Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (27 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Welche Eigenschaften erfüllt das System $\dot{x} + x^3 = a(t) \cdot u$, $a \in \mathbb{R}$, $u = u(t)$, $t > t_0$? (1 Punkt)
- ☐ Es ist linear.
- ☐ Es ist zeitvariant.
- ☐ Es hat PT2-Verhalten.

b) Ist ein Totzeitglied linear? (1 Punkt)
- ☐ Ja
- ☐ Nein

c) Welche der folgenden Differentialgleichungen werden durch $y(t) = \sin(\omega t)$ erfüllt? (2 Punkte)
- ☐ $\ddot{y} - \omega^2 y = u$ mit $u(t) = \sigma(t)$.
- ☐ $\ddot{y} = -\omega^2 y$.
- ☐ $\dddot{y} + \omega^2 \dot{y} = 0$.

d) Was ist der Phasengang einer I_2-Strecke (Doppelintegrator)? (1 Punkt)
- ☐ $\varphi(\omega) = \pi$
- ☐ $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{2}\omega\right) - \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\varphi(\omega) = -\pi$
- ☐ $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

e) Welche Aussage über Impulsantwort $g(t)$ der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s^2 + s + 4}{s^3 + 2s^2 + 0.5s}$$

trifft zu? (2 Punkte)
- ☐ $\lim_{t\to\infty} g(t) = 8$
- ☐ $\lim_{t\to 0} g(t) = 2$
- ☐ $\lim_{t\to\infty} g(t) = 4$

f) Bei welchen Verschaltungsarten können die Pole des Gesamtsystems von den Polen der Einzelsysteme abweichen? (1 Punkt)

☐ Reihenschaltung
☐ Parallelschaltung
☐ Rückführung

g) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion eines Systems 3. Ordnung

$$G(s) = -\frac{s-1}{24s^3 + 12s^2 + 10s + 4}$$

auf asymptotische Stabilität! (2 Punkte)

☐ Sie ist asymptotisch stabil.
☐ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

h) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_1(s) = \dfrac{s^2 - 3s - 10}{4(s+4)^2(s-2)^2}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_1(\omega) =$ ☐ (1 Punkt)

$G_2(s) = \dfrac{s^3 + 2s^2 + 5s + 3}{s^2 + 5s}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_2(\omega) =$ ☐ (1 Punkt)

i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in $\frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_3(s) = \dfrac{s^2 - 3s - 10}{4(s+4)^2(s-2)^2}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{dA_3(\omega)}{d\omega} =$ ☐ (1 Punkt)

$G_4(s) = \dfrac{s^3 + 2s^2 + 5s + 3}{s^2 + 5s}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} =$ ☐ (1 Punkt)

j) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = \sin(0.5t) - \mathrm{e}^{-2t}$, das mit der Funktion $u(t) = \sigma(t)$ angeregt wird! (2 Punkte)

☐ $y(t) = 0.5\left(\cos(0.5t) - \mathrm{e}^{-2t}\right)$
☐ $y(t) = 0.5\left(\mathrm{e}^{-2t} + 3 - 4\cos(0.5t)\right)$
☐ $y(t) = -2\cos(0.5t) - 0.5\mathrm{e}^{-2t} + 1.5$
☐ $y(t) = -2\cos(0.5t) + 0.5\mathrm{e}^{-2t} - 0.5$
☐ $y(t) = 2\left(\mathrm{e}^{-2t} - \cos(0.5t)\right)$
☐ $y(t) = 2\left(\cos(0.5t) - \mathrm{e}^{-2t} - 1\right)$

k) Gegeben sei das nichtlineare System des *Lorenz-Attraktors*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1\\ \dot{x}_2 &= x_1(2 - x_3) - x_2\\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - 4x_3\,.\end{aligned}$$

Dieses System besitzt eine Ruhelage bei $\underline{x}_{0,1} = [0,\ 0,\ 0]^T$.

(i) Besitzt das System weitere Ruhelagen und wenn ja, wo liegen diese? (2 Punkte)

☐ Es gibt keine weiteren Ruhelagen.

