

Bachelor-Teilprüfung

EINFÜHRUNG IN DIE FESTIGKEITSLEHRE

Prüfer: Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. S. Schmauder

Datum: 17.08.2020

Hilfsmittel: 1 Blatt (2 Seiten) handschriftliche Formelsammlung,
nicht programmierbarer Taschenrechner laut Positiv-
liste, ausgeteiltes Formelblatt

Prüfungsdauer: 60 min

Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab KW*) in C@mpus bekannt gegeben. Die Prüfungseinsicht wird voraussichtlich in KW*) stattfinden. Wiederholerinnen und Wiederholer sind verpflichtet, die Prüfungsergebnisse einzusehen und sich nötigenfalls bis spätestens KW*) für die mündliche Fortsetzungsprüfung am IMWF zu melden. Die Fortsetzungsprüfungen finden ab KW*) statt. KW*) ... Die genauen Daten werden rechtzeitig über die Homepage des IMWF bekannt gegeben.		
Name	Matrikelnummer	Unterschrift
Studiengang		
Wiederholerin / Wiederholer	☐ nein ☐ ja	

**Nur die auf dem Aufgabenblatt eingetragenen Lösungen und Rechenwege wer-
den eingesammelt und bewertet!**

Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein!

Viel Erfolg!

Diese Tabelle darf nur von den Korrektoren ausgefüllt werden!									
1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1	Bonus
2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	2h	2	

Aufgabe 1:

(31,0 Punkte)

Sie werden von Charlie Chaplin engagiert, um für seinen Film „Modern Times“ eine der Wellen auszulegen.



Quelle: <http://stadtkinowien.at/film/26/>

Die Welle ist aus dem Stahl **15CrNi6**. Die Aufgabe kann entsprechend Bild 1.1 vereinfacht werden.

