Prof. Dr.-Ing. C. Tarin Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (21 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

a) Die Impulsantwort eines Integrators ist die Sprungfunktion. **(1 Punkt)**
- ☒ Ja
- ☐ Nein

b) Ein Doppel-Integrator ist ein lineares System. **(1 Punkt)**
- ☒ Ja
- ☐ Nein

c) Ein PT1-Glied kann durch die Differentialgleichung $\dot{y} + y^2 = u$ beschrieben werden. **(1 Punkt)**
- ☐ Ja
- ☒ Nein

d) Es gibt zu jeder Übertragungsfunktion $G(s)$ unendlich viele Zustandsraumdarstellungen. **(1 Punkt)**
- ☒ Ja
- ☐ Nein

e) Am Eingang eines Systems liegt die Eingangsgröße $u(t) = a\sin(\omega t)$ an. Auf der Ausgangsseite wird $y(t) = b\sin(\omega t + \pi)$ gemessen. Kann das System linear sein? **(1 Punkt)**
- ☒ Ja
- ☐ Nein

f) Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf das System zu, welches durch die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s^2+5s+3}{4s^2+s}$ beschrieben wird? **(3 Punkte)**
- ☒ kausal
- ☒ grenzstabil
- ☐ instabil
- ☐ asymptotisch stabil
- ☐ totzeitbehaftet
- ☒ minimalphasig
- ☒ Integratorverhalten

g) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion des Systems 4. Ordnung

$$G(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 2s + 4}$$

auf asymptotische Stabilität! **(2 Punkte)**

☐ Sie ist asymptotisch stabil.
☒ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

Lösung:

2. BWB ist verletzt.

h) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge $\varphi(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_1(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 1}{(s+5)(s+2)^2}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_1(\omega) =$ $\boxed{-90°}$ **(1 Punkt)**

$G_2(s) = \dfrac{-s^4}{(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)(s-4)}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \varphi_2(\omega) =$ $\boxed{180°}$ **(1 Punkt)**

i) Geben Sie die asymptotische Steigung des Amplitudengangs $\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ in $\frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \to \infty$ an!

$G_3(s) = \dfrac{(s^2 + s + 4)(s-1)}{(s-2)(s+4)^2}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{dA_3(\omega)}{d\omega} =$ $\boxed{0\frac{\text{dB}}{\text{dec}}}$ **(1 Punkt)**

$G_4(s) = \dfrac{-s^4}{s^6 + 2s^5 + 3s^4 + 4s^2 + 5s + 6}$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} =$ $\boxed{-40\frac{\text{dB}}{\text{dec}}}$ **(1 Punkt)**

j) Berechnen Sie mit Hilfe der Faltung die Systemantwort eines Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t) = \mathrm{e}^{-2t}$, das mit der Funktion $u(t) = 2t$ angeregt wird! **(3 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \exp(-2\tau)2(t-\tau)d\tau \\ &= 2t\int_0^t \exp(-2\tau)d\tau - 2\int_0^t \exp(-2\tau)\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2}(\exp(-2t) - 1) + t \end{aligned}$$

k) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Ortskurven (Abbildung 1) sowie Sprungantworten (Abbildung 2) zu! **(4 Punkte)**

Übertragungsfunktion	Ortskurve				Sprungantwort			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
$G_1(s) = \dfrac{(s+2)(s+10)}{(s+1)(s+5)}$	☐	☒	☐	☐	☐	☒	☐	☐
$G_2(s) = \dfrac{16}{s^2+2s+4}$	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
$G_3(s) = \dfrac{s}{s^2+s+1}$	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☒	☐
$G_4(s) = \dfrac{s^2+12s+20}{s^3+6s^2+5s}$	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐

