Fourier

$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$; komplexe 2π-periodisch

allgemein: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$ ← gerade Teil

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n\omega x)\,dx$ ← ungerade Teil

$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ mit $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx$

- f ist reellwertig, wenn gilt $c_{-k} = \bar{c}_k$, dann gilt:

$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ $k \in \mathbb{N}$

bzw. $a_0 = 2c_0 \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad b_k = i(c_k - c_{-k})$

Sonderfälle:

gerade → reine Kosinusreihe

↳ $b_n = 0$

↳ $a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$

↳ $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$

ungerade → reine Sinusreihe

↳ $a_n = 0$ → $a_n = 0 \; n \in \mathbb{N}_0$

↳ $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

↳ $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} f(x)\sin(n\omega x)\,dx$ → Def.-Lücke → b_1

Vereinfachungen:

$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$-\cos(n\pi) = (-1)^{n+1} = -(-1)^n$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\frac{\pi}{2})$

$\sin(\pi n x)\sin(\pi x) = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0 & \text{ungerade} \\ (-1)^k & \text{gerade} \end{cases}$ → $2k$, $2k-1$ → $\sum_{k=1}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 1 & n = 4k+1 = 4k-3 \\ -1 & n = 4k-1 = 4k+3 \end{cases}$

wenn in Lösung Σ mehrmal $(-1)^k$ → dann $l = 2k$ und $l = 2k-1$ → $\sum_{l=0}$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\sin(n\pi) = 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \\ 1 & n = 4k \\ -1 & n = 2+4k \end{cases}$

Stam-Funktionen: Bed.: $a_0 = 0$

$f(x) \sim \sum a_k \cos(kx) + \sum b_k \sin(kx)$

$F(x) \sim \sum \frac{a_k}{k}\sin(kx) + \sum -\frac{b_k}{k}\cos(kx)$

$f_1 = \sin x$

$a_{1,n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad b_{1,n} = \delta_{1,n} = \begin{cases} 1, n=1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}$

Die Funktion ist stetig diff.bar. mit endlichen links- und rechtsseitigen Grenzwerten für f und f' im Intervall $(-\pi, \pi)$ und konvergiert deshalb gegen $f(x)$. Lücken in den Punkten x_0

↳ Mittelwert

⚠ ist a_k/b_k abhängig von (un-) geraden Zahlen für $k \to 2$ Lösungen

→ $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_k/b_k \text{ mit } k = 2k+1\right] \cdot \cos(2k+1\omega x)$ ← cos/sin

$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k/b_k \text{ mit } k = 2k\right] \cdot \cos(2k\omega x)$

evtl. **verschieben:** $f(x) = \underbrace{g(x)}_{\text{rechnen und am Ende } -1} - 1$

Grenzwert: (1) Die Fourier Reihe an jeder Stelle wo f stetig gegen $f(x)$

(2) bei Unstetigkeit x_0 von f konvergiert Fourier-Reihe gegen arithmetisches Mittel $\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+}(f(x)) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right)$

Die Funktion f ist stetig diff.bar in den Intervallen $(\quad)$ $(k \in \mathbb{Z})$ mit endlich links- und rechtsseitigen Grenzwerten für f in allen Punkten $(kT \mid k \in \mathbb{Z})$. Da die Funktion f in dem Bereich $(T \cdot k - T, kT)$ stetig, konvergiert die Fourier Reihe in diesem Bereich gegen $f(x)$. In den Punkten $\{Tk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe —, sodass die Reihe f gg. arith. Mittel konvergiert.

hilfreiche Integrale:

$\int \sin x \cos x = \left[\frac{1}{2}\sin^2(x)\right] = \left[-\frac{1}{2}\cos^2(x)\right]$

$\int \sin^2(x) = \left[-\frac{\sin(2x) - 2x}{4}\right]$

$\int x \cdot \sin(ax) = \left[\frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}\right]$

$\int \frac{1}{x} = [\ln|x|]$

$\int \frac{1}{2+x^2} = \left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$\int 6e^{(x^2)}x = \left[3e^{x^2}\right]$

$\int b^x = \left[\frac{b^x}{\ln(b)}\right]$

$\int \frac{1}{1-x^2} = [\operatorname{arctanh} x]$

$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin(x)]$

$\int \cos(2x)\sin(2x) = \left[-\frac{\cos(4x)}{8}\right]$

$\int \sin^4(ax) = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax)\right]$

$\int \ln(x) = [x \cdot \ln|x| - x]$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)} = [\tan(x)]$

$\int \frac{1}{(x+a)^2} = \left[-\frac{1}{x+a}\right]$

$\int \tan(x) = [-\ln|\cos(x)|]$

$\int \sin(x)\cos^4(x) = \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]$