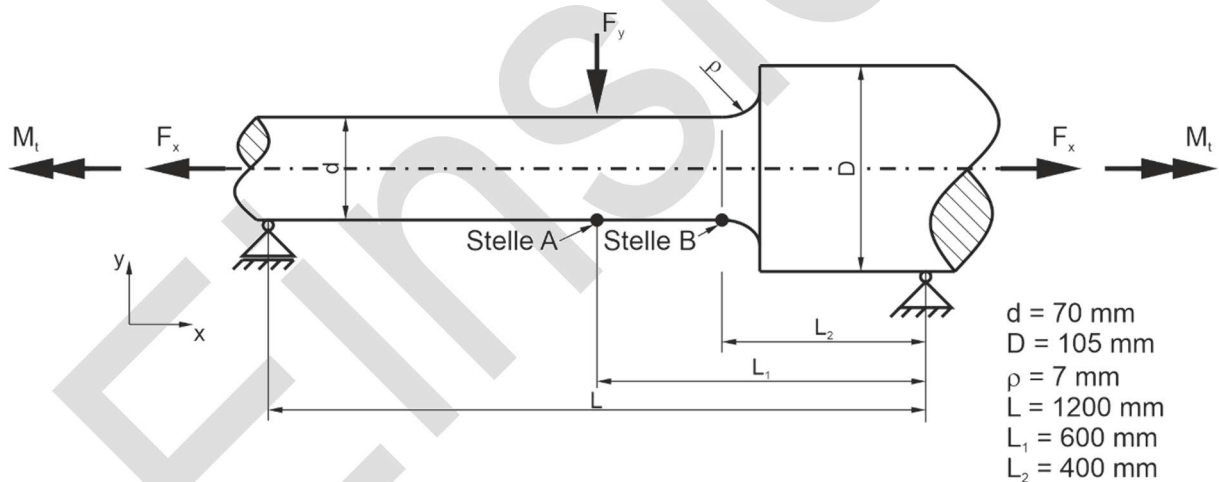
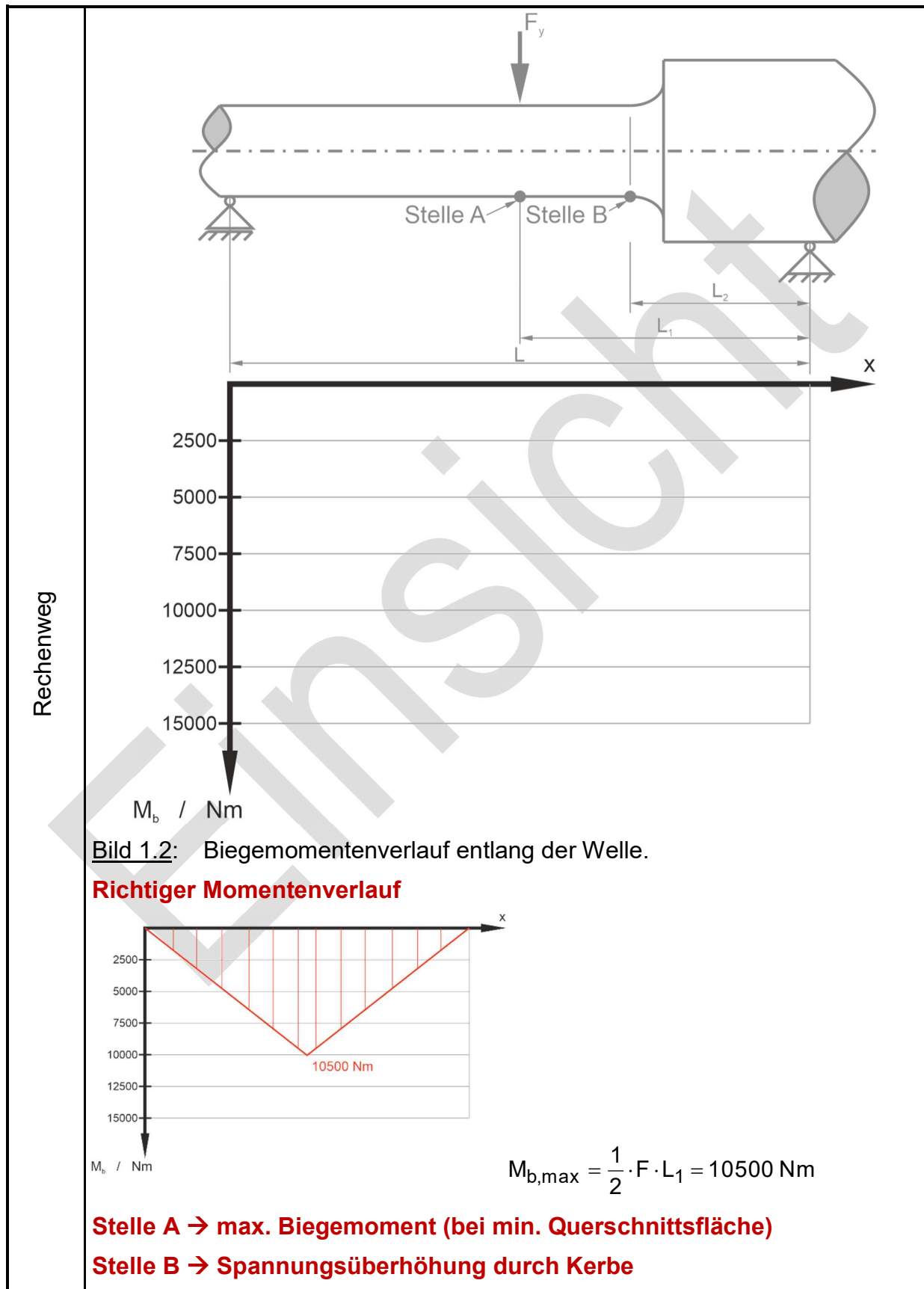


Bild 1.1: Vereinfachte Darstellung der zu untersuchenden Welle.

15CrNi6: $R_e = 540 \text{ MPa}$; $R_m = 800 \text{ MPa}$; $E = 210000 \text{ MPa}$; $\mu = 0,3$; $A_5 = 10 \%$

- a) Zeichnen Sie für eine Querkraft von $F_y = 35 \text{ kN}$ den Biegemomentenverlauf entlang der Welle (quantitativ) in Bild 1.2. Begründen Sie, warum bei einer Festigkeitsuntersuchung die Stellen A und B betrachtet werden müssen! (3,0 P.)



- b) Berechnen Sie für eine Querkraft von $F_y = 35 \text{ kN}$ die Sicherheit gegen Fließen an der Stelle A. **(3,0 P.)**

Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil a) nicht gelöst haben, verwenden Sie an der Stelle A ein Biegemoment von $M_{b,A} = 10000 \text{ Nm}$.