☐ $\underline{x}_{0,2} = [-1,\ -1,\ 0.25]^T$ und $\underline{x}_{0,3} = [1,\ 1,\ 0.25]^T$

☐ $\underline{x}_{0,2} = \left[2\sqrt{3}i,\ -2\sqrt{3}i,\ 3\right]^T$ und $\underline{x}_{0,3} = \left[-2\sqrt{3}i,\ 2\sqrt{3}i,\ 3\right]^T$

☐ $\underline{x}_{0,2} = [2,\ 2,\ 1]^T$ und $\underline{x}_{0,3} = [-2,\ -2,\ 1]^T$

☐ $\underline{x}_{0,2} = [2,\ 2,\ 1]^T$ und $\underline{x}_{0,3} = [2,\ 2,\ -1]^T$

(ii) Wie lautet die um die Ruhelage $\underline{x}_{0,1} = [0,\ 0,\ 0]^T$ linearisierte Zustandsraumdarstellung des Systems? (2 Punkte)

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\Delta\underline{x}$

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\Delta\underline{x}$

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\Delta\underline{x}$

☐ $\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\Delta\underline{x}$

(iii) Was lässt sich über die Stabilität des linearisierten Systems sagen? (1 Punkt)

☐ Keine Aussage möglich.

☐ Es ist grenzstabil.

☐ Es ist asymptotisch stabil.

☐ Es ist instabil.

l) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Ortskurven (Abbildung 1) sowie Sprungantworten (Abbildung 2) zu! (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Ortskurve				Sprungantwort			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
$G_1(s) = \frac{4}{s(s^3+7s^2+3s)}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G_2(s) = \frac{2s^2+s}{s^2+2s+1}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G_3(s) = \frac{(s+8)(s+3)}{(s+4)(s+6)}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G_4(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+5}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

