

Zweite Hausübung

(Ausgabe: 16.01.2023, Abgabe: **23.01.2023 bis 13 Uhr**, Rückgabe: KW 06, 2023)

Nachname	Vorname	Matrikelnummer
Studiengang	Studienbeginn	Tutoriumsgruppe (Nr.)

Die Abgabe der Hausübung erfolgt durch Upload in Ilias. Beachten Sie dazu die Richtlinien zur Benennung und zum Format des Uploads.

Benennung: Nachname_Vorname_Matrikelnummer_TM1_Hue01.pdf

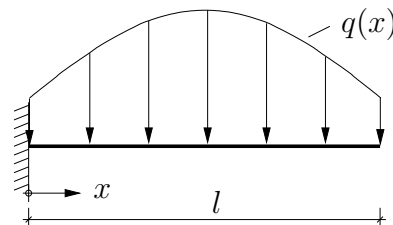
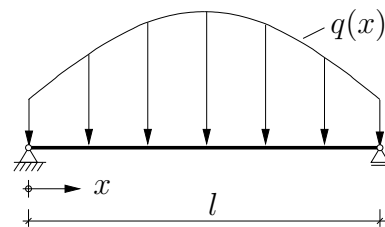
Format: Bitte benutzen Sie das Deckblatt der Hausübung als Deckblatt der Abgabe. Alle Aufgaben sollen als .pdf Dateien in A4 Hochformat hochgeladen werden, die Ausrichtung der Schrift soll von oben nach unten sein. Anderenfalls wird die Abgabe nicht bewertet.

Sonstiges: Die Lösung der Hausübung muss schrittweise nachvollziehbar sein, sonst erfolgt ebenfalls keine Bewertung.

Aufgabe 1

Die dargestellten Systeme sind durch die Streckenlast $q(x) = q_0(\frac{1}{2} + \sin \frac{\pi}{l}x)$ belastet.

1. Berechnen Sie den Verlauf der Querkraft sowie des Biegemoments durch Integration der Schnittgrößen-Differentialgleichung.
2. Fertigen Sie für jeden Schnittgrößenverlauf eine maßstäbliche saubere Zeichnung an und geben Sie Rand- und Extremwerte an.
3. Bestimmen Sie mithilfe der ermittelten Schnittgrößenverläufe die Auflagerreaktionen.



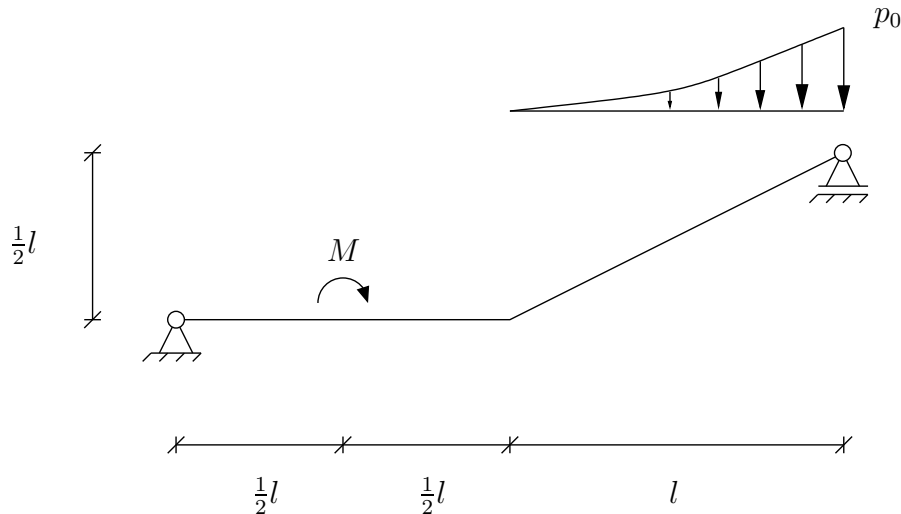
Geg.: q_0, l .

Aufgabe 2

Das gegebene Tragwerk wird durch ein Einzelmoment und eine quadratische Streckenlast belastet.

1. Untersuchen Sie das System auf äußere statische Bestimmtheit.
2. Berechnen Sie sämtliche Auflagerreaktionen.
3. Bestimmen Sie die Schnittkräfte im System.
4. Stellen Sie die Ergebnisse in einer maßstäblichen sauberen Zeichnung dar.

Geg.: l , p_0 , $M = p_0 l^2$.