Rechenweg	$W_b = \frac{\pi}{32} d^3 = 33673,9 \text{ mm}^3$ $\sigma_b = \frac{M_{b,A}}{W_b} = 311,81 \text{ MPa}$ Festigkeitsbedingung: $\sigma_b \leq \sigma_{zul} \text{ mit } \sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} \rightarrow S_F = \frac{R_e}{\sigma_b} = 1,73$
Lösung	Ergebnis
Sicherheit gegen Fließen	$S_F = 1,73$

- c) Der Querkraft $F_y = 35 \text{ kN}$ überlagert sich die Axialkraft $F_x = 100 \text{ kN}$. Berechnen Sie für die Stelle A die Sicherheit gegen Fließen. **(3,5 P.)**

Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, verwenden Sie an der Stelle A eine Biegespannung von $\sigma_b = 310 \text{ MPa}$.

Rechenweg	$A = \frac{\pi}{4} d^2 = 3848,5 \text{ mm}^2$ $\sigma_z = \frac{F_x}{A} = 25,98 \text{ MPa}$ $\sigma_b = 311,81 \text{ MPa} \text{ (Aufgabenteil b))}$ $\sigma_{\text{wirk}} = \sigma_z + \sigma_b = 337,80 \text{ MPa}$ Festigkeitsbedingung: $\sigma_{\text{wirk}} \leq \sigma_{\text{zul}} \text{ mit } \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F} \rightarrow S_F = \frac{R_e}{\sigma_{\text{wirk}}} = 1,60$
Lösung	Ergebnis
Sicherheit gegen Fließen	$S_F = 1,60$

Eine Axialkraft braucht in allen weiteren Aufgabenteilen nicht weiter berücksichtigt werden ($F_x = 0 \text{ kN}$).

- d) Es wirkt weiterhin eine Querkraft $F_y = 35 \text{ kN}$. Welches Torsionsmoment M_t kann der Querkraft überlagert werden, sodass Fließen an der Stelle A mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen ist. **(4,0 P.)**

Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, verwenden Sie an der Stelle A eine Biegespannung von $\sigma_b = 310 \text{ MPa}$.

Rechenweg	Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{zul} \text{ mit } \sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} = 360 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_v = 360 \text{ MPa}$ $W_t = \frac{\pi}{16} d^3 = 67347,9 \text{ mm}^3$ Variante 1 (GEH): $\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2} \rightarrow \tau_t = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_v^2 - \sigma_b^2)} = 103,88 \text{ MPa}$ $\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \rightarrow M_t = \tau_t \cdot W_t = 6996,0 \text{ Nm}$ Variante 2 (SH): $\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2} \rightarrow \tau_t = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_v^2 - \sigma_b^2)} = 89,96 \text{ MPa}$ $\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \rightarrow M_t = \tau_t \cdot W_t = 6058,7 \text{ Nm}$
Lösung	Ergebnis
Torsionsmoment M_t	$M_t(\text{GEH}) = 6996,0 \text{ Nm}$ $M_t(\text{SH}) = 6058,7 \text{ Nm}$

Für den Werkstoff **15CrNi6** ist folgendes Wöhlerdiagramm gegeben.

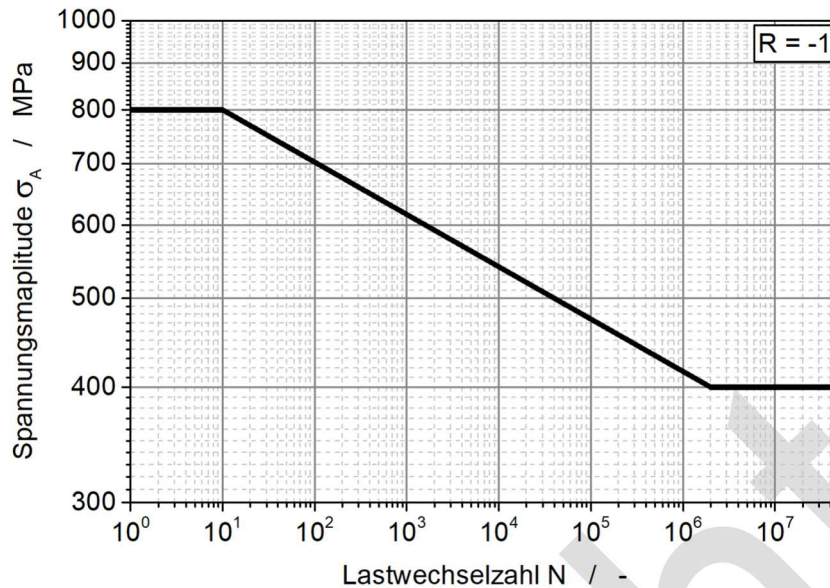


Bild 1.3: Wöhlerdiagramm für Werkstoff **15CrNi6** (polierte Oberfläche).