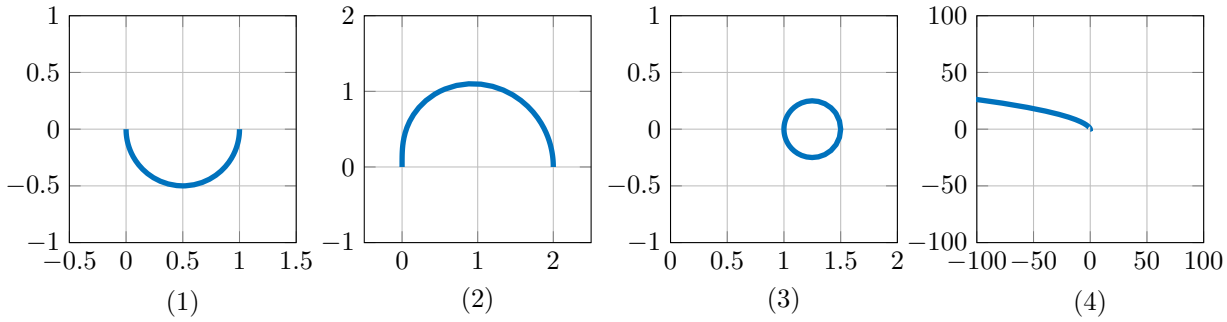


Abbildung 1: Ortskurven der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

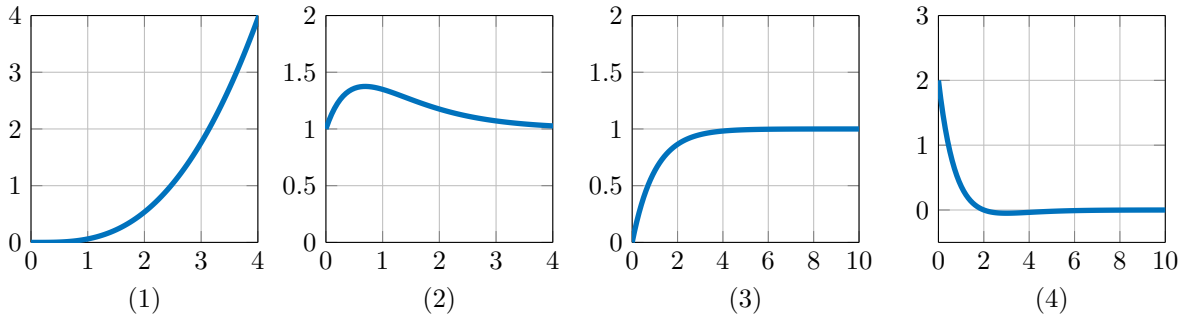
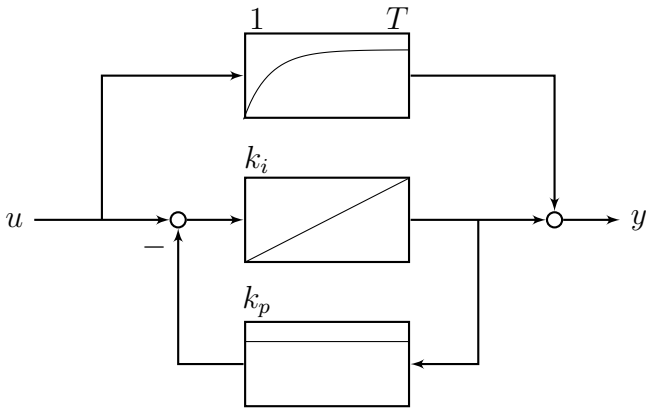


Abbildung 2: Sprungantworten der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

m) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ des folgenden Blockschaltbilds! (2 Punkte)



☐ $G(s) = \dfrac{(k_iT+1)s + k_ik_p}{Ts^2 + (k_ik_pT+1)s + k_i}$

☐ $G(s) = \dfrac{k_iTs + k_i}{Ts^2 + (k_ik_pT+1)s + k_i}$

☐ $G(s) = \dfrac{(k_iT+1)s + k_ik_p + k_i}{Ts^2 + (k_ik_pT+1)s + k_ik_p}$

☐ $G(s) = \dfrac{(k_iT+1)s + k_i}{Ts^2 + k_ik_pTs + k_ik_p}$

☐ $G(s) = \dfrac{k_iTs + k_ik_p}{Ts^2 + k_ik_pTs + k_i}$

☐ $G(s) = \dfrac{k_iTs + k_ik_p + k_i}{Ts^2 + (k_ik_pT+1)s + k_ik_p}$

Aufgabe 2: (11 Punkte)

Gegeben sei das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + x_1 &= u \\ 2\dot{x}_2 + x_2 + \dot{x}_1 + a x_1 &= 2u \ , \end{aligned}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Stellen Sie die Zustandsraumdarstellung mit den Zuständen $\underline{x} = [x_1,\ x_2]^T$ und dem Ausgang $y = x_1$ auf indem Sie die Gleichung nach $\underline{\dot{x}} = [\dot{x}_1,\ \dot{x}_2]^T$ auflösen! (3 Punkte)

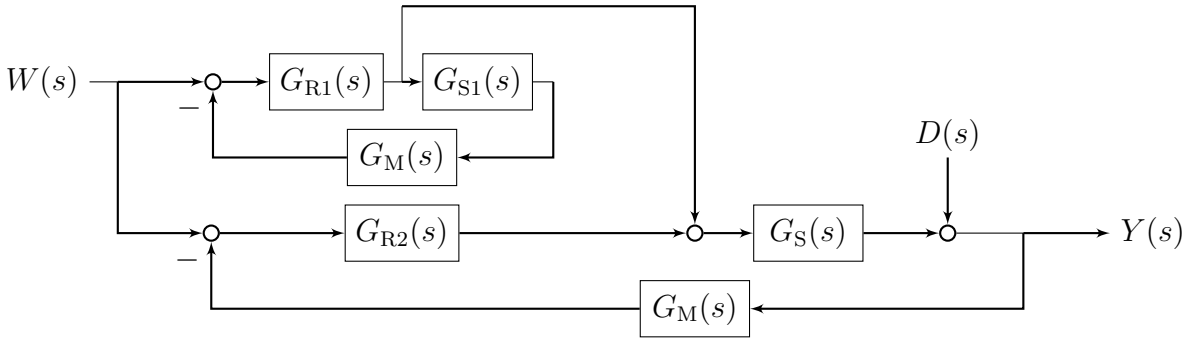
b) Für welche Werte von a ist das System asymptotisch stabil? (2 Punkte)

c) Es sei nun $a = 3$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! (4 Punkte)

d) Berechnen Sie den Ausgang $y(t)$, wenn am Eingang die Sprungfunktion $u(t) = \sigma(t)$ anliegt? Es gelte weiterhin $a = 3$! (2 Punkte)