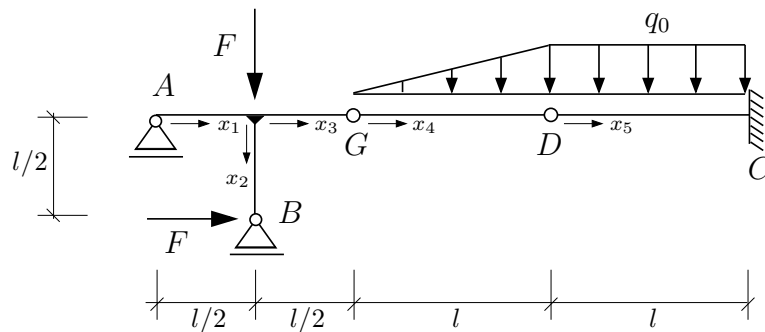


Aufgabe 3

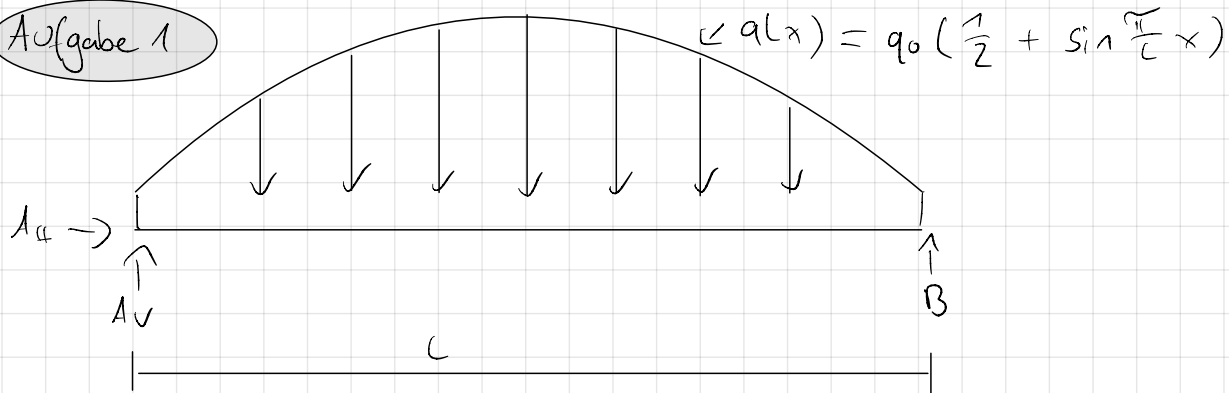
Gegeben ist das dargestellte dreiteilige Balkensystem.

1. Untersuchen Sie die statische Bestimmtheit des Systems.
2. Berechnen Sie die Verläufe aller Schnittgrößen als Funktionen der gegebenen Koordinaten.
3. Stellen Sie Ihre Ergebnisse unter Angabe aller Rand- und Extremwerte in maßstäblichen sauberen Zeichnungen dar.

Geg.: q_0 , l , $F = q_0 l$.



Aufgabe 1



Statische Bestimmtheit:

$$f = 3 - a = 3 - (2+1) = 0 \quad \checkmark$$

1. Integration der Schnittgrößen-DGL

$$\begin{aligned} Q(x) &= - \int q(x) dx + C_1 \\ &= q_0 \left(-\frac{1}{2} x + \frac{L}{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right) \right) + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x) &= \int Q(x) dx + C_2 \\ &= q_0 \left(-\frac{1}{4} x^2 + \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \right) + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

Rand- und Übergangsbedingungen

$$M(x=0) = 0$$

$$M(x=L) = 0$$

Bestimmung Integrationskonstanten

$$M(x=0) = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$M(x=L) = 0$$

$$q_0 \left(-\frac{1}{4} L^2 + \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi}{L} L \right) \right) + C_1 L + C_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$C_1 = \frac{q_0 \left(\frac{1}{4} L^2 - \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \sin(\pi) \right)}{L} = q_0 \frac{1}{4} L$$

Einsetzen in DGL

$$Q(x) = q_0 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right) + \frac{q_0}{4}L$$

$$= q_0 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{L}{4} \right)$$

$$M(x) = q_0 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right) + \left(\frac{q_0}{4}L\right)x$$

$$= q_0 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{L}{4}x \right)$$

$$2. \quad Q(0) = q_0 \left(\frac{L}{\pi} + \frac{L}{4} \right) = 0,57 q_0 L$$

$$Q(L) = q_0 \left(-\frac{1}{2}L + \frac{L}{\pi} \cos(\pi) + \frac{L}{4} \right) = q_0 \left(-\frac{1}{2}L - \frac{L}{\pi} + \frac{L}{4} \right) = q_0 \left(-\frac{L}{4} - \frac{L}{\pi} \right) = -0,57 q_0 L$$

$$Q\left(\frac{L}{2}\right) = q_0 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} + \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{L}{4} \right) = q_0 \left(-\frac{L}{4} + \frac{L}{4} + 0 \right) = 0$$

