

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. Differentialgleichungen erster Ordnung

Variation der Konstanten

geg.: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ + AWP

$\rightarrow y = y_p + y_h$

1) homogene Lösung: $y_h = c \cdot e^{-\int f(x)} \quad c \in \mathbb{R}$

2) partikuläre Lösung: $y_p = c(x) \cdot e^{-\int f(x)}$

$\rightarrow$ führt auf $c'(x) = g(x) \cdot e^{\int f(x)}$

$\rightarrow$ integrieren zu $c(x)$, in y_p einsetzen

3) $y = y_p + y_h \rightarrow$ AWP einsetzen, um c zu berechnen

Trennung der Variablen

geg.: $y' = g(x) \cdot h(y)$ + AWP

$- y' \rightarrow \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

- nach y und x sortieren

$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx \quad || \int$

- beide Seiten integrieren, auf eine Seite

Konstante c addieren

$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + c$

- nach y umstellen

- AWP einsetzen

- c in Lösung einsetzen

2. Differentialgleichungen höherer Ordnung

1. homogen:

- linken Teil gleich 0 setzen $\rightarrow$ charakt. Polynom: $y''' + 3y'' + y' + 2y = 0 \rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \rightarrow$ Nullstellen λ_n suchen

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $f_1(x) = e^{\lambda_1 x}, f_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$\lambda_1 = \lambda_2$: $f_1(x) = e^{\lambda x}, f_2(x) = x e^{\lambda x}, f_3(x) = x^2 e^{\lambda x}, \dots$

$y_h = (c_1 + x c_2) e^{\lambda x}$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$: $f_1(x) = e^{\alpha x} \sin(\omega x), f_2(x) = e^{\alpha x} \cos(\omega x)$

$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x))$

$c_n \in \mathbb{R}$

- DGL > 2. Ordnung: Polynomdivision

2. partikulär:

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$

bei $g(x) = f(x) + h(x) \rightarrow$ zwei partikuläre Lsg. bestimmen und addieren

$g(x) = r(x) e^{\mu x}$

$\mu \neq$ Nst.:

$f_p(x) = s(x) e^{\mu x}$ mit $\text{grad } r = \text{grad } s$

$g(x) = 104e^x \rightarrow \mu = 1, \text{grad } r = 0$

$\mu = m$ -fache Nst.:
Resonanzfall

$f_p(x) = x^m s(x) e^{\mu x}$ mit $\text{grad } r = \text{grad } s$

$\rightarrow s(x) = a \rightarrow f_p(x) = ce^x, f_p'(x) = ce^x, f_p''(x) = ce^x$

$\rightarrow y_p$ so oft ableiten wie geg. y

$\rightarrow ae^x + 2ae^x + 10ae^x = 13e^x \rightarrow a = 1$

$\rightarrow$ einsetzen und nach y auflösen

$f_p(x) = e^{\alpha x} (\alpha \cos(bx) + \beta \sin(bx))$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
 $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$f_p(x) = e^{\alpha x} (\alpha \cos(bx) + \beta \sin(bx))$

$g(x) = r(x) e^{\alpha x} \sin(bx)$
 $g(x) = r(x) e^{\alpha x} \cos(bx)$ } Nst. $\in \mathbb{C}$

DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME

geg.: $y' = Ay + h(x)$

typ. Fragestellung: Bestimmen Sie alle reellen Lsg.

1. homogen

$\rightarrow$ EW und EV v_i bestimmen

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $f_h(x) = c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 x}$ mit $c_n \in \mathbb{R}$

- $\lambda_1 = \lambda_2$: $f_h(x) = c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 v_1 e^{\lambda x} + c_2 v_2 e^{\lambda x}$ mit $c_n \in \mathbb{R}$

wenn $v_1 = v_2$: $- B = A - \lambda E$

- v_0 : von v_1 lin. unabhängiger Vektor

- $Bv = (\dots), B^2 v = (\dots)$, bis $B^k v = 0$ k : Anzahl der Lösungen

- $f_{c1}(x) = e^{\lambda x} \left(\frac{x^0}{0!} B^{k-1} v \right)$ meist bekannte Lösung

$f_{c2}(x) = e^{\lambda x} \left(\frac{x^1}{1!} B^{k-1} v + \frac{x^0}{0!} B^{k-2} v \right)$

$\vdots$

$f_{ck}(x) = e^{\lambda x} \left(\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} B^{k-1} v + \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} B^{k-2} v + \frac{x^0}{0!} B^0 v \right)$