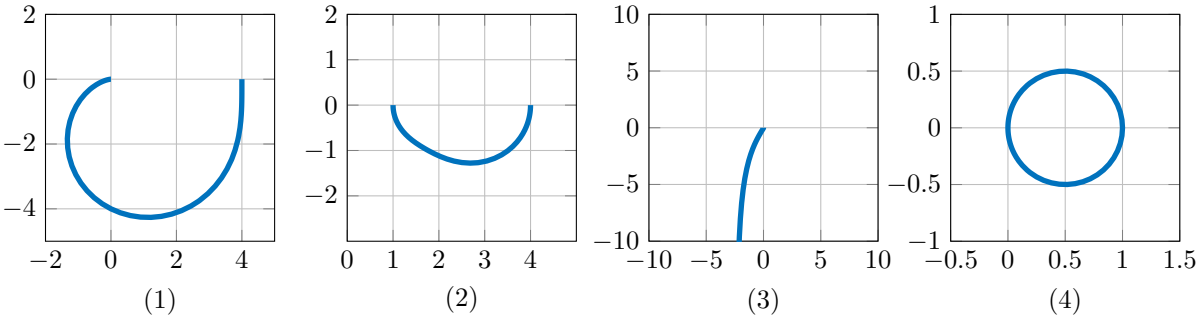


Abbildung 1: Orstkurven der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

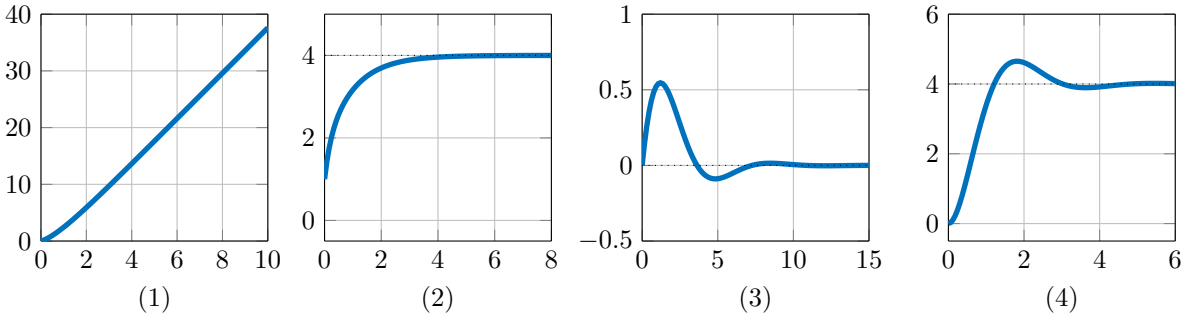


Abbildung 2: Sprungantworten der Übertragungsfunktion $G_i(s)$ $i = 1 \ldots 4$

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Gegeben seien die Differentialgleichungen für einen Gleichstrommotor in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_2: \qquad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_\mathrm{A}}{L_\mathrm{A}} & \frac{k_\mathrm{M}}{L_\mathrm{A}} \\ \frac{k_\mathrm{T}}{J} & -\frac{k_\mathrm{L}}{J} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\mathrm{A}} \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad \underline{x}(0) = \underline{0}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}\,,$$

mit den Zuständen Ankerstrom $i_(\mathrm{A})(t) = x_1(t)$ und Winkelgeschwindigkeit des Motors $w(t) = x_2(t)$. Der Eingang $u(t)$ des Systems sei die Ankerspannung $u_\mathrm{A}(t)$ ist und der Ausgang $y(t)$ die Winkelgeschwindigkeit $w(t)$. Die Motorparameter lauten für den zu untersuchenden Fall

$$R_\mathrm{A} = 5\,\Omega\,, \quad L_\mathrm{A} = 0.1\,\mathrm{H}\,, \quad J = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,, \quad k_\mathrm{T} = 10\,{}^{\mathrm{Nm}}/_{\mathrm{A}}\,, \quad k_\mathrm{M} = 10\,\mathrm{Vs}\,, \quad k_\mathrm{L} = 20\,\mathrm{Nm}\cdot\mathrm{s}\,.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Zustandsmatrix A! **(4 Punkte)**

Lösung:

Aufstellen der char. Gleichung:

$$\begin{aligned} det(sI - A) &= 0 \\ \begin{vmatrix} s+50 & -100 \\ -10 & s+20 \end{vmatrix} &= 0 \\ s^2 + 70s &= 0 \\ s_1 = -70,\ s_2 &= 0 \end{aligned}$$

Berechenung Eigenvektor zum Eigenwert $s_1 = -70$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -20 & -100 \\ -10 & -50 \end{bmatrix}}_{A_1} v_1 = 0 \ \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Berechenung Eigenvektor zum Eigenwert $s_2 = 0$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 50 & -100 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}}_{A_2} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Transformieren Sie das System Σ_2 in die kanonische Normalform! **(3 Punkte)**

Lösung:

Für die Transformation gilt allgemein

$$\begin{aligned} x &= V\tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} = V^{-1}x \\ \dot{\tilde{x}} &= \underbrace{V^{-1}AV}_{\tilde{A}}\tilde{x} + \underbrace{V^{-1}B}_{\tilde{B}}u \\ y &= \underbrace{CV}_{\tilde{C}}\tilde{x} \end{aligned}$$

Die benötigten Transformationsmatrizen lauten

$$V = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{-5-2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich die transformierten Zustandsmatrizen zu

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -70 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = V^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{7} \\ \frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CV = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Impulsantwort $g(t)$ des transformierten Systems! **(2 Punkte)**

Lösung:

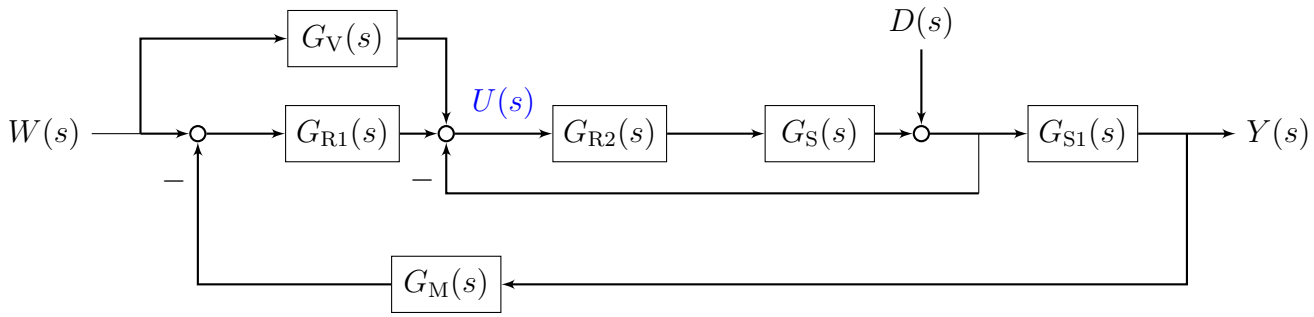
$$g(t) = \tilde{C} \mathrm{e}^{\tilde{A}t} \tilde{B}$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-70t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-10}{7} \\ \frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

$$g(t) = \frac{10}{7}(1 - \mathrm{e}^{-70t})$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\frac{Y(s)}{W(s)}$. Nehmen Sie $D(s) = 0$ an. **(3 Punkte)**

Lösung:

Mit der Zwischengröße $U(s)$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G_{S1}G_SG_{R2}U(s) \\
U(s) &= G_VW(s) + G_{R1}(W(s) - G_MY(s)) - G_SG_{R2}U(s) \\
&= (G_V + G_{R1})W(s) - G_{R1}G_MG_{S1}G_SG_{R2}U(s) - G_SG_{R2}U(s) \\
&\Rightarrow (1 + G_{R1}G_MG_{S1}G_SG_{R2} + G_SG_{R2})U(s) = (G_V + G_{R1})W(s) \\
&\Rightarrow U(s) = \frac{G_V + G_{R1}}{1 + G_SG_{R2}(1 + G_{R1}G_MG_{S1})}W(s) \\
&\Rightarrow \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_{S1}G_SG_{R2}(G_V + G_{R1})}{1 + G_SG_{R2}(1 + G_{R1}G_MG_{S1})}
\end{aligned}
$$

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\frac{Y(s)}{D(s)}$. Nehmen Sie $W(s) = 0$ an. **(3 Punkte)**

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&Y(s) = G_{S1}\left(D(s) + G_SG_{R2}\left(G_{R1}(-G_M)Y(s) - \frac{1}{G_{S1}}Y(s)\right)\right) \\
&\left(1 + G_SG_{R2}(1 + G_{R1}G_MG_{S1})\right)Y(s) = G_{S1}D(s) \\
&\Rightarrow \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_{S1}}{1 + G_SG_{R2}(1 + G_{R1}G_MG_{S1})}
\end{aligned}
$$