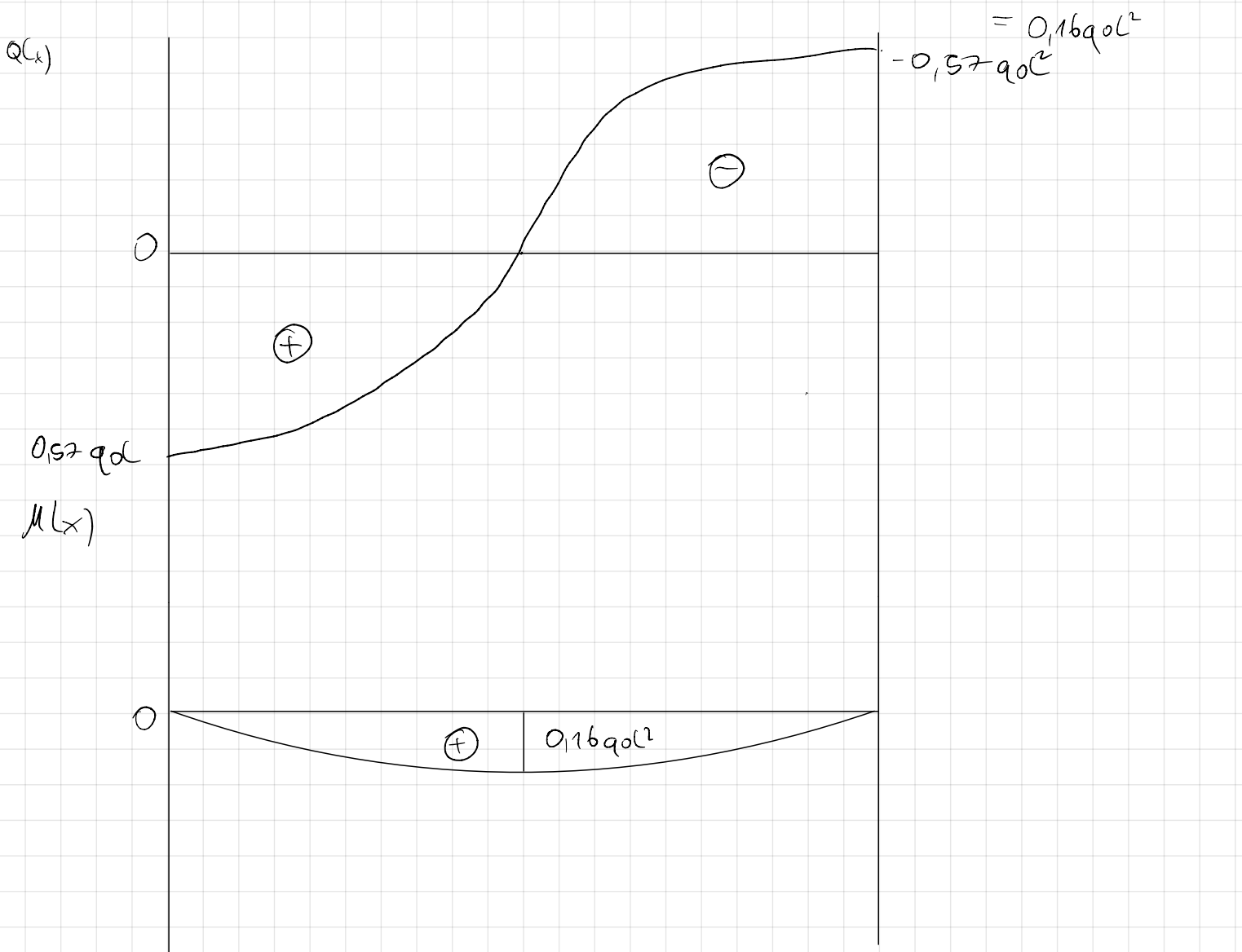
$$M(0) = 0$$

$$M(L) = q_0 \left(-\frac{1}{4}L^2 + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin(\pi) + \frac{L}{4}L \right) = 0$$

} geg. durch Randbed.

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = q_0 \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{L^2}{4} + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{2} \right) = q_0 \left(-\frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{\pi^2} + \frac{L^2}{8} \right) = q_0 \left(\frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{\pi^2} \right)$$

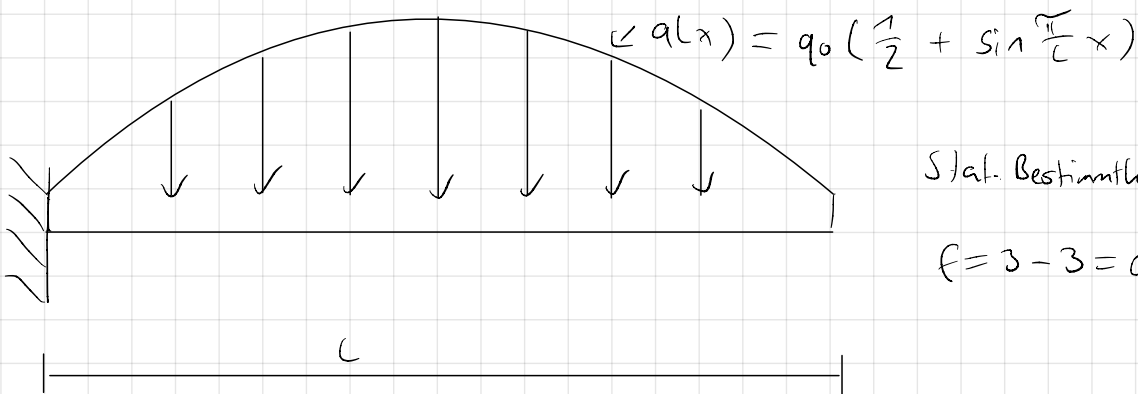
$$= 0,16 q_0 L^2$$



$$3. A_H = 0$$

$$A_V = 0,57 q_0 L$$

$$B = 0,57 q_0 L$$



Stat. Bestimmtheit

$$f = 3 - 3 = 0 \quad \checkmark$$

1. Integration der Schnittgrößen-DGL

$$Q(x) = - \int q(x) dx + C_1$$

$$= q_0 \left(-\frac{1}{2} x + \frac{L}{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right) \right) + C_1$$

$$M(x) = \int Q(x) dx + C_2$$

$$= q_0 \left(-\frac{1}{4} x^2 + \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \right) + C_1 x + C_2$$

Rand- und Übergangsbedingungen

$$Q(x=L) = 0$$

$$M(x=L) = 0$$

Bestimmung Integrationskonstanten

$$Q(x=L) = 0$$

$$q_0 \left(-\frac{1}{2} L + \frac{L}{\pi} \cos(\pi) \right) + C_1 = 0$$

$$C_1 = q_0 \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{\pi} \right) = q_0 L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right)$$

$$M(x=L) = 0$$

$$-\frac{q_0 L^2}{4} + \frac{q_0 L^2}{2} = \frac{q_0 L^2}{4}$$

$$q_0 \left(-\frac{1}{4} L^2 + \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi}{L} L \right) \right) + q_0 L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) \cdot L + C_2$$

$$C_2 = \frac{q_0 L^2}{4} - q_0 L^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) = -q_0 L^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \right)$$

