenvektor v_1 (1 Punkt):

$$(A - \lambda_1 I) v_1 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Ist das System diagonalisierbar? Begründen Sie! **(1 Punkt)**

Lösung:

Nein, da der doppelte Eigenwert $\lambda_{1,2} = -3$ die geometrische Vielfachheit $p_1 = 1$ besitzt.

c) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} durch Ähnlichkeitstransformation! **(6 Punkte)**

Lösung:

Zur Berechnung der Transformationsmatrix V wird noch der Hauptvektor $v_{1,2}$ benötigt. Dazu wählt man $v_{1,1} = v_1$ und berechnet (1 Punkt)

$$(A - \lambda_1 I) v_{1,2} \stackrel{!}{=} v_{1,1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich (2 Punkte)

$$V = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Zur Berechnung der Transitionsmatrix benötigt man die Transitionsmatrix eines Jordanblocks $J_1 \in \mathrm{R}^{2\times 2}$ mit doppeltem Eigenwert λ_1 (siehe Skript Seite 80)

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{e}^{J_1 t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & t\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

Damit lässt sich für die Transitionsmatrix e^{At} folgende Berechnungsvorschrift aufstellen (3 Punkte)

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{At} &= \underline{V} \mathrm{e}^{J_1 t} \underline{V}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & t\mathrm{e}^{-3t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t\mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-3t} - t\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)\mathrm{e}^{-3t} & -t\mathrm{e}^{-3t} \\ t\mathrm{e}^{-3t} & (1-t)\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\dddot{y} + 8\ddot{y} + 19\dot{y} + 12y = 6\ddot{u} + 29\dot{u} + 29u,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1\,,\ \dot{y}(0) = 0\,,\ \ddot{y}(0) = 3\,,\ u(0) = 0\,,\ \dot{u}(0) = 0\,,$$

beschrieben.

a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an! Beachten Sie die Anfangsbedingungen! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 29s + 29}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}U(s) + \frac{s^2 + 8s + 22}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

Ein Punkt für Übertragungsfunktion und ein Punkt für Anfangsbedingungen.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! **(1 Punkt)**

Lösung:

$$G(s) = \frac{6s^2 + 29s + 29}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

c) Ermitteln Sie die Impulsantwort $g(t)$! **(4 Punkte)**

Lösung:

$$\frac{6s^2+29s+29}{s^3+8s^2+19s+12} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+4)}$$

$$A+B+C = 6$$
$$7A+5B+4C = 29$$
$$12A+4B+3C = 29$$
$$A = 1 \qquad B = 2 \qquad C = 3$$

$$g(t) = e^{-1t} + 2e^{-3t} + 3e^{-4t}$$

d) Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} y(t)$ für $u(t) = \sigma(t)$! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{29}{12}$$

Aufgabe 7: (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = \frac{36s^2 + 396s + 360}{s^4 + 8s^3 + 27s^2 - 36s} .$$

a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme niedrigster Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konj. komplexen Polpaar)! Hinweis: Der Nenner besitzt eine Polstelle bei $s_1 = 1$ **(3 Punkte)**

Lösung:

Für den Zähler gilt (1 Punkt):

$$36s^2 + 396s + 360 = 36(s + 10)(s + 1)$$

Der Nenner lässt sich zunächst zerlegen in

$$s^4 + 8s^3 + 27s^2 - 36s = s(s^3 + 8s^2 + 27s - 36) .$$

Polynomdivision mit bekannter Polstelle $s_1 = 1$ führt dann auf die weitere Zerlegung (2 Punkte):

$$\begin{aligned}
s^3 + 8s^2 + 27s - 36 &= (s - 1)(s^2 + 9s + 36) \\
-\underline{s^3 + \ s^2} & \\
9s^2 + 27s & \\
-\underline{9s^2 + \ 9s} & \\
36s - 36 & \\
-\underline{36s + 36} & \\
0 &
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Faktorisierung zu

$$G(s) = 36 \cdot s^{-1} \cdot (s + 10) \cdot (s + 1) \cdot \frac{1}{s - 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 9s + 36}$$

b) Berechnen Sie Frequenz-, Amplituden- und Phasengang von $G_7(s)$!
Hinweis: Verwenden Sie die faktorisierte Übertragungsfunktion! **(5 Punkte)**

Lösung:

Der Frequenzgang lautet (entweder mit Ergebnis aus Teil a) oder direkt aus Übertragungsfunktion) (1 Punkt):

$$\begin{aligned} G_7(j\omega) &= 36 \cdot \frac{-\omega^2 + 11j\omega + 10}{\omega^4 - 8j\omega^3 - 27\omega^2 - 36j\omega} \\ &= 36 \cdot \frac{10 - \omega^2 + 11\omega j}{\omega^4 - 27\omega^2 - (8\omega^3 + 36\omega)j} \\ &= 36 \cdot \frac{(10 + \omega j)(1 + \omega j)}{j\omega(-1 + \omega j)(36 - \omega^2 + 9\omega j)} \end{aligned}$$

Für den Amplitudengang ergibt sich (2 Punkte):

$$|G_7(j\omega)| = \frac{36\sqrt{100 + \omega^2}\sqrt{1 + \omega^2}}{\omega\sqrt{1 + \omega^2}\sqrt{(36 - \omega^2)^2 + 81\omega^2}} = \frac{36\sqrt{100 + \omega^2}}{\omega\sqrt{(36 - \omega^2)^2 + 81\omega^2}}$$