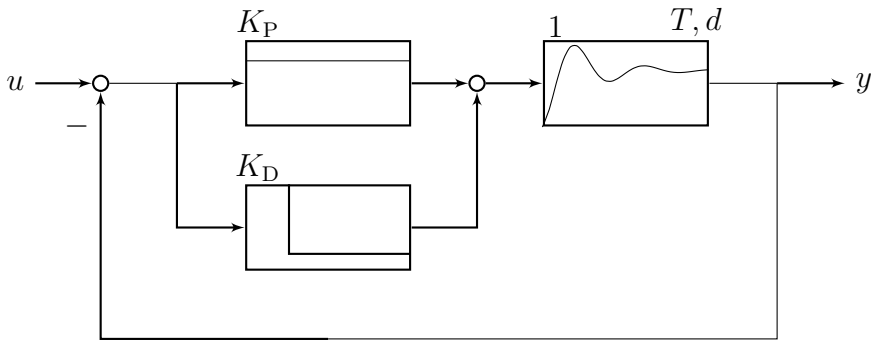
c) Geben Sie $Y(s)$ in Abhängigkeit von $W(s)$ und $D(s)$ an. **(2 Punkte)**

Lösung:

$$Y(s) = \frac{G_{R2}G_S G_{S1}(G_V + G_{R1})}{1 + G_S G_{R2}(1 + G_{S1}G_{R1}G_M)} W(s) + \frac{G_{S1}}{1 + G_S G_{R2}(1 + G_{S1}G_{R1}G_M)} D(s)$$

Aufgabe 4: (9 Punkte)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. **(2 Punkte)**

Lösung:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{T^2s^2 + 2dTs + 1}\left(K_P + K_D s\right)}{1 + \frac{1}{T^2s^2 + 2dTs + 1}\left(K_P + K_D s\right)}$$
$$G(s) = \frac{(K_\mathrm{P} + K_\mathrm{D} s)}{T^2s^2 + (2Td + K_\mathrm{D})s + (1 + K_\mathrm{P})}$$

b) Für welches K_P und K_D ist das System asymptotisch stabil. **(2 Punkte)**

Lösung:

$$K_P > -1$$
$$K_D > -2Td$$

c) Bestimmen Sie $y(t)$ für $t \to \infty$ bei Anregung des Systems mit einem Sprung $u(t) = \sigma(t)$. **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} G(s)U(s)s = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{K_P}{1 + K_P}$$

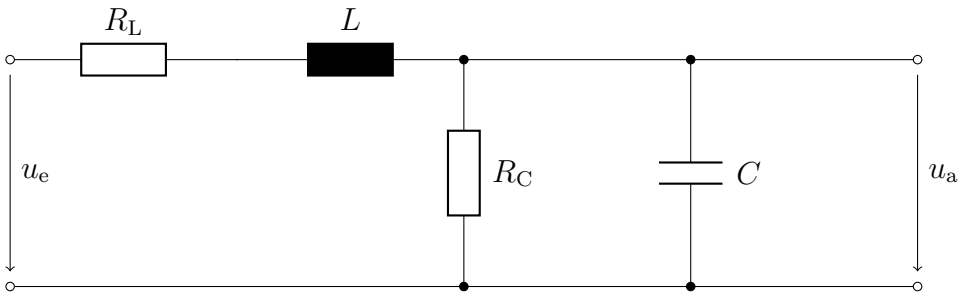
d) Berechnen Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$ für $K_\mathrm{P} = 1$, $K_\mathrm{D} = 2$, $T = 1$ und $d = 0.5$. **(3 Punkte)**

Lösung:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{(1+2s)}{s^2+3s+2} \\
\frac{1+2s}{(s+1)(s+2)} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \\
A &= -1 \qquad B = 3 \\
g(t) &= 3\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5: (11 Punkte)

Im Folgenden ist ein elektrischer Schwingkreis dargestellt:



a) Leiten Sie ein Zustandsraummodell mit den Zuständen Kondensatorspannung $u_\mathrm{C} = x_1$ und Spulenstrom $i_\mathrm{L} = x_2$ her! **(4 Punkte)**

Lösung:

$$
\begin{aligned}
y &= u_a = u_c = x_1 \\
u &= u_e \\
i_C = C\frac{du_C}{dt} &= i_L - i_{R_C} = i_L - \frac{u_{R_C}}{R_C} = i_L - \frac{u_C}{R_C} \\
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_C C}x_1 + \frac{1}{C}x_2 \\
U_L = L\frac{di_L}{dt} &= u_e - u_{R_L} - u_C = u_e - R_L i_L - u_C \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R_L}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\
\dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_C C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_L}{L} \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B} u \\
y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x
\end{aligned}
$$

b) Beurteilen Sie argumentativ, ob das System asymptotisch stabil ist! **(1 Punkt)**

Lösung:

Ja, da nur passive Bauelemente und mit Widerständen asymptotisch stabil.