Einsetzen in D&L

$$Q(x) = q_0 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right) + q_0 L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right)$$

$$M(x) = q_0 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right) + q_0 L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right)x - q_0 L^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \right)$$

2. $Q(L) = 0$

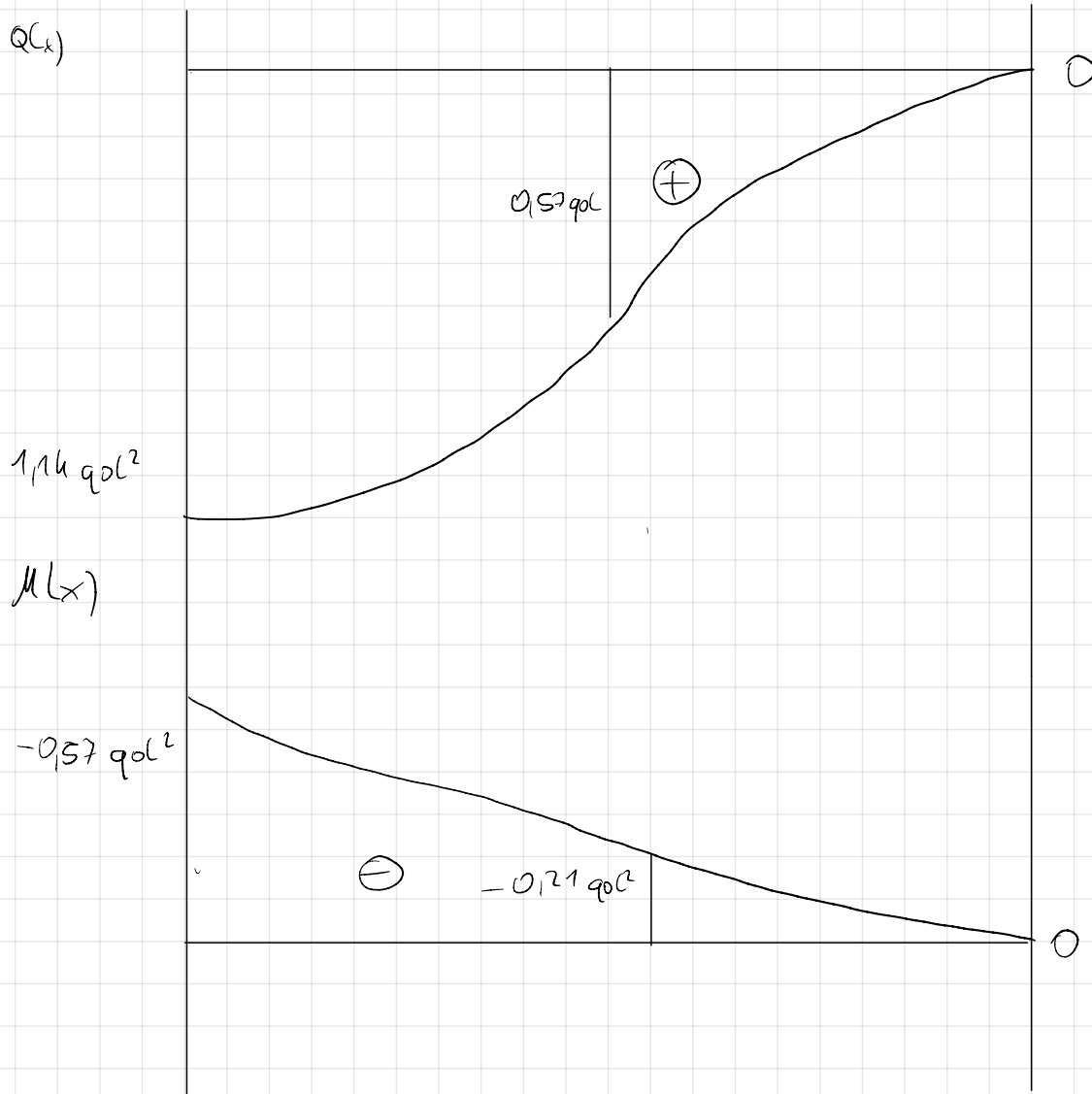
$$Q(0) = \frac{q_0 L}{\pi} + q_0 L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) = \frac{2q_0 L}{\pi} + \frac{q_0 L}{2} = q_0 L \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \right) = 1,14 q_0 L$$

$$Q\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{q_0 L}{4} + \frac{q_0 L}{2} + \frac{q_0 L}{\pi} = \frac{q_0 L}{4} + \frac{q_0 L}{\pi} = 0,57 q_0 L$$

$$M(L) = 0$$

$$M(0) = -q_0 L^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \right) = -0,57 q_0 L^2$$

$$\begin{aligned} M\left(\frac{L}{2}\right) &= q_0 \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{L}{2}\right) \right) + q_0 L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) \cdot \frac{L}{2} - q_0 L^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \right) \\ &= q_0 L^2 \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + q_0 L^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right) - q_0 L^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \right) \\ &= q_0 L^2 \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right) = -0,21 q_0 L^2 \end{aligned}$$