- e) Im Folgenden sei die Welle umlaufend und die Kraft $F_y = 51 \text{ kN}$ sei konstant ($M_t = 0 \text{ Nm}$). Nach wievielen Umdrehungen ist mit einem Versagen der Welle an der Stelle A zu rechnen. **(2,0 P.)**

Hinweis: Die Welle ist an der Stelle A poliert.

Rechenweg	Amplitude: $\sigma_a = \frac{F_y \cdot L_1}{2W_b} = 454,36 \text{ MPa}$ Versagensbedingung: $\sigma_a = \sigma_A \rightarrow N = 212108 \quad (100000 \div 400000)$
Lösung	Ergebnis
Anzahl Umdrehungen	$N = 212108$

Untersucht wird im Folgenden die Kerbstelle B.

- f) Bestimmen Sie die Formzahlen für Biegung und Torsion an der Kerbstelle B. Kann für eine kombinierte Beanspruchung aus $F_y = 20 \text{ kN}$ und $M_t = 1500 \text{ Nm}$ Fließen an der Kerbstelle B mit ausreichender Sicherheit ausgeschlossen werden? **(7,0 P.)**

Rechenweg	$\frac{D}{d} = 1,50, \quad \frac{\rho}{d} = 0,10$ $\alpha_{k,b} = 1,72 \quad (1,70 \div 1,75)$ $\alpha_{k,t} = 1,38 \quad (1,35 \div 1,40)$ $\sigma_{b,max} = \alpha_{k,b} \cdot \sigma_{b,n} = \alpha_{k,b} \cdot \frac{F_y \cdot L_2}{2W_b} = 204,36 \text{ MPa}$ $\tau_{t,max} = \alpha_{k,t} \cdot \tau_{t,n} = \alpha_{k,t} \cdot \frac{M_t}{W_t} = 30,73 \text{ MPa}$ $\sigma_v(\text{SH}) = \sqrt{\sigma_{b,max}^2 + 4 \cdot \tau_{t,max}^2} = 213,40 \text{ MPa}$ $\sigma_v(\text{GEH}) = \sqrt{\sigma_{b,max}^2 + 3 \cdot \tau_{t,max}^2} = 211,18 \text{ MPa}$ Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$ Variante 1: $\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} = 360 \text{ MPa} > \sigma_v$ Variante 2: $\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} \rightarrow S_F(\text{SH}) = \frac{R_e}{\sigma_v(\text{SH})} = 2,53 > 1,2 \text{ bzw.}$ $S_F(\text{GEH}) = \frac{R_e}{\sigma_v(\text{GEH})} = 2,56 > 1,2$
Lösung	Ergebnis
Formzahlen	$\alpha_{k,b} = 1,72, \quad \alpha_{k,t} = 1,38$
Fließen mit Sicherheit ausgeschlossen?	ja

- g) Bei stillstehender Welle wirke nur die Kraft F_y ($M_t = 0 \text{ Nm}$). Wie groß darf diese maximal werden, wenn an der am höchsten beanspruchten Stelle lokal 0,3 % plastische Dehnungen toleriert werden können. **(3,5 P.)**

Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil f) nicht gelöst haben, verwenden Sie die Formzahl $\alpha_{k,b} = 1,65$.

Rechenweg	Dehnung bei Fließbeginn: $\varepsilon_F = \frac{R_e}{E} = 0,257 \%$ Plastische Stützziffer: $n_{pl} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}} = 1,472$ Teilplastischer Zustand: $\sigma_{max} = n_{pl} \cdot R_e$ mit $\sigma_{max} = \alpha_{k,b} \cdot \frac{F_y \cdot L_2}{2W_b}$ $F_y = \frac{n_{pl} \cdot R_e \cdot 2 \cdot W_b}{\alpha_{k,b} \cdot L_2} = 77790,64 \text{ N}$
Lösung	Ergebnis
Kraft F_y	$F_y = 77,79 \text{ kN}$

- h) Kann bei umlaufender Welle die konstante Kraft $F_y = 20 \text{ kN}$ ($M_t = 0 \text{ Nm}$) an der Kerbstelle B mit ausreichender Sicherheit dauerhaft ertragen werden? Die Welle weist im Kerbbereich eine geschliffene Oberfläche auf. Die Dauerfestigkeit kann aus dem Wöhlerdiagramm (Bild 1.3) abgelesen werden.