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = [\arccos(x)]$

$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} = [\tanh x]$

$\int \sqrt{u'} = \int u^{1/2} = \frac{2}{3}u^{3/2}$

Ableitungen:

$\frac{d}{dx}\sin(2x) = 2\cos(2x)$

$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}\cot(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$

$\frac{d}{dx}x^x = x^x \cdot (1 + \ln(x))$

$\frac{d}{dx}\sin^2(x) = 2\cos x \sin x$

$\frac{d}{dx}\cos^2(x) = -2\cos x \sin x$

$\frac{d}{dx}a^x = \ln|a| \cdot a^x$

$\frac{d}{dx}\sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$

DGL-Systeme gegeben in $y' = Ax + h(x)$

1) homogene Lösung
2) Wahl beliebigen $\vec{v}$
3) Av berechnen und auf lin. Abh. testen
   ↳ wenn ja zu (5)
   ↳ wenn nein zu (4)
4) A^2v berechnen und auf lin. Abh. testen
   ↳ wenn ja → (5)
   ↳ wenn nein d-mal usw bis $A^n v$
5) Koeffizientenmatrix → Nullzeile

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \square & \square & & v \\ \square & \square & & Av \\ \square & \square & & A^2v \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \square & \square & & v \\ \square & \square & & Av \\ 0 & 0 & & \square \end{array}\right]$$

ie. $A^2v - 2Av + v = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\rightarrow \lambda_{1/2} = \dots$

6) $q_1 = e^{\lambda_1 x}$; $q_2 = e^{\lambda_2 x}$ (algebraische Vielfachheit!!)

7) $M(x) = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & q_n \\ q_1' & & \\ \vdots & \ddots & \\ q_1^{(n)} & & q_n^{(n)} \end{pmatrix}$

8) setze $x_0 =$ — (vzgw. 0)

9) $\left((M(x_0))^T\right)^{-1}$

10) $f_1(x) = \left(v \mid Av \mid \dots \mid A^{d-1}v\right)\left(M(x_0)\right)^{-T}\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

11) f_1 ; $f_2 = f_1'$; $\dots$

12) allg., homogene Lösung $\quad c_n \in \mathbb{R}$

13) inhomogene Lösung

14) $W(x) = \left(f_1(x) \mid f_2(x) \mid \dots \mid f_n(x)\right)$

$W^{-1}(x) = W^{-1}(0) \cdot W(-x) \cdot W^{-1}(0)$

15) $c'(x) = W^{-1}(x) \cdot h(x)$

16) $c(x) = \int W^{-1}(x) \cdot h(x)\, dx$

17) $f_p = W(x) \cdot c(x)$

18) SuPeRpOsItIoN

Alternative:

EW von A bestimmen
↓
λ_n

wenn hier Pol z, dann $M(x)$ ist 2×2 und nur q_1 q_2

$v = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ ie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wähle → f_1

$v_2 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ ie $\begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$ wähle → f_2

oder

$f_h = \sum_{c_n} EV_n \cdot e^{\lambda_n} + \dots$

$Av = \lambda v \rightarrow y(t) = e^{\lambda t} v$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Potenzgesetze: $a^n \cdot a^n = a^{n+n}$

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Produktregel:

$f(x) = u(x)\, v(x)$

$f'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u$

Quotientenregel:

$f(x) = \frac{u}{v}$

$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Partialbruchzerlegung: $\quad NG > ZG$

→ Nenne. in Lin.Fakt.

$$\frac{x}{(x-3)(x-1)^2(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2-2)} + \frac{Fx+G}{(x^2-2)^2}$$

Aufgangswertprobleme:

mit inhomogen: $f(x_0) = v$ setzen und $c_1 \dots c_n$ berechen

homogen: v setzen und Ende bei (10)

Inverse 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Analysis

Flächeninhalt:

$F(S) = \int_S 1 \, dO = \iint |\phi_r \times \phi_\varphi| \, dr\,d\varphi = \frac{1}{rot\,g} \iint_S rot\,g \, dx\,dy = \frac{1}{rot\,g} z(g,k)$

1) Parametrisierung bestimmen

$\phi: [\,0, r\,] \times [\,0, 2\pi\,] \mapsto \mathbb{R}^3, \; (r,\varphi) \mapsto (\;\;)$

2) Ableitung berechnen $\phi_r + \phi_\varphi$

3) Normale berechnen → $\phi_r \times \phi_\varphi$ und $|\phi_r \times \phi_\varphi|$

4) Einsetzen $\int_0^r \int_0^{2\pi} |\phi_r \times \phi_\varphi| \, d\varphi\,dr$

rotation

$\mathbb{R}^2$: $rot = \frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dy}$

$\mathbb{R}^3$: $rot = \left(\frac{df_3}{dy} - \frac{df_2}{dz}; \frac{df_1}{dz} - \frac{df_3}{dx}; \frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dy}\right)$

Divergenz:

$div = \frac{f_1}{dx} + \frac{f_2}{dy} + \frac{f_3}{dz}$

partielle Integration:

$\int f' \cdot g \, dx = [f \cdot g] - \int f \cdot g' \, dx$

wenn Kreisteile → Kreiskoord.