- $\lambda = a + ib, v = u + iw$

$\rightarrow f_1(x) = e^{\alpha x} (\cos(bx)u - \sin(bx)w)$

$f_2(x) = e^{\alpha x} (\sin(bx)u + \cos(bx)w)$

Eigenvektor von $\lambda \in \mathbb{C}$: Multiplikation mit kompl. konj.

z.B. $\begin{pmatrix} 4-3i & -5 \\ 5 & -4-3i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 25 & -5(4+3i) \\ 5 & -4-3i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 25 & -20-15i \\ 5 & -4-3i \end{pmatrix}$

2. partikulär

- $W_{\text{sys}}(x) = (f_1 \ f_2 \ f_3)$

Spalten sind die Lösungen aus homogenem Teil

- $W_{\text{sys}}(x)^{-1} = W_{\text{sys}}(0)^{-1} \cdot W_{\text{sys}}(-x) \cdot W_{\text{sys}}(0)^{-1}$

bei $\mathbb{R}^2$: $W_{\text{sys}}(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad W_{\text{sys}}(x)^{-1} = \frac{1}{\det(W_{\text{sys}})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

- $c'(x) = W_{\text{sys}}(x)^{-1} \cdot h(x)$ $h(x)$ ist die Störfunktion

- $c_n = \int c_n' dx$ einzelne Reihen integrieren

$c_2 = \int c_2' dx$

- c_1, c_2, c_3 in Lösung des homogenen Teils einsetzen $\rightarrow$ partikulärer Teil

- $y = f_h(x) + f_p(x)$

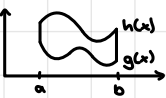
MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS

Normalbereiche

begl. x-Achse

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx$$



begl. y-Achse

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y) dx \right) dy$$



Länge einer Kurve

$$L(K) = \int_a^b |C'(t)| dt$$

Schwerpunkt

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{V} \iiint x dx dy dz \\ y_s &= \frac{1}{V} \iiint y dx dy dz \\ z_s &= \frac{1}{V} \iiint z dx dy dz \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = 0 \text{ bei Rotationskörpern}$$

Zirkulation in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \quad Z(g,K) &= \int_K g(s) ds = \iint_S \text{rot } g dx dy \quad \text{GREEN} \\ \text{rot } g &= 0 \rightarrow Z(g,K) = 0 \text{ (wirbelfrei)} \\ \text{rot } g(\vec{y}) &= \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \mathbb{R}^3 \quad Z(g,S) &= \int_S g(s) ds = \iint_{\partial S} \text{rot } g \cdot \vec{x}_r \times \vec{x}_\varphi dr d\varphi \quad \text{STOKES} \\ \text{rot } g(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ausfluss in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \quad A(g,K) &= \int_K g nds = \iint \text{div } g dx dy \quad \text{GAUß} \\ \text{div } g(\vec{y}) &= \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \mathbb{R}^3 \quad A(g,S) &= \int_S g nd\Omega = \iiint_V \text{div } g dx dy dz \quad \text{GAUß} \\ \text{div } g(\vec{x}) &= \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \\ \text{div } g(\vec{x}) &= 0 \rightarrow \text{quellfrei} \quad \text{div } g(\vec{x}) > 0 \rightarrow \text{Quelle} \quad \text{div } g(\vec{x}) < 0 \rightarrow \text{Senke} \end{aligned}$$

Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F(S) &= \int_S 1 d\Omega = \iint_S |\vec{x}_r \times \vec{x}_\varphi| dr d\varphi \\ &= \frac{1}{\text{rot } g} \iint_S \text{rot } g dx dy \\ &= \frac{1}{\text{rot } g} Z(g,K) \quad K: \text{Rand} \end{aligned}$$

Volumen

$$\begin{aligned} V(K) &= \iiint_K 1 dx dy dz \\ \text{Drehkörper:} \\ D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, -r(x) \leq y \leq r(x)\} \\ V &= \pi \int_a^b r(x)^2 dx \\ V_{\text{Pyramide}} &= \frac{1}{3} Ah \quad \begin{array}{l} A: \text{Grundfläche} \\ h: \text{Höhe} \end{array} \\ V_{\text{Kugel}} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ V_{\text{Zylinder}} &= \pi r^2 h \\ V_{\text{Kegel}} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{aligned}$$