(5,0 P.)

Hinweis: Zur Berechnung der Kerbwirkungszahl soll die Dietmann-Formel verwendet werden. Sollten Sie Aufgabenteil f) nicht gelöst haben, verwenden Sie die Formzahl $\alpha_{k,b} = 1,65$.

Rechenweg	Spannungsamplitude: $\sigma_{a,\max} = \beta_{k,b} \cdot \sigma_{a,n} = \beta_{k,b} \cdot \frac{F_y \cdot L_2}{2W_b} = 193,81 \text{ MPa}$ Kerbwirkungszahl: $\beta_{k,b} = \frac{\alpha_{k,b}}{1 + \frac{55}{R_e} \sqrt{\frac{2}{\rho}}} = 1,632$ Oberflächenfaktor f: $f = 0,92 \quad (0,90 \div 0,94)$ Wechselfestigkeit poliert: $\sigma_{W,\text{pol}} = 400 \text{ MPa}$ Festigkeitsbedingung: $\sigma_{a,\max} \leq \sigma_{a,\text{zul}}$ Variante 1: $\sigma_{a,\text{zul}} = \frac{f \cdot \sigma_{W,\text{pol}}}{S_D} = \frac{0,92 \cdot 400 \text{ MPa}}{1,5 \div 2,5} = 245,3 \div 147,2 \text{ MPa}$ Variante 2: $\sigma_{a,\text{zul}} = \frac{f \cdot \sigma_{W,\text{pol}}}{S_D} \rightarrow S_D = \frac{f \cdot \sigma_{W,\text{pol}}}{\sigma_{a,\max}} = 1,90 \rightarrow S_D = 1,5 \div 2,5$
Lösung	Ergebnis
Last dauerhaft ertragbar?	ja

Aufgabe 2:

(29,0 Punkte)

In einem projektierten Beatmungsgerät wird das benötigte Luftvolumen und der Beatmungsdruck über einen Zylinder erzeugt. Der Zylinder wird aus **Reinstaluminium** gefertigt. Die Konstruktion und die Abmessungen können Bild 2.1 entnommen werden.

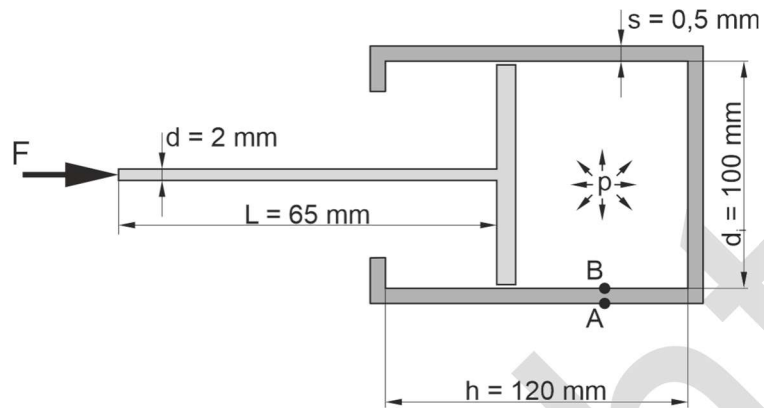


Bild 2.1: Beatmungsgerät

Reinstaluminium: $R_{p0,2} = 18 \text{ MPa}$; $R_m = 45 \text{ MPa}$; $E = 70000 \text{ MPa}$; $\mu = 0,35$;
 $A_5 = 35 \%$

- a) Während der Beatmung soll ein Überdruck von $p = 0,035$ bar erzeugt werden. Welche Spannungen (Radial-, Axial- und Umfangsspannung) herrschen am Punkt A (Zylinderaußenseite) und am Punkt B (Zylinderinnenseite). **(4,0 P.)**