Auflagekräfte

$$A_H = 0$$

$$A_V = 1,14 \, q_0 L$$

$$\bar{M}_H = -0,57 \, q_0 L^2$$

Aufgabe 2

1. Statische Bestimmtheit

$$f = 3 - a = 3 - (2+1) = 0 \quad \checkmark$$



$$\sum H = 0 \Rightarrow A_H = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M + B \cdot 2L - \frac{1}{3} p_0 \cdot L \cdot \left(L + \frac{2}{3} L \right) = 0$$

$$B \cdot 2L = p_0 L^2 + \frac{1}{3} p_0 L^2 \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{19}{24} p_0 L$$

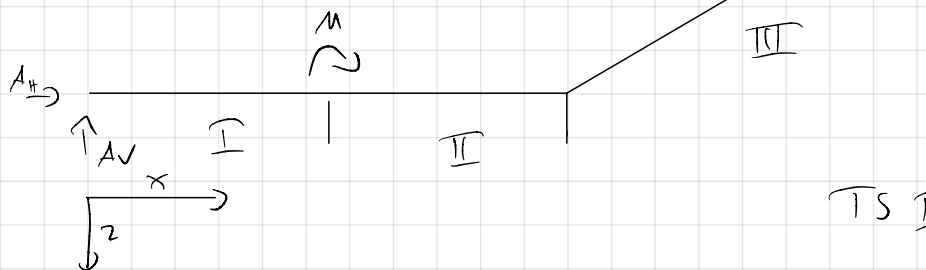
$$\sum V = 0 \Rightarrow A_V + B - \frac{p_0 L}{3} = 0$$

$$A_V = \frac{8 p_0 L}{24} - \frac{19 p_0 L}{24}$$

$$= -\frac{11}{24} p_0 L$$



3.



TS I

$$\sum H = 0 \Rightarrow A_H + N(x) = 0 \Rightarrow N(x) = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow A_V - Q(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = -\frac{11}{24} p_0 L$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M(x) - A_V \cdot x = 0 \Rightarrow M(x) = -\frac{11}{24} p_0 L x_I$$

TS II

$$\sum H = 0 \Rightarrow A_H + N(x) = 0 \Rightarrow N(x) = 0$$

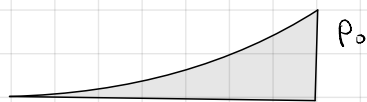
$$\sum V = 0 \Rightarrow A_V - Q(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = -\frac{11}{24} p_0 L$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M(x) - M - A_V \left(\frac{L}{2} + x \right) = 0$$

$$M(x) = p_0 L^2 - \frac{11}{48} p_0 L^2 - \frac{11}{24} p_0 L x$$

$$M(x) = \frac{37}{48} p_0 L^2 - \frac{11}{24} p_0 L x$$

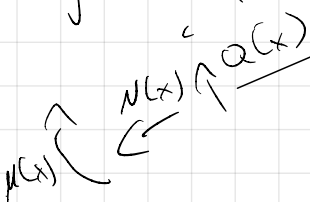
TS III



$$\beta = \arctan\left(\frac{L}{\frac{L}{2}}\right) = \arctan(2) = 63,43^\circ$$

$$p(x) = \frac{p_0 \cdot x^2}{L^2}$$

neg. Schnittkr



$$\sum H = 0 \Rightarrow -N(x_{II}) \cdot \sin(63,43^\circ) - Q(x_{II}) \cdot \cos(63,43^\circ) = 0$$

$$N(x_{II}) = -\frac{1}{2} Q(x_{II})$$

$$N(x_{II}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} N(x_{II})}{\sin(63,43^\circ)} + \frac{\frac{p_0(L-x_{II}^3)}{3L^2}}{\sin(63,43^\circ)} - \frac{\frac{19}{24} p_0 L}{\sin(63,43^\circ)} \right)$$

$$\frac{5}{4} N(x_{II}) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p_0(L-x_{II}^3)}{3L^2 \cdot 9} + 0,416 p_0 L$$

$$N(x_{II}) = -\frac{4 \cdot p_0(L-x_{II}^3)}{27 \cdot L^2} + 0,35 p_0 L$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow Q(x_{II}) \sin(63,43^\circ) - N(x_{II}) \cdot \cos(63,43^\circ) - \frac{p_0(L-x_{II}^2 \cdot x)}{3 \cdot L^2} + B = 0$$