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\frac{Y(s)}{W(s)}$. Nehmen Sie $D(s) = 0$ an. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\frac{Y(s)}{D(s)}$. Nehmen Sie $W(s) = 0$ an. (2 Punkte)

c) Geben Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $W(s)$ und $D(s)$ an. (2 Punkte)

Aufgabe 4: (13 Punkte)

Zur Regelung eines Kippspiegels soll ein mechanisches Ersatzmodell erstellt werden. Dazu wird der Spiegel, wie in Abbildung 3 dargestellt, vereinfacht. Ein starrer Körper mit der Masse m und dem Trägheitsmoment J ist an zwei Punkten mit einem Los- und Festlager mit einem Feder-Dämpfer-System verbunden, welches fest eingespannt ist. Die Schwerkraft wird in der Modellierung nicht berücksichtigt. An den Lagerpunkten werden die äußeren Kräfte F_1 und F_2 angelegt, um den Spiegel bewegen zu können.

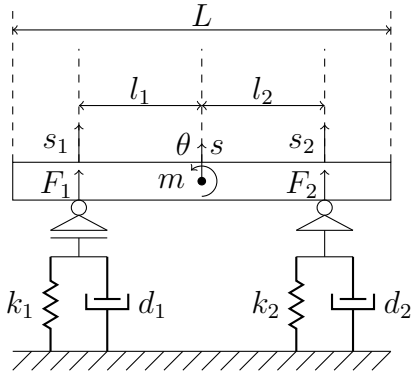


Abbildung 3: Mechanisches Modell des Kippspiegels.

a) Bestimmen Sie die Verschiebungen s_1 und s_2 an den beiden Lagerpunkten in Abhängigkeit der Translation s und Rotation θ. Nehmen Sie dazu die Kleinwinkelnäherung an! (3 Punkte)

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Translation s und die Rotation θ auf. Verwenden Sie dazu den Impuls- und Drallsatz! (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Ruhelage des Systems für $F_1 = F_2 = 0$! (2 Punkte)

d) Überführen Sie die Bewegungsgleichungen in ein Zustandsraummodell mit dem Ausgang $y = s_1$, wobei s_1 der Verschiebung am Lagerpunkt 1 entspricht. Verwenden Sie die Zustände $x_1 = s$, $x_2 = \dot{s}$, $x_3 = \theta$ und $x_4 = \dot{\theta}$! (3 Punkte)

e) Ist das System asymptotisch stabil? Bedenken Sie den mechanischen Aufbau! (1 Punkt)

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare System Σ_5

$$\Sigma_5: \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} \, .$$

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems! (3 Punkte)

b) Ist das System diagonalisierbar? Begründen Sie! (1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} durch Ähnlichkeitstransformation! (6 Punkte)

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\dddot{y} + 8\ddot{y} + 19\dot{y} + 12y = 6\ddot{u} + 29\dot{u} + 29u,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1\,,\ \dot{y}(0) = 0\,,\ \ddot{y}(0) = 3\,,\ u(0) = 0\,,\ \dot{u}(0) = 0\,,$$

beschrieben.

a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an! Beachten Sie die Anfangsbedingungen! (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! (1 Punkt)

c) Ermitteln Sie die Impulsantwort $g(t)$! (4 Punkte)

d) Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ für $u(t) = \sigma(t)$! (2 Punkte)

Aufgabe 7: (12 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_7(s) = \frac{36s^2 + 396s + 360}{s^4 + 8s^3 + 27s^2 - 36s} .$$

a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G_7(s)$ in Teilsysteme niedrigster Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konj. komplexen Polpaar)! Hinweis: Der Nenner besitzt eine Polstelle bei $s_1 = 1$ (3 Punkte)