Parametrisierung in Polarkoordinaten

- Kreis** $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$
 $\rightarrow \vec{x} = [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$
- Ellipse** $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq R^2\}$
 $\rightarrow \vec{x} = [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar \cos(\varphi) \\ br \sin(\varphi) \end{pmatrix}$
- Zylinder** $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$
 $\rightarrow \vec{x} = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$
 mit Fkt.det $r dr d\varphi dz$
- Kugel** $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$
 $\rightarrow \vec{x} = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$
 mit Fkt.det $r^2 \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta$ $\rightarrow \frac{\pi}{2}$ bei Halbkugel
- Kegel** $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0\}$
 $\rightarrow \vec{x} = [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ \frac{r}{R} \cdot r \end{pmatrix}$
 in kartesischen Koordinaten: $\vec{x}_K = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$
- Ellipsoid** $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 \leq R^2\}$
 $\rightarrow \vec{x} = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ br \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ cr \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a^2 u_{xx} + r(x,t) \quad \left. \begin{array}{l} \text{+ Randbedingungen} \\ \text{+ Anfangsbedingung} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } r(x,t) = 0 \text{ homogen} \\ \text{für } r(x,t) \neq 0 \text{ inhomogen} \end{array}$$

- homogene WLG:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x) \cdot s(t) \\ v(x) &= y'' + \lambda y = 0 \rightarrow p(x) = x^2 + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda} \\ 1, \lambda < 0: & v(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda} x} \\ 2, \lambda = 0: & v(x) = c_1 + c_2 x \\ 3, \lambda > 0: & v(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} c_n \in \mathbb{R}$$

$$s(t) = re^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad r \in \mathbb{R}$$

- inhomogene WLG:

- homogene Randbedingung

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 = u(L,t) \\ u(x,0) &= 0 \text{ für } x \in [0, L] \\ 1, \tilde{b}_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L r(x,t) \sin(\frac{n\pi}{L} x) dx \\ &\rightarrow b_n(t) = \int_0^L \tilde{b}_n(t) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} dt + A_n \quad A_n \in \mathbb{R} \text{ (Integrationskonstante)} \\ 2, u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \\ 3, A_n &\text{ durch Einsetzen der Anfangsbedingung ermitteln} \\ 4, A_n &\text{ in } u(x,t) \text{ einsetzen} \end{aligned}$$

- inhomogene Randbedingung

$$\begin{aligned} u(0,t) &= g(t) \quad u(L,t) = h(t) \\ u(x,0) &= f(x) \text{ für } x \in [0, L] \\ 1, \tilde{f}(x,t) &= r(x,t) - (1 - \frac{x}{L}) g'(t) - \frac{x}{L} h'(t) \\ 2, \tilde{f}(x) &= f(x) - (1 - \frac{x}{L}) g(0) - \frac{x}{L} h(0) \\ &\rightarrow \text{homogene Randbedingungen für } \tilde{u}_t = a^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{f}(x,t), \text{ siehe oben} \\ 3, u(x,t) &= \tilde{u}(x,t) + (1 - \frac{x}{L}) g(t) + \frac{x}{L} h(t) \end{aligned}$$

Wellengleichung

d'Alembertsche Formel

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + r(x,t) \\ u(x,t) &= \frac{1}{2} (f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \\ &\rightarrow \text{zwei Mal nach } x \text{ bzw. } t \text{ ableiten und vergleichen} \end{aligned}$$

FOURIER-REIHEN Periode $T = 2L$

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx)$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx) dx \quad \text{gerade Fortsetzung}$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx) dx \quad \text{ungerade Fortsetzung}$$

wenn z.B. $a_j = \frac{1}{j-1} \rightarrow a_n$ extra ausrechnen, $a_n + \sum_{j=2}^{\infty} a_j \cos(jx)$

Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{j=1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2)$$

$$c_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-ik\frac{\pi}{L}x} dx \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

zuerst a_0 !

$f(x)$ gerade $\rightarrow f(x) = f(-x)$
 $\rightarrow$ achsensymmetrisch $\rightarrow b_j = 0$

$f(x)$ ungerade $\rightarrow -f(x) = f(-x)$
 $\rightarrow$ punktsymmetrisch $\rightarrow a_j = 0$

Mischung aus Punkt- & Achssymmetrie

z.B. $f(x) = x(x + \pi) = x^2 + \pi x$ gerade ungerade

$\rightarrow$ aufteilen, dann Reihen addieren

$$\int \sin^2(x) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]$$

$$\int \cos^2(x) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]$$

Fallunterscheidungen

$$\cos(j\pi) = (-1)^j$$

$$\sin(j\pi) = 0$$

$$\cos((2j+1)\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\sin((2j+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^j$$