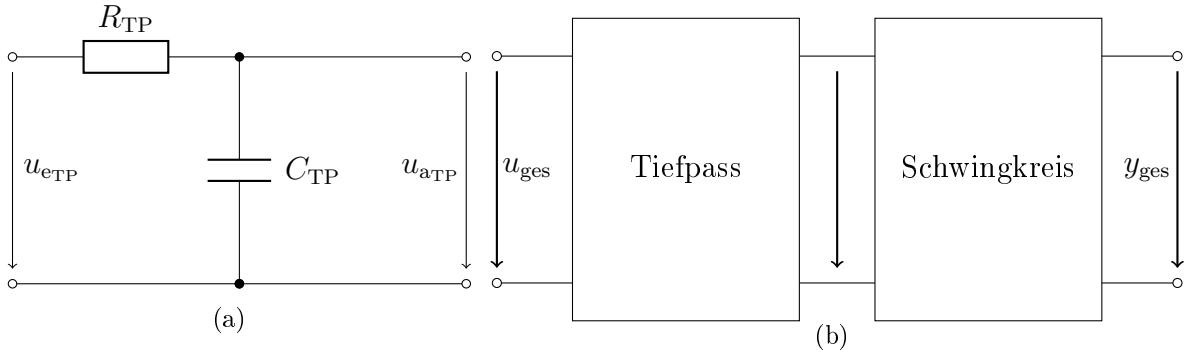
c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems! **(3 Punkte)**

Lösung:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2(\frac{R_L}{L} + \frac{1}{R_C C})s + (\frac{R_L}{R_C} + 1)\frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s + \frac{R_L}{L} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{1}{R_C C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + (\frac{R_L}{L} + \frac{1}{R_C C})s + (\frac{R_L}{R_C} + 1)\frac{1}{LC}}$$

Zur Unterdrückung hochfrequenter Störungen wird ein Tiefpass-Filter vor den Schwingkreis geschaltet.



d) Bestimmen Sie das Zustandsraummodell des Tiefpass-Filters (a)! **(1 Punkt)**

Lösung:

$$u = u_{\mathrm{eTP}}$$
$$y = x = u_{\mathrm{aTP}}$$
$$i_{C_{TP}} = C_{TP}\frac{du_{\mathrm{eTP}}}{dt} = \frac{u_{R_{TP}}}{R_{TP}} = \frac{u_{\mathrm{aTP}} - u_{\mathrm{eTP}}}{R_{TP}}$$
$$\dot{x} = -\frac{1}{C_{TP}R}x + \frac{1}{C_{TP}R}u$$

e) Das Tiefpass-Filter wird mit dem Schwingkreis verschaltet. Stellen Sie die Zustandsraumdarstellung des Gesamtsystems (b) auf! Sie können das Ergebnis in Abhängigkeit der berechneten Matrizen in Aufgabe (a) und (d) darstellen. **(2 Punkte)**

Lösung:

$$
\begin{aligned}
u &= u_{TP} \\
u_{LC} &= y_{TP} \\
y &= y_{LC} \\
\dot{x}_{LC} &= A_{LC} x_{LC} + B_{LC} u_{LC} \\
\dot{x}_{TP} &= A_{TP} x_{TP} + B_{TP} u_{TP}
\end{aligned}
$$

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{LC} \\ \dot{x}_{TP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{LC} & B_{LC} C_{TP} \\ 0 & A_{TP} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{TP} \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x
$$

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Gegeben sei das System Σ_6 in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_6: \qquad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad \underline{x}(0) = \underline{0}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \, .$$

a) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned} det(sI_4 - A) &= 0 \\ det(sI_2 - A_1)det(sI_2 - A_2) &= 0 \\ &\Rightarrow s_1 = -3, s_2 = -2 \\ s(s+4) - 5 = s^2 + 4s - 5 &= 0 \\ s_{3,4} = -2 \pm \frac{\sqrt{36}}{2} &= -2 \pm 3 \\ &\Rightarrow s_3 = 1, s_4 = -5 \end{aligned}$$

System ist instabil, da Realteil eines Pols > 0.