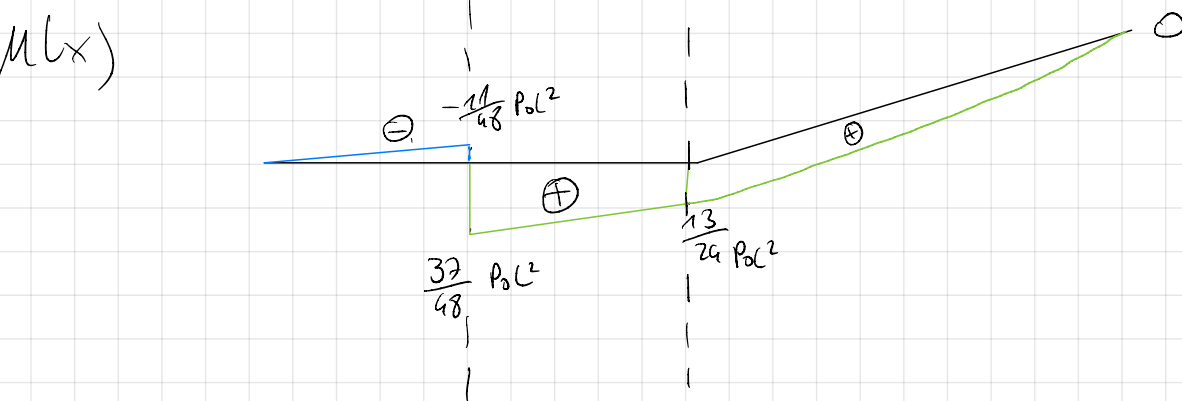
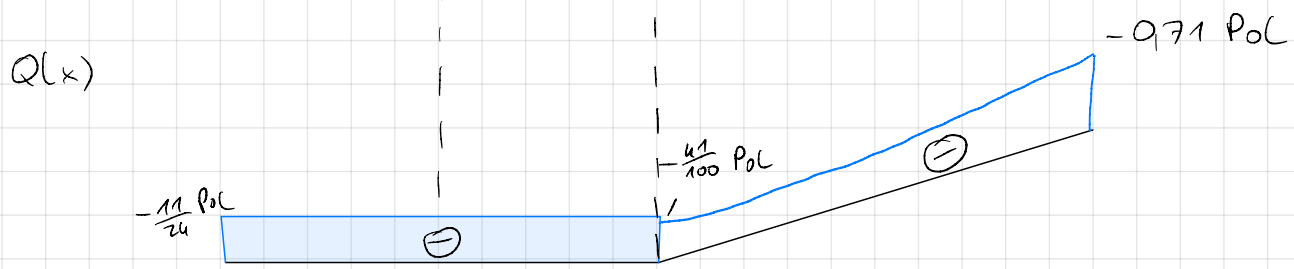
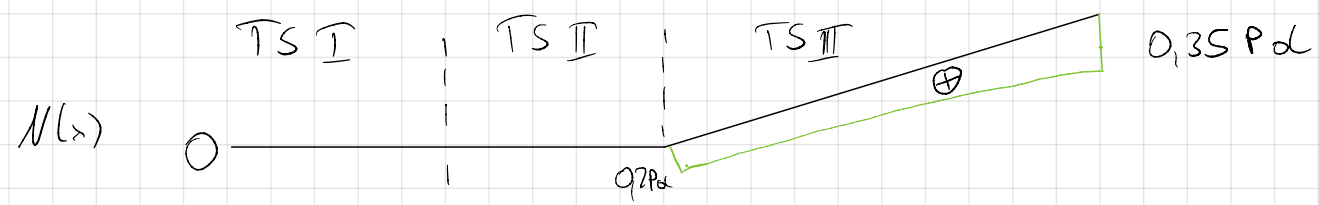
$$Q(x_{II}) = \frac{\frac{1}{2} N(x_{II})}{\sin(63,43^\circ)} + \frac{\frac{p_0(L-x_{II}^3)}{3L^2}}{\sin(63,43^\circ)} - \frac{\frac{19}{24} p_0 L}{\sin(63,43^\circ)}$$

$$Q(x_{II}) = 0,30 \frac{p_0(L-x_{II}^3)}{L^2} - 0,71 p_0 L$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -M(x_{II}) + B(L-x_{II}) - \frac{3}{4} \cdot \frac{p_0(L-x_{II}^3 \cdot x)}{3L^2}$$

$$M(x_{II}) = \frac{19}{24} p_0 L(L-x_{II}) - \frac{p_0(L-x_{II}^4)}{4}$$

$$= \frac{19}{24} p_0 L(L-x_{II}) - \frac{p_0(L-x_{II}^4)}{4L^2}$$

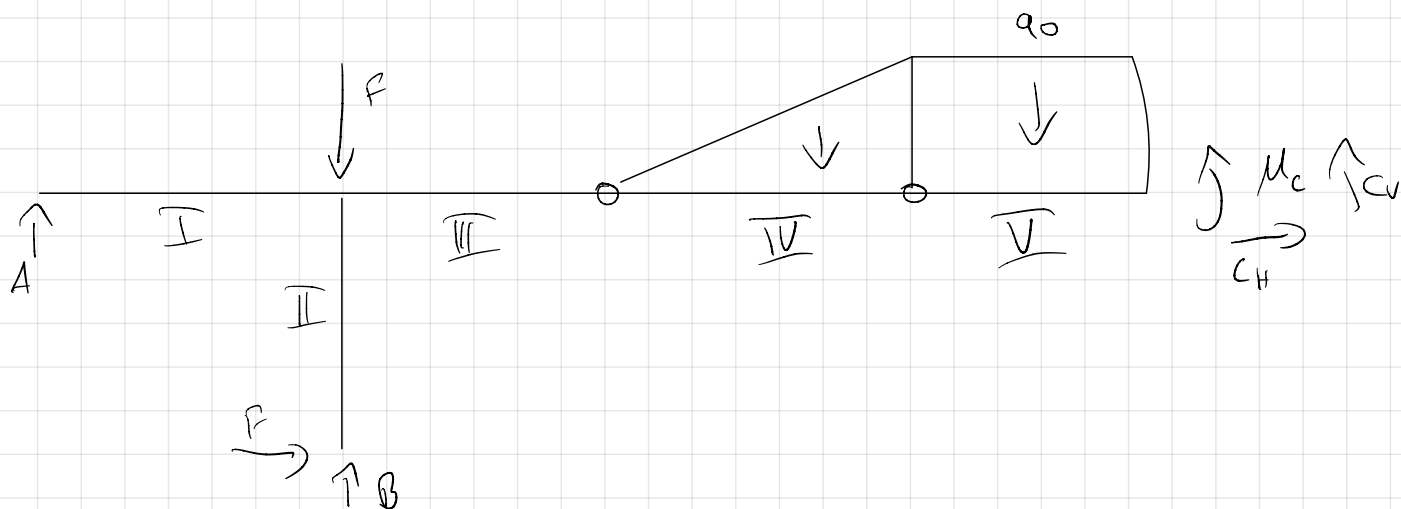


Aufgabe 3

1. Stat. Bestimmtheit

$$f = 3 \cdot 3 - (5 + 4) = 0 \quad \checkmark$$

2.