Für den Phasengang ergibt sich (2 Punkte):

$$\begin{aligned} \angle G_7(j\omega) &= \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{1}\right) - \pi/2 - (\pi + \arctan\left(\frac{\omega}{-1}\right)) - \phi(\omega) \\ &= \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) + 2\arctan(\omega) - 3\pi/2 - \phi(\omega) \end{aligned}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{9\omega}{36 - \omega^2}\right) & \omega < 6 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{9\omega}{36 - \omega^2}\right) & \omega \geq 6 \end{cases}$$

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten! **(4 Punkte)**

Lösung:

Die Übertragungsfunktion besitzt stabile Nullstellen bei $n_1 = -1$ *und* $n_2 = -10$ *und Polstellen bei* $p_0 = 0$, $p_3 = 1$ *sowie ein komplex konj. Polpaar mit Knickfrequenz bei* $q_4 = 6$ *und* $D_4 q_4 = 4.5 > 0$. $\Rightarrow \omega_{\min} = 1$

Des weiteren gilt $c = 1$, $r = -1$ *und* $G^*(0) = -36\frac{5}{18} = -10$

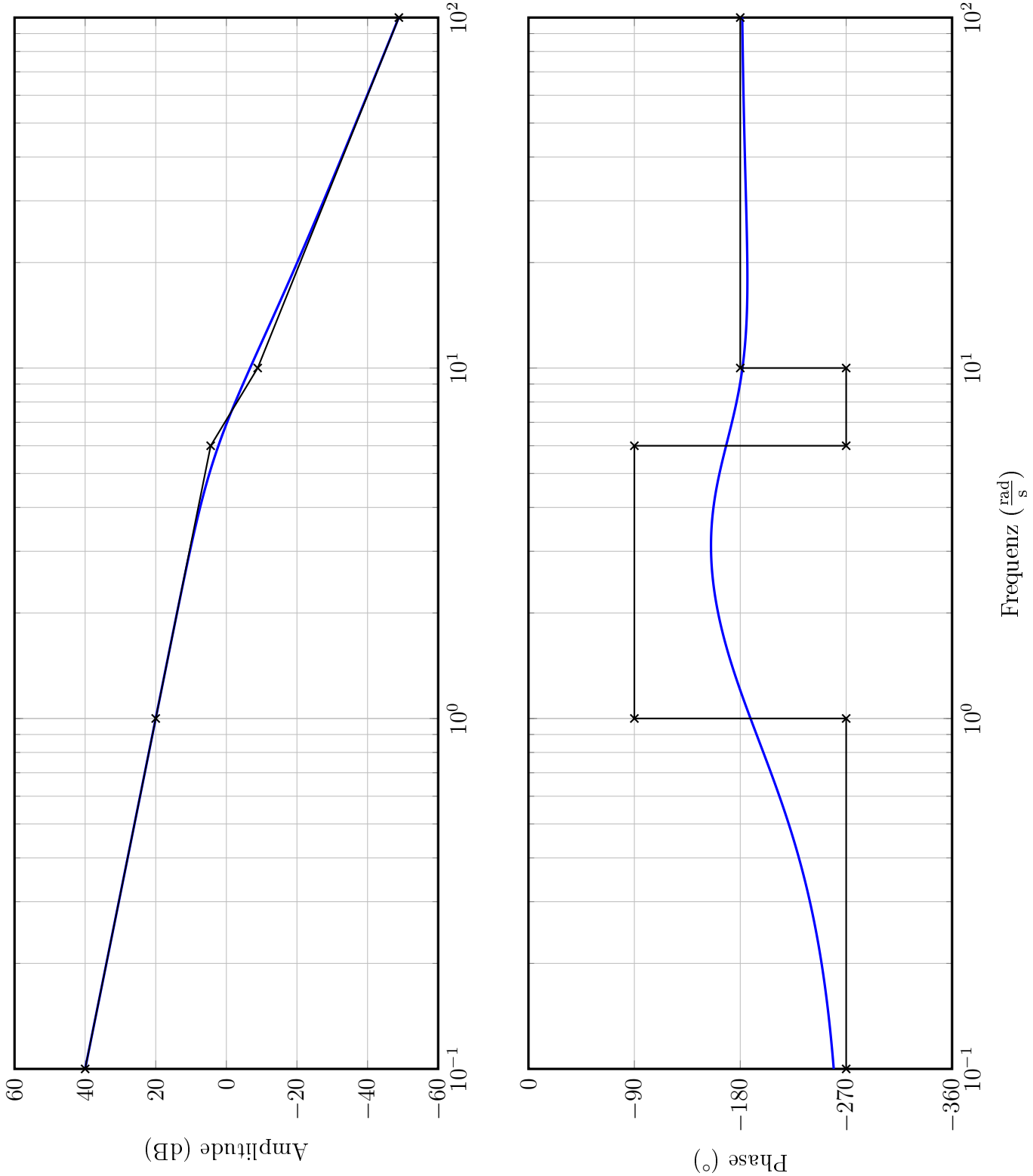
Amplitudengang:

Die Startamplitude ergibt sich zu

$$A_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(|1 \cdot (-10)| \cdot 1^{-1}\right) = 20 \cdot \log_{10}(10) = 20$$

Links davon steigt der fällt die Amplitude mit -20 *dB/Dekade. Bei* $w = 1$ *knickt der Amplitudengang sowohl nach oben als auch nach unten.*

Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart



Punkte für Aufgabe 1: 27 von 27

Punkte für Aufgabe 2: 11 von 11

Punkte für Aufgabe 3: 8 von 8

Punkte für Aufgabe 4: 13 von 13

Punkte für Aufgabe 5: 10 von 10

Punkte für Aufgabe 6: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 7: 12 von 12

Insgesamt vergebene Punkte: 90 von 90