$\iint_K \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\int \sin(\;) \, r \, dr\,d\varphi$

Zirkulation:

$Z(g,s) = \int_s g \cdot ds = \int_{C_1}^{C_2} g(C(t)) \cdot C'(t) \, dt$ (Randparametrisierung)

$\mathbb{R}^2$: Satz von Green: $Z(g,s) = \int_s g(s) \cdot ds = \iint rot\,g \, dx\,dy$

$\mathbb{R}^3$: Satz von Stokes: $Z(g,s) = \int_s g(s) \cdot ds = \iint rot\,g \cdot n \, dO = \iint (rot\,g \circ \phi)(\phi_r \times \phi_\varphi) \, dr\,d\varphi$

Vorgehensweise: 1) rot berechnen 2) Parametrisierung bestimmen $\phi: [\;] \times [\;] \mapsto \mathbb{R}^3$

3) Parametrisierg in rot einsetzen

4) Berechne

Schwerpunkt:

$s_x = \frac{1}{V} \iiint_K x \, dx\,dy\,dz$

Ellipse:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ → $\begin{pmatrix} a \cdot r \sin \\ b \cdot r \cos \end{pmatrix}$

Parametrisierg:

$\mathbb{R}^2$:

Kreis: $\{x,y \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le r^2\}$

$\phi \to \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ Funktionaldet.: r

Ellipse: $\phi \to \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos\varphi \\ b \cdot r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$ → F-Det. berechnen

Rechteck: $M: [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$

$x_1 \le x \le x_2, \; y_1 \le y \le y_2$

Archimedes Spirale: $x = \varphi\cos\varphi$, $y = \varphi \sin\varphi$

$r\,[0,1] \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

$\mathbb{R}^3$: Zylinder: $\phi \to \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

EUNKTIONAL-DET.:

$|\det(J\phi)|$

Jacobi:

$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} f_1 \to x & f_1 \to y \\ f_2 \to x & f_2 \to y \end{pmatrix}$

$J(f \circ g) = Jf\left(g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot Jg\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Ausfluss:

$A(g,k) = \int_K g \cdot n \, ds = \int_{C_1}^{C_2} g(C(t)) \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} dt$

$\mathbb{R}^2$: $A(g,k) = \iint div\,g \, dx\,dy$

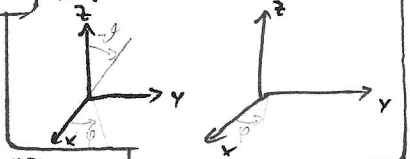
$\mathbb{R}^3$: $A(g,k) = \iiint div\,g \cdot Funktdet. \, dx\,dy\,dz$

1) Parametrisierg bestimmen 2) div(g) bestimmen

3) ϕ in div g einsetzen: $div(g) \circ \phi$

4) $A(g,k) = \iiint (div\,g \circ \phi) \cdot Fdet. \, dr\,d\varphi\,dz$

Kugel: Zylinder:



Kegel:

$T = \{x,y,z \in \mathbb{R}^3 / \; x^2+y^2-z^2 = 0, \; 0 \le z \le 1\}$

$D = \{x,y,z \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1, \; z = 1\}$

$\phi \to \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ $r\,[0,t] \quad \varphi\,[0,2\pi] \quad t\,[0,1]$

Bei Integrationen in nicht-kartesischen Koordinaten FUNKTIONALDETERMINANTE

a	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6	2π
°	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
sin	0	1/2	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1	-√3/2	-√2/2	-1/2	0
cos	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1	-√3/2	-√2/2	-1/2	0	1/2	√2/2	√3/2	1
tan	0	1/√3	1	√3	-	-√3	-1	-1/√3	0	1/√3	1	√3	-	-√3	-1	-1/√3	0

Länge Parametrisierg:

$L(W) = \int |C'(t)| \, dt$

09/2019 A1:

Mengen:

$A \cap B$ Schnitt

$A \setminus B$ A ohne B

$A \vee B$ A oder B

$A \wedge B$ A und B

$A \cup B$ Vereinigung

$A \Rightarrow B$ folgt

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \; x^2+y^2+z^2 = 1, \; z \ge 0\}$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \; x^2+y^2+(z-1)^2 = 2, \; z \le 0\}$

a) Param. in kart. Koordinaten

$\phi_A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \; x^2+y^2 \le 1\} \to \mathbb{R}^3 \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$