Auflagerkräfte

$$\sum H = 0 \Rightarrow C_H + F = 0 \Rightarrow C_H = -F$$

TS IV

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow V_2 \cdot l - \frac{1}{2} q_0 l \cdot \frac{2}{3} l = 0$$

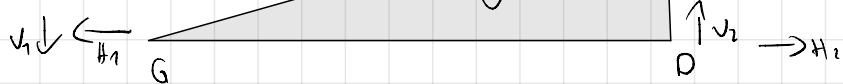
$$V_2 = \frac{q_0 l}{3}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_2 - V_1 - \frac{1}{2} q_0 l = 0$$

$$V_1 = \frac{q_0 l}{3} - \frac{q_0 l}{2} = -\frac{q_0 l}{6}$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_2 - H_1 = 0$$

$$q(x) = \frac{1}{2} q_0 l$$



TS V

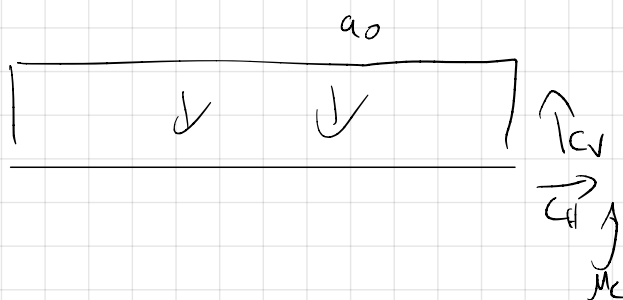
$$\sum V = 0 \Rightarrow C_V - V_2 - q_0 l = 0$$

$$C_V = q_0 l + \frac{q_0 l}{3} = \frac{4}{3} q_0 l$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C + \frac{q_0 \cdot l^2}{2} + V_2 \cdot l = 0$$

$$M_C = -\frac{q_0 l^2}{2} - \frac{q_0 l^2}{3} = -\frac{5}{6} q_0 l^2$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow C_H - H_2 = 0$$



TS I, II u. III

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow B \cdot \frac{L}{2} + F \cdot \frac{L}{2} - F \cdot \frac{L}{2} + V_1 \cdot L = 0$$

$$B = \frac{q_0 L^2}{6} \cdot \frac{2}{L} = \frac{q_0 L}{3} \quad \uparrow_A$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow B + A + V_1 - F = 0$$

$$A = -\frac{q_0 L}{3} + \frac{q_0 L}{6} + F = -\frac{1}{6} q_0 L + F = \frac{5}{6} q_0 L \quad \rightarrow \quad \uparrow_B$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow F + H_1 = 0 \Rightarrow H_1 = -q_0 L$$

Daraus folgt: $H_1 = H_2 = C_H = -q_0 L$

TS I $\uparrow_A$ $Q(x) \downarrow$ $M(x) \rightarrow$

$$\sum H = 0 : N(x) = 0$$

$$\sum V = 0 : A - Q(x) = 0$$

$$Q(x) = \frac{5}{6} q_0 L$$

$$\sum \vec{M} = 0 : M(x) - \frac{5}{6} q_0 L x = 0$$

$$M(x) = \frac{5}{6} q_0 L x$$

TS II

$$\sum V = 0 : N(x) + B = 0$$

$$\Rightarrow N(x) = -\frac{q_0 L}{3}$$

$$\sum H = 0 : Q(x) + F = 0 \Rightarrow Q(x) = -q_0 L$$

$$\sum \vec{M} = 0 : -M(x) + F x = 0 \Rightarrow M(x) = q_0 L \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

TS III

$$\sum H = 0 : N(x) + F = 0 \Rightarrow N(x) = -q_0 L$$

$$\sum V = 0 : A + B - F - Q(x) = 0$$

$$Q(x) = \frac{5}{6} q_0 L + \frac{q_0 L}{3} - q_0 L = \frac{1}{6} q_0 L$$

$$\sum \vec{M} = 0 : M(x) + F \cdot x - A \cdot \left(x + \frac{L}{2} \right) - B \cdot x + \frac{F L}{2} = 0$$

$$M(x) = -F x + A x + \frac{A L}{2} + B x - \frac{F L}{2}$$

$$= -q_0 L x + \frac{5 q_0 L}{6} x + \frac{5 q_0 L^2}{12} + \frac{q_0 L x}{3} - \frac{q_0 L^2}{2}$$