b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix mittels Laplace-Transformation! **(7 Punkte)**
Hinweis:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_2^{-1} \end{bmatrix}, \; A_i \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \; i = 1, 2$$

Lösung:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+3)} & \frac{2}{(s+2)(s+3)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{(s-1)(s+5)} & \frac{5}{(s-1)(s+5)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-1)(s+5)} & \frac{s+4}{(s-1)(s+5)} \end{bmatrix}$$

Für die Elemente der Matrix gilt:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(s+2)(s+3)} &= \frac{2}{(s+2)} - \frac{2}{(s+3)} \\ \frac{s}{(s-1)(s+5)} &= \frac{1}{6(s-1)} + \frac{5}{6(s+5)} \\ \frac{1}{(s-1)(s+5)} &= \frac{1}{6(s-1)} - \frac{1}{6(s+5)} \\ \frac{5}{(s-1)(s+5)} &= \frac{5}{6(s-1)} - \frac{5}{6(s+5)} \\ \frac{s+4}{(s-1)(s+5)} &= \frac{5}{6(s-1)} + \frac{1}{6(s+5)} \end{aligned}$$

Mit der Tabelle für die Laplace Transformation ergibt sich

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 2(e^{-2t} - e^{-3t}) & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}e^{t} + \frac{5}{6}e^{-5t} & \frac{5}{6}e^{t} - \frac{5}{6}e^{-5t} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-5t} & \frac{5}{6}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Ein physikalisches System wird durch folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\dddot{y} + 5\ddot{y} + 9\dot{y} + 5y = \ddot{u} + 12\dot{u} + 20u,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0\,,\ \dot{y}(0) = a\,,\ \ddot{y}(0) = b\,,\ u(0) = c\,,\ \dot{u}(0) = 0\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

beschrieben.

a) Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 12s + 20}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5} U(s) + \frac{(a-c)s + b + 5a - 12c}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5}$$

Ein Punkt für Übertragungsfunktion und ein Punkt für Anfangsbedingungen.

b) Es gelte nun $a = c = 0$ und $b = 10$. Bestimmen Sie die homogene Lösung ($u(t) = \dot{u}(t) = \ddot{u}(t) = 0\ \forall\, t$) der Differentialgleichung! **(4 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned}
\dddot{y} + 5\ddot{y} + 4\dot{y} + 25y &= 0 \\
\mathscr{L}\{\dddot{y} + 5\ddot{y} + 4\dot{y} + 25y\} &= 0 \\
Y(s)s^3 + 5s^2 + 9s + 5) &= s^2 \cancelto{0}{y(0)} + s\cancelto{0}{\dot{y}(0)} + \ddot{y}(0) + 5s\cancelto{0}{y(0)} + 5\cancelto{0}{\dot{y}(0)} + 9\cancelto{0}{y(0)} \\
Y(s) &= \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5}
\end{aligned}$$

Mithilfe einer Partialbruchzerlegung ergibt sich (Pol geraten bei -1)

$$\begin{aligned}
&\frac{10}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 5} \\
&\Rightarrow A = 5 \quad B = -5 \quad C = -15
\end{aligned}$$

Der zweite Term muss noch umgeformt werden, damit die Korrespondenz-Tabelle verwendet werden kann

$$\begin{aligned}\frac{5s+15}{s^2+4s+5} &= \frac{5s+15}{(s^2+4s+4)+1} \\ &= \frac{5s+15}{(s+2)^2+1} \\ &= 5\frac{(s+2)+1}{(s+2)^2+1} \\ &= 5\frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} + 5\frac{1}{(s+2)^2+1}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Lösung

$$y(t) = 5\mathrm{e}^{-t} - 5\mathrm{e}^{-2t}(\cos(t) + \sin(t))$$

Alternativ kann die homogene Lösung auch über eine Ansatzfunktion bestimmt werden.