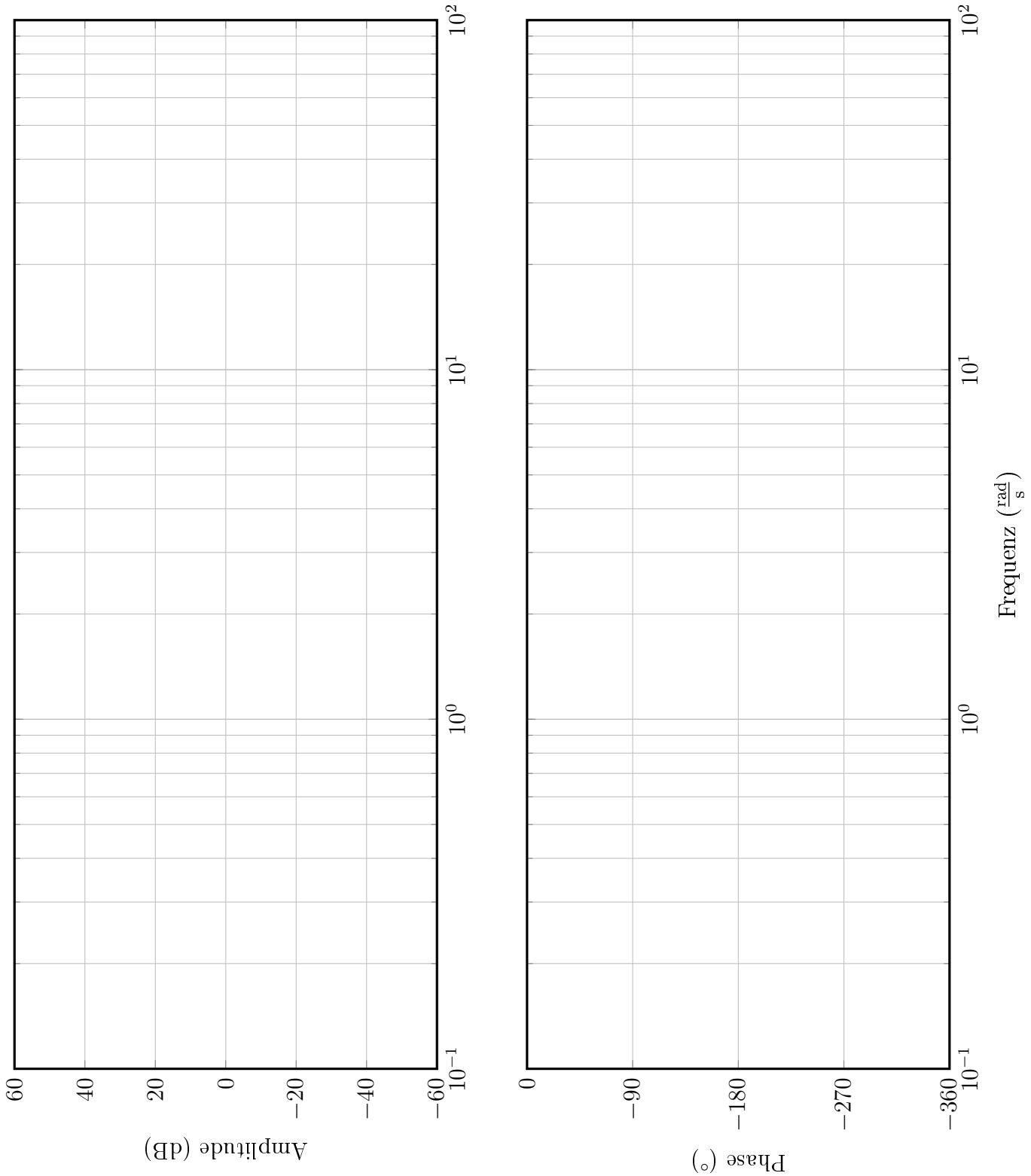
b) Berechnen Sie Frequenz-, Amplituden- und Phasengang von $G_7(s)$!
Hinweis: Verwenden Sie die faktorisierte Übertragungsfunktion! (5 Punkte)

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten! (4 Punkte)

Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 12 und 13 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 13 bewertet.



Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Dieses Blatt bewerten ☐

Hinweis: Sind Blätter 12 und 13 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 13 bewertet.