$$= \frac{q_0 L x}{6} - \frac{1}{12} q_0 L^2$$

TS IV

$$\sum H = 0 : N(x) + F = 0 \Rightarrow N(x) = -q_0 L$$

$$\sum V = 0 : A + B - F - \frac{q_0}{2} x - Q(x) = 0$$

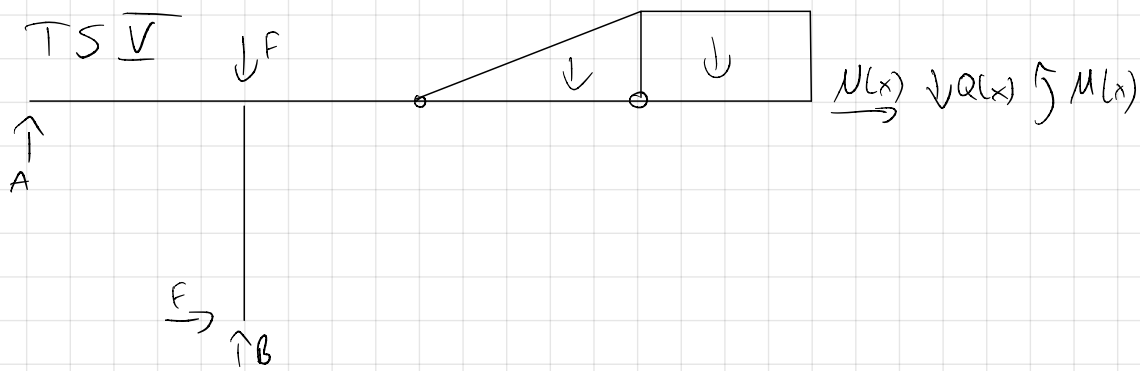
$$\Rightarrow Q(x) = \frac{5}{6} q_0 L + \frac{q_0 L}{3} - q_0 L - \frac{q_0 x}{2}$$

$$= \frac{1}{6} q_0 L - \frac{q_0 x}{2}$$

$$\sum \vec{M} = 0 : M(x) + \frac{q_0}{2} x^2 \cdot x - B \left(\frac{L}{2} + x \right) - A \left(L + x \right) + \frac{F L}{2} + F x = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{q_0}{6L} x^3 + \frac{q_0 L x}{3} + \frac{q_0 L^2}{6} + \frac{5}{6} q_0 L^2 + \frac{5}{6} q_0 L x - \frac{q_0 L^2}{2} - q_0 L x + \frac{q_0 L^2}{2}$$

$$= -\frac{q_0 x^3}{6L} + \frac{1}{6} q_0 L x$$



$$\sum H = 0: N(x) + F = 0 \Rightarrow N(x) = -q_0 l$$

$$\sum U = 0: A + B - F - \frac{q_0 l}{2} - q_0 x - Q(x) = 0$$

$$Q(x) = -q_0 x + \frac{5}{6} q_0 l + \frac{q_0 l}{3} - q_0 l - \frac{q_0 l}{2}$$

$$Q(x) = -q_0 x + \frac{7}{6} q_0 l - \frac{3}{2} q_0 l = -q_0 x - \frac{1}{3} q_0 l$$

$$\sum M = 0: M(x) + \frac{q_0 x \cdot x}{2} + \frac{q_0 l (l+x)}{2} + F \left(\frac{3}{2} l + x \right) + F \frac{l}{2} - B \left(\frac{3}{2} l + x \right) - A (2l+x) = 0$$

$$M(x) = -\frac{q_0 x^2}{2} - \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 x}{2} - \frac{3Fl}{2} - Fx - \frac{Fl}{2} + \frac{q_0 x}{3} + \frac{q_0 l^2}{2} + \frac{5}{3} q_0 l^2 + \frac{5}{6} q_0 x$$

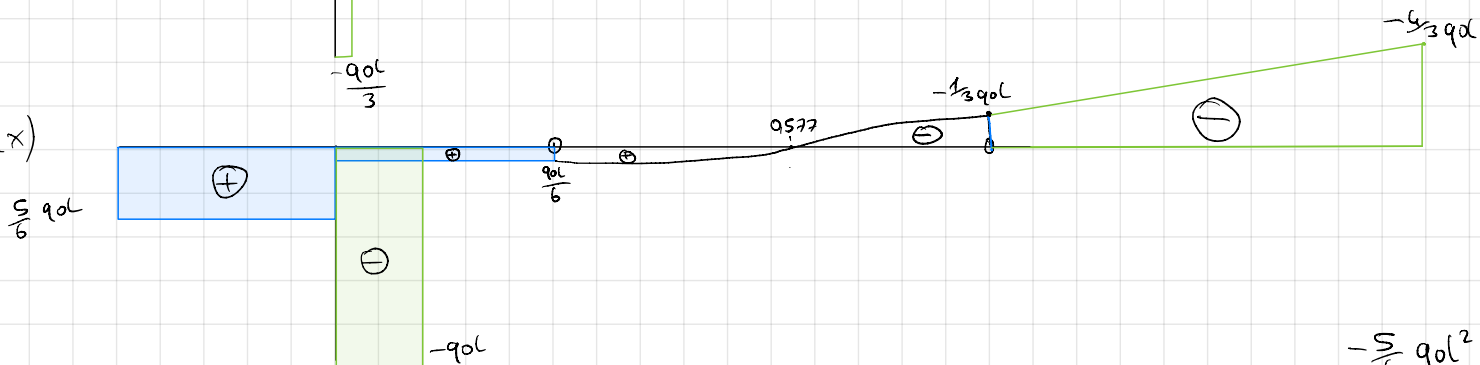
$$= -\frac{q_0 x^2}{2} - \frac{1}{3} q_0 l x$$

3.

$N(x)$



$Q(x)$



$M(x)$