Rechenweg	Umfangsspannung: $\sigma_{u,i} = \sigma_{u,a}$ $\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} = 0,35 \text{ MPa}$ Axialspannung: $\sigma_{a,i} = \sigma_{a,a}$ $\sigma_a = 0 \text{ MPa} \rightarrow \text{Kolben Axialspannungs-frei}$ Radialspannung: $\sigma_{r,i} = -p = -0,0035 \text{ MPa}$ $\sigma_{r,a} = 0 \text{ MPa}$
Lösung	Ergebnis
Spannungen Punkt A	$\sigma_u = 0,35 \text{ MPa}$, $\sigma_a = 0 \text{ MPa}$, $\sigma_{r,a} = 0 \text{ MPa}$
Spannungen Punkt B	$\sigma_u = 0,35 \text{ MPa}$, $\sigma_a = 0 \text{ MPa}$, $\sigma_{r,i} = -0,0035 \text{ MPa}$

- b) Wenn der Patient hustet wird der Zylinder in den oberen Anschlag geschoben und es entsteht ein Überdruck von $p = 1,0 \text{ bar}$ im Zylinder. Welche Spannungen (Radial-, Axial- und Umfangsspannung) herrschen jetzt am Punkt A (Zylinder-
 raußenseite). (2,5 P.)

Rechenweg	Umfangsspannung: $\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} = 10,0 \text{ MPa}$ Axialspannung: $\sigma_a = \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} = 5 \text{ MPa} \rightarrow \text{Lastsituation entsprechend geschl. HZ}$ Radialspannung: $\sigma_{r,a} = 0 \text{ MPa}$	
	Lösung	Ergebnis
	Spannungen Punkt A	$\sigma_u = 10,0 \text{ MPa}$, $\sigma_a = 5,0 \text{ MPa}$, $\sigma_{r,a} = 0 \text{ MPa}$

- c) Ist die Belastung aus Aufgabenteil b) mit Sicherheit ertragbar? Berechnen Sie die vorliegenden Sicherheiten. **(3,5 P.)**

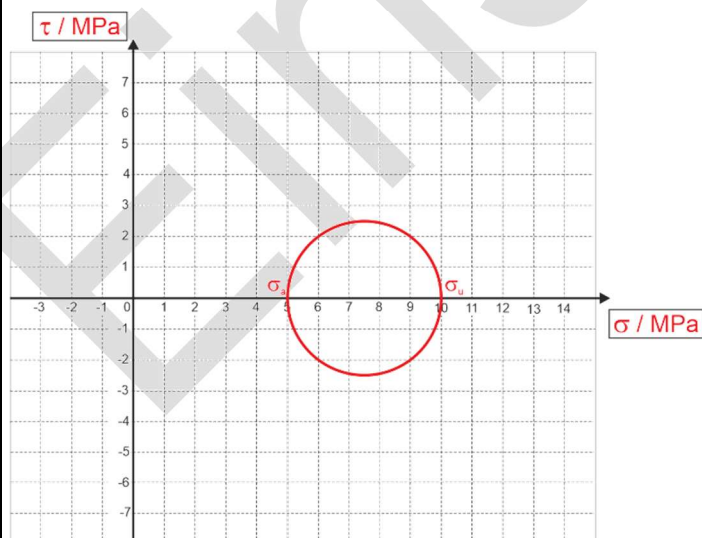
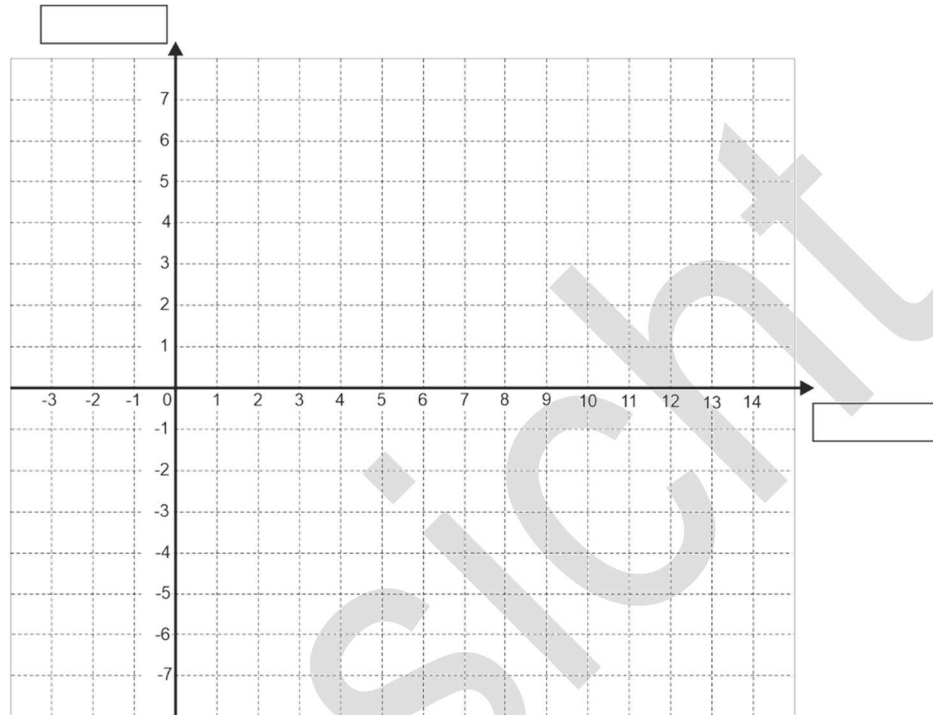
Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, verwenden Sie die Spannungen $\sigma_u = 8 \text{ MPa}$, $\sigma_a = 4 \text{ MPa}$ und $\sigma_r = -0,05 \text{ MPa}$.