$$\int \tan(x) dx = [-\ln|\cos(x)|]$$

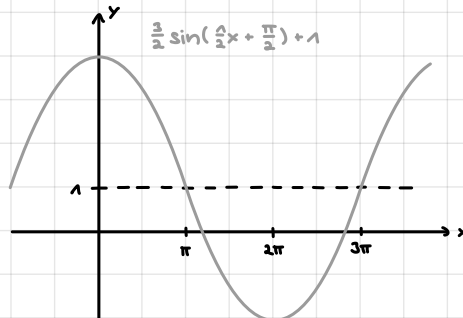
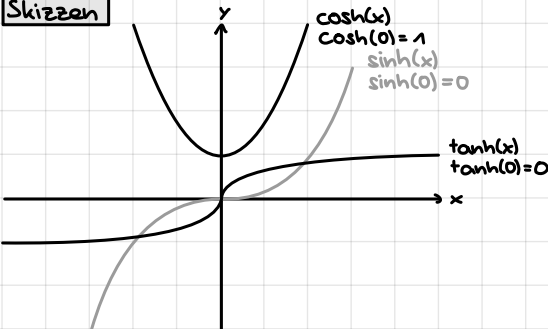
Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(kx) dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } n=k=0 \\ \pi & \text{für } n=k \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(jx) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \sin(kx) dx = \begin{cases} \pi & \text{für } n=k \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Skizzen



um $3/2$ gestreckt, $T = \frac{2\pi}{1/2}$

Verschiebung

um $\frac{\pi/2}{1/2}$ nach links

um 1 nach oben

Grenzwerte

f ist bis auf endlich viele Ausnahmestellen

x_0 in $[-\pi, \pi]$ mit endlichen rechts-

und linksseitigen Grenzwerten stetig diffbar

$\Rightarrow$ 1, Die Fourier-Reihe konvergiert an jeder

Stelle x , an der f stetig ist, gegen $f(x)$

$\rightarrow$ Sprung

2, An einer Unstetigkeitsstelle x_0 von f

konvergiert die Fourier-Reihe von f gegen

das arithmetische Mittel:

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \right)$$

LAPLACE-TRANSFORMATION

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

geg.: $y'' + y' + y = h(t)$ $f(0) = \dots$ $f'(0) = \dots$

1, auf beiden Seiten $\mathcal{L}(\dots)$ anwenden

2, durch $F(s)$ -Ausdrücke ersetzen und AWP einsetzen

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf'(0) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f^{(n-1)}(0) - s^{n-2} f^{(n-2)}(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0)$$

3, nach $F(s)$ auflösen

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $s > a$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

Faltung

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$

Dämpfung: $\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s-a)$

Streckung: $\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

Additionstheoreme

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$= 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

$$\sin(z+w) = \cos(z)\sin(w) + \cos(w)\sin(z)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$$

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$$

Hyperbolicus

$$\cosh(x)\sinh(x) = \frac{1}{2}\sinh(2x)$$

$$\sinh(x)\cosh(y) = \frac{1}{2}(\sinh(x+y) - \sinh(y-x))$$

$$\sinh(x)\cosh(x) = \frac{1}{2}(\cosh(x+y) + \cosh(y-x))$$

$$\sinh(x)\sinh(y) = \frac{1}{2}(\cosh(x+y) - \cosh(y-x))$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) + 1)$$

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ln-Gesetze

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$$

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$$

$$\ln(u^v) = v \cdot \ln(u)$$

$$\ln(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \cdot \ln(u)$$

(Grenz-)Werte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(1) = 0$$

$$\sinh(0) = 0$$

$$\cosh(0) = 1$$

$$\arctan(0) = 0$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Integration

partiell: $\int f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)] - \int f(x) \cdot g'(x) dx$

Substitution: $\int f(x) dx = \int f(x(t)) x'(t) dt$

$$\int_a^b f(x(t)) x'(t) dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = [A \cdot \ln|x-a|]$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \left[\frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \right] \quad \text{für } k > 1$$

$$\int \frac{Cx + D}{(x^2 + \alpha x + \beta)^k} dx = \frac{C}{2} \left(\int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^k} dx \right) - \int \frac{D - \frac{C\alpha}{2}}{(x^2 + \alpha x + \beta)^k} dx$$

$$\int \frac{2x + \alpha}{x^2 + \alpha x + \beta} dx = [\ln|x^2 + \alpha x + \beta|]$$

$$\int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^k} dx = \left[\frac{-1}{(k-1)(x^2 + \alpha x + \beta)^{k-1}} \right] \quad \text{für } k > 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha x + \beta} dx = \left[\frac{1}{\Delta} \arctan\left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\Delta}}\right) \right] \quad \Delta = \alpha^2 - 4\beta$$

$f(x)$	x^a	$\sqrt{x}$	b^x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$\int f(x) dx$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{b^x}{\ln(b)}$	$\ln x $	$\tan(x)$	$\arctan(x)$	$\arcsin(x)$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\cosh(x)}$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\ln \cos(x) $

R	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	2π
D	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0