

Wintersemester 2020/2021 – Übung 1

Übungsaufgaben zur Zeitbereichsmethodik

Übungsaufgabe 1.1 Entkopplung nach Falb/Wolovich

Für das MIMO-System Σ_γ mit Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ soll eine entkoppelnde Zustandsrückführung der Form $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}\mathbf{x}(t) + \mathbf{M}\mathbf{w}(t)$ entwickelt werden.

$$\Sigma_\gamma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6\gamma - 2 & -4\gamma \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t), & t > 0 \quad \text{AB: } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Charakterisieren Sie die Stabilität des Systemverhaltens in Abhängigkeit des Parameters $\gamma \in \mathbb{R}$.
- Berechnen Sie auch die komplexe Übertragungsmatrix (ÜTM) $\mathbf{G}_{uy}(s) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_{uy}(s)\mathbf{U}(s)$. Welche Einträge sind für die Verkopplung der Ein- und Ausgänge verantwortlich? Gibt es Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$, für die keine Verkopplung besteht?

Hinweis: Für ein System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ gilt für die komplexe ÜTM von $\mathbf{u}$ nach $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.$$

- Für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ ist das System Σ_γ steuerbar?
- Prüfen Sie mit der Kopplungsmatrix $\mathbf{D}^*$ ob das Eingangs-Ausgangs-Verhalten entkoppelbar ist. Hängt diese Eigenschaft vom Parameter γ ab? Bestimmen Sie die Relativgrade r_i für jede Ausgangsgröße $y_i(t)$.
- Berechnen Sie ein entkoppelndes Regelgesetz der Form $\mathbf{u} = -\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{M}\mathbf{w}$ nach Falb/Wolovich so, dass alle Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\lambda = -\gamma$ liegen und jede Führungsgröße $w_i(t)$ nur den zugehörigen Ausgang $y_i(t)$ beeinflusst.
- Geben Sie die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises an und bestimmen Sie damit die komplexe ÜTM $\mathbf{G}_{wy}(s) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_{wy}(s)\mathbf{W}(s)$.

Übungsaufgabe 1.2 Reduzierter Beobachter

In dieser Aufgabe soll für das folgende dynamische System ein Zustandsbeobachter mit reduzierter Ordnung ausgelegt werden:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), & t > 0 \quad \text{AB: } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. Ist das Systemverhalten asymptotisch stabil? (*Hinweis:* Hurwitz-Kriterium).
- Überprüfen Sie die Beobachtbarkeit des Systems mithilfe der Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}$.
- Entwerfen Sie eine möglichst einfache Zustandstransformation (Sie benötigen später die Inverse Transformationsmatrix $\mathbf{P}^{-1}$!)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ? \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{x} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} r \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

um messbare und nicht-messbare Zustände zu trennen und bestimmen Sie die transformierten Systemmatrizen.

- Bestimmen Sie die reduzierte Beobachter-DGL $\dot{\rho}(t) = \mathbf{A}_\rho \rho(t) + \mathbf{B}_\rho u(t) + \mathbf{Y}_\rho \mathbf{y}(t)$ und die resultierende Schätzgleichung $\hat{r} = f(\rho, \mathbf{y})$ für die nicht messbaren Zustände in Abhängigkeit der Beobachterverstärkungen $\mathbf{L} = [L_{11}, L_{12}]$.
- Bestimmen Sie $\mathbf{L}$ so, dass der Beobachterfehler mit dem Eigenwert bei $\lambda = -3$ abklingt. Welchen Vorteil hat die Wahl $L_{11} = 0$ für die Beobachtergleichung $\dot{\rho} = \mathbf{A}_\rho \rho + \mathbf{B}_\rho u + \mathbf{Y}_\rho \mathbf{y}$?
- Bestimmen Sie geeignete Matrizen $\mathbf{C}_\rho$ und $\mathbf{D}_\rho$ um eine Schätzung für den Originalzustand zu erhalten: $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}_\rho \rho(t) + \mathbf{D}_\rho \mathbf{y}(t)$.

Übungsaufgabe 1.3 Folgeregelung und Störkompensation

Das System zweiter Ordnung mit dem Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

soll einer harmonischen Anregung folgen. Daher soll im Folgenden eine asymptotische Folgeregelung konstruiert werden.

- Wie lauten die Eigenwerte des Systems. Für welche Parameterwerte ist das System stabil?
- Bestimmen Sie die Steuerbarkeitsmatrix des Systems. Für welche Parameterwerte ist das System steuerbar?
- Berechnen Sie den relativen Grad r des Systems und die nötigen Ableitungen des Ausgangs.
- Berechnen Sie eine Eingangstransformation $u(v, \mathbf{x})$, sodass der virtuelle Eingang $v(t)$ direkt auf $y^{(r)}(t)$ wirkt.
- Das System soll nun einer harmonischen Schwingung mit der Amplitude σ und der Kreisfrequenz ω_0 folgen. Bestimmen Sie die Referenztrajektorie $y_d(t)$ mit $y_d(0) = 0$, deren nötigen Ableitungen und berechnen sie die Vorsteuerung. Wählen Sie die Stabilisierungsverstärkung so, dass die Fehlerdynamik die Eigenwerte $\lambda_1 = -7$ und $\lambda_2 = -4$ besitzt.
- Auf die rechte Seite der System-DGL wirkt nun zusätzlich die meßbare Störung $\mathbf{E}z(t)$ mit $\mathbf{E} = (e_1, e_2)^\top$. Für welche e_1, e_2 ist die Störung vollständig kompensierbar? Bestimmen Sie eine Störgrößenaufschaltung u_z um den Störeinfluss zu minimieren.
- Geben Sie die gesamte Reglerstruktur, bestehend aus Stabilisierung, Vorsteuerung und Störgrößenaufschaltung, an.