Rechenweg	Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$ $\sigma_v(\text{SH}) = \sigma_u - \sigma_{r,a} = 10 \text{ MPa}$ $\sigma_v(\text{GEH}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_u - \sigma_a)^2 + (\sigma_a - \sigma_{r,a})^2 + (\sigma_{r,a} - \sigma_u)^2} = 8,66 \text{ MPa}$ Fließen: $\sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F} \rightarrow S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_v} = 1,80 \text{ bzw. } 2,08 > 1,2$ Bruch: $\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} \rightarrow S_F = \frac{R_m}{\sigma_v} = 4,50 \text{ bzw. } 5,20 > 2,0$	
	Lösung	Ergebnis
	Belastung mit Sicherheit ertragbar?	ja

- d) Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für die Belastung aus Aufgabenteil b) am Punkt A für die Axial-Tangentialebene. Verwenden Sie untenstehendes Diagramm. Beschriften Sie die Achsen (mit Einheiten). **(3,0 P.)**

Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, verwenden Sie die Spannungen $\sigma_u = 8 \text{ MPa}$, $\sigma_a = 4 \text{ MPa}$ und $\sigma_r = -0,05 \text{ MPa}$.

Rechenweg



- e) Im Punkt A ist zur Innendrucküberwachung ein Dehnmessstreifen (DMS) unter einem Winkel von $\phi = 45^\circ$ zur Zylinderlängsachse angebracht. Welche Dehnung wird an diesem DMS bei der Belastung aus Aufgabenteil b) gemessen? **(4,0 P.)**

Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, verwenden Sie die Spannungen $\sigma_u = 8 \text{ MPa}$, $\sigma_a = 4 \text{ MPa}$ und $\sigma_r = -0,05 \text{ MPa}$.

Rechenweg	Normalspannungen unter 45 zur Längsachse: Spannung entlang DMS: $\sigma_{\text{DMS}0^\circ} = \frac{\sigma_u + \sigma_a}{2} - \frac{\sigma_u - \sigma_a}{2} \cos(2\phi) = 7,5 \text{ MPa}$ Spannungen quer zu DMS: $\sigma_{\text{DMS}90^\circ} = \frac{\sigma_u + \sigma_a}{2} + \frac{\sigma_u - \sigma_a}{2} \cos(2\phi) = 7,5 \text{ MPa}$ → oder aus MSK ablesen 2-achsiger Spannungszustand: $\varepsilon_{\text{DMS}} = \frac{1}{E} (\sigma_{\text{DMS}0^\circ} - \mu \sigma_{\text{DMS}90^\circ})$ $\varepsilon_{\text{DMS}} = \frac{1}{E} (\sigma_{\text{DMS}0^\circ} - \mu \sigma_{\text{DMS}90^\circ}) = 0,00696 \%$
Lösung	Ergebnis
Dehnung DMS	$\varepsilon_{\text{DMS}} = 0,00696 \%$

- f) Im Normalbetrieb ($p = 0,035 \text{ bar}$) wird die Kolbenstange auf Druck belastet. Kann Knicken mit Sicherheit ausgeschlossen werden? (Die Kolbenstange kann sich am linken Ende frei bewegen.) Nennen Sie zwei Möglichkeiten, die Sicherheit gegen Knicken zu erhöhen. **(6,0 P.)**

Hinweis: Die Kraft auf die Kolbenstange berechnet sich aus der Gleichgewichtsbetrachtung mit dem auf den Kolben wirkenden Innendruck.