Aufgabe 8: (9 Punkte)

Gegeben ist ein nichtlineares System:

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\phi}^2 - g\sin(\phi)\\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{m_\mathrm{K} r^2 + J_\mathrm{B}}(u(t) - m_\mathrm{K} g r\cos(\phi) - 2m_\mathrm{K} r\dot{r}\dot{\phi})\\ & r, g, m_\mathrm{K}, J_\mathrm{B} > 0\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des nichtlinearen Systems für $r_\mathrm{Ruhelage} = 0$! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned}\dot{r} = \ddot{r} = 0, \dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0\\ \sin(\phi^*) = 0 \quad \phi^* = k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ u^* = 0\end{aligned}$$

b) Überführen Sie das System in eine Zustandsraumdarstellung mit $y = r$! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$x = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \phi & \dot{\phi}\end{bmatrix}^T$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_4^2 - g\sin(x_3) \\ x_4 \\ \frac{1}{m_K x_1^2 + J_B}(u - m_K g x_1\cos(x_3) - 2m_K x_1 x_2 x_4)\end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

c) Linearisieren Sie um die Ruhelage ($r_{\text{Ruhelage}} = 0, \phi_{\text{Ruhelage}} = 0$)! **(3 Punkte)**

Lösung:

Allgemein erhält man die Linearisierung an jedem Punkt x mit Hilfe der Taylor-Reihenentwicklung. Hier ergibt sich

$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_{4,0}^2 & 0 & -g\cos(x_{3,0}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m_K \frac{(m_K x_{1,0}^2 + J_B) - x_{1,0}(2m_K x_{1,0})}{(m_K x_{1,0}^2 + J_B)^2}(g\cos(x_{3,0}) - 2x_{2,0}x_{4,0}) & \frac{-2m_K x_{1,0} x_{4,0}}{m_K x_{1,0}^2 + J_B} & \frac{m_K g x_{1,0}}{m_K x_{1,0}^2 + J_B}\sin(x_{3,0}) & \frac{-2m_K x_{1,0} x_{2,0}}{m_K x_{1,0}^2 + J_B} \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_K x_{1,0}^2 + J_B} \end{bmatrix} \Delta u$$

Einsetzen der gegebenen Ruhelage $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ *führt auf*

$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-gm_k}{J_B} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_B} \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x$$

d) Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$det(sI - A) = 0 = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & g & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ \frac{gm_k}{J_B} & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} s & g & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \frac{gm_k}{J_B} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ s & g & 0 \\ 0 & s & -1 \end{vmatrix} = s^4 - \frac{g^2 m_k}{J_B}$$

$$s_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{g^2 m_k}{J_B}}$$

$$s_{3,4} = \pm \sqrt{-\sqrt{\frac{g^2 m_k}{J_B}}} = \pm \sqrt{-1} \sqrt[4]{\frac{g^2 m_k}{J_B}} = \pm j \sqrt[4]{\frac{g^2 m_k}{J_B}}$$

System ist instabil, da Realteil eines Pols > 0 *!*

Aufgabe 9: (8 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_9(s) = \frac{4s^3 + 2s^2 + s}{(s+1)^2(s+5)} .$$

a) Berechnen Sie Amplituden- und Frequenzgang von $G_9(s)$! **(4 Punkte)**

Lösung:

$$\begin{aligned}
G_8(j\omega) &= \frac{j\omega(1 - 4\omega^2 + 2j\omega)}{(1+j\omega)^2(5+j\omega)} \\
|G_8(j\omega)| &= \frac{\omega\sqrt{(1-4\omega^2)^2 + 4\omega^2}}{(1+\omega^2)\sqrt{25+\omega^2}} \\
\angle G_8(j\omega) &= \pi/2 - 2\arctan(\frac{\omega}{1}) - \arctan(\frac{\omega}{5}) + \phi(\omega) \\
\phi(\omega) &= \begin{cases} \arctan\frac{2\omega}{1-4\omega^2} & 1-4\omega^2 > 0 \\ \pi + \arctan\frac{2\omega}{1-4\omega^2} & 1-4\omega^2 \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten! **(4 Punkte)**

Lösung:

Die Übertragungsfunktion umgeformt lautet

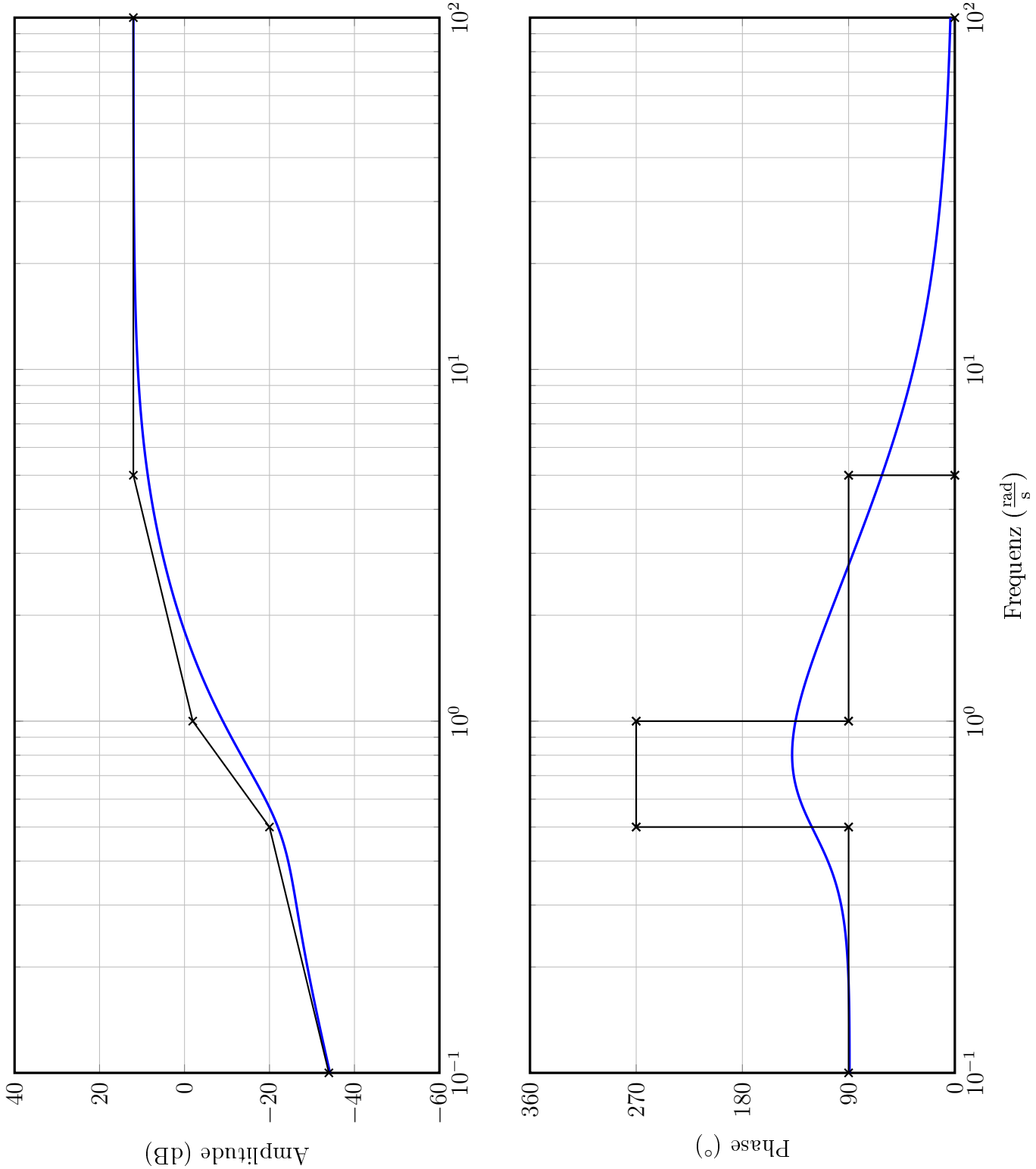
$$G(s) = 4 \cdot s^1 \cdot \left(s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+5}$$

Damit ergibt sich

$$c = 4,\ r = 1,\ \omega_1 = \omega_{min} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},\ \omega_{2,3} = 1,\ \omega_4 = 5,\ G^*(0) = \frac{1}{20}$$

Die Startamplitude ist daher

$$A_{dB}(\omega_{min}) = 20 \cdot \log_{10}\left(\left|4 \cdot \frac{1}{20}\right| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1\right) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) = -20dB$$


Amplitude (dB)
40
20
0
−20
−40
−60
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Phase (°)
360
270
180
90
0
Frequenz $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$

Punkte für Aufgabe 1: 21 von 21

Punkte für Aufgabe 2: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 3: 8 von 8

Punkte für Aufgabe 4: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 5: 11 von 11

Punkte für Aufgabe 6: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 7: 6 von 6

Punkte für Aufgabe 8: 9 von 9

Punkte für Aufgabe 9: 80 von 8

Insgesamt vergebene Punkte: 90 von 90