Rechenweg	Kraft F: $F = p \cdot \frac{\pi}{4} d_i^2 = 27,49 \text{ N}$ Knickfall 1: $F_K = \frac{\pi^2}{4} \frac{E \cdot I}{L^2}$ $I = \frac{\pi}{64} d^4 = 0,785 \text{ mm}^4$ $F_K = 32,11 \text{ N}$ Variante 1: $F \leq \frac{F_K}{S_K} \rightarrow \frac{F_K}{S_K} = \frac{32,11 \text{ N}}{2,5} = 12,84 \text{ N} < 27,49 \text{ N}$ Variante 2: $F \leq \frac{F_K}{S_K} \rightarrow S_K = \frac{F_K}{F} = 1,17 < 2,5$ Einspannbedingungen ändern, Durchmesser vergrößern, Länge verkürzen, anderer Werkstoff (mit höherem E-Modul), anderes Profil verwenden (mit höherem I), ...
Lösung	Ergebnis
Knicken mit Sicherheit ausgeschlossen?	nein

- g) Um die Maschine zu erproben wird mit ihr ein Gummiluftballon aufgeblasen. Im Ausgangszustand hat der Ballon einen Innendurchmesser von $d_{i,0} = 40 \text{ mm}$ und eine Wandstärke von $s_0 = 0,5 \text{ mm}$. Wie groß sind die Spannungen in der Ballonwand bei einem Druck von $p = 1 \text{ bar}$? Bitte beachten Sie hier, dass mit zunehmendem Druck die Wandstärke abnimmt und der Durchmesser anwächst! Für den Gummi darf linearelastisches Verhalten mit einem E-Modul von $E = 100 \text{ MPa}$ angenommen werden. Die Querkontraktionszahl des Gummis beträgt $\mu = 0,3$. **(6,0 P.)**

Hinweis: Die Radialspannung darf vernachlässigt werden ($\sigma_r = 0$).

Rechenweg	Ballon $\rightarrow$ kugelförmig $\rightarrow$ $\sigma_u = \sigma_a = \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s}$ 2-achsiger Spannungszustand: $\varepsilon_u = \varepsilon_a = \frac{1}{E} \left(\frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} - \mu \left(\frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} \right) \right) = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} = \frac{1-\mu}{E} \sigma_u$ $\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(-\mu \left(\frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} + \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} \right) \right) = -\frac{2\mu}{E} \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} = -\frac{2\mu}{E} \sigma_u$ $\varepsilon_u = \varepsilon_a = \frac{\Delta d_i}{d_{i,0}} = \frac{d_i - d_{i,0}}{d_{i,0}} \rightarrow d_i = d_{i,0} + \varepsilon_u \cdot d_{i,0}$ $\varepsilon_r = \frac{\Delta s}{s_0} = \frac{s - s_0}{s_0} \rightarrow s = s_0 + \varepsilon_r \cdot s_0$ $\sigma_u = \frac{p}{4} \frac{\overbrace{\left(d_{i,0} + \frac{1-\mu}{E} \sigma_u \cdot d_{i,0} \right)}^d}{\underbrace{\left(s_0 - \frac{2\mu}{E} \sigma_u \cdot s_0 \right)}_s}$ $(-8\mu s_0) \cdot \sigma_u^2 + (4s_0 E - p(1-\mu)d_{i,0}) \cdot \sigma_u - (p E d_{i,0}) = 0$ $\Rightarrow \sigma_{u,1} = \sigma_{a,1} = 162,28 \text{ MPa}; \sigma_{u,2} = \sigma_{a,2} = 2,05 \text{ MPa}$
Lösung	Ergebnis
Spannungen in Ballonwand	$\sigma_{u,1} = \sigma_{a,1} = 162,28 \text{ MPa}; \sigma_{u,2} = \sigma_{a,2} = 2,05 \text{ MPa}$