$\phi_B: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \; x^2+y^2 \le 1\} \to \mathbb{R}^3 \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-\sqrt{2-x^2-y^2} \end{pmatrix}$

b) Volumen des eingeschlossenen Körpers

→ Integration in z-Richtung $V(K) = \int_K dV = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{1-\sqrt{2-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} + \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} -1 + \sqrt{2-x^2-y^2} \, dy\,dx$

$= \int_{1}^{1} \int_{2\pi} r \cdot \sqrt{1-r^2} \, d\varphi\,dr + \int_{1}^{2\pi} \int_{2\pi} \left(-1+\sqrt{2-r^2}\right) r \, d\varphi\,dr \quad \ldots$

Ellipsoid:

$K = \{x,y \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+4y^2 \le 1, \; 1 \le z \le 3\}$

$\phi \to \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ \frac{r}{2}\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

Paraboloid:

$z = 9-x^2-y^2, \; z \ge 0$

$z = 9-r^2$

Torus:

$K = \left\{\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right.$

$\phi \to \begin{pmatrix} R + r\cos\varphi\cos\vartheta \\ R + r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} r\,[0,r] \\ \varphi\,[0,2\pi] \\ \vartheta\,[0,2\pi] \end{matrix}$

Kugel:

$K = \{x,y,z \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9\}$

$\phi \Rightarrow \begin{pmatrix} r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$

vereinigte Menge:

$\phi = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad z \in [z_{m_1}, z_{m_2}]$

DGL n-te Ordnung:

1) homogene Gleichung betrachten
2) charakteristisches Polynom aufstellen
3) Nullstellen finden
3.1) reelle Nullstelle mit Vielfachheit n
$g_1 = e^{\lambda_1 x} * g_1 = x e^{\lambda_1 x} \ldots$
3.2) komplexe Formelsammlung $x = a \pm bi$
$g_1 = e^{ax}\cos(bx)$; $g_2 = e^{ax}\sin(bx)$

} homogene Lösung

4) $f_h(x) = \sum_i g_i x_i$ mit $c_n \in \mathbb{R}$
5) partikuläre Lösung
6) $f_{p,i}$ allgemein aufstellen $\ldots = h_1(x)$
7) $h(x) \Rightarrow$ Störglied $\Rightarrow \mu = \alpha + \beta i$ bestimmen

$h(x)$	$n \cdot e^{\alpha x}$	$n \cdot x e^{\alpha x}$	Polynom $\Rightarrow \mu = 0$
N. keine NS	$a \cdot e^{\alpha x}$	$(a+bx)e^{\alpha x}$	$\sum_{j=0}^{k} A_j x^j$
N. einfache NS	$ax e^{\alpha x}$	$(a+bx)x e^{\alpha x}$	m-fache NS: $x^m \sum_{j=0}^{k} A_j x^j$
N. m-fache NS	$ax^2 e^{\alpha x}$	$(a+bx)x^2 e^{\alpha x}$	

$h(x)$	$\lambda^{\mu=0}$	$n\cos(\beta x)e^{\alpha x} / n\sin(\beta x)e^{\alpha x}$
keine NS	A	$(a\sin(\beta x) + b\cos(\beta x))e^{\alpha x}$
m-fache NS	$A x^m$	$(a\sin(\beta x) + b\cos(\beta x))e^{\alpha x} x^m$

falls μ Nullstelle von $f_h(x) \Rightarrow$ Resonanz

8) $f_{p,i}$ n-mal ableiten
9) einsetzen mit $f_{p,i}^{(n)}$ für $y^{(n)}$ und gleich $h(x)$

$\Rightarrow$ Superposition gibt allg. Lösung

DGLs 1. Ordnung

1. Möglichkeit: Form: $y' = g(x) \cdot h(y)$
Vorgehen: $y' = g(x)h(y)$

$\frac{1}{h(y)} \cdot y' = g(x)$ $\quad y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$

$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$ $+C$

$\Rightarrow$ nach y lösen

} Trennung der Variablen

2. Möglichkeit: $y' + g(x)y = h(x)$

1) homogene Lösung
$f_h(x) = c \cdot e^{-G(x)}$ $\quad c \in \mathbb{R}$
$G(x) = \int g(x)\,dx$

2) partikuläre Lösung
$u'(x) = h(x) \cdot e^{G(x)}$
$u(x) = \int h(x) e^{G(x)}\,dx$
$f_p(x) = u(x) e^{-G(x)}$

3) $f(x) = f_h(x) + f_p(x)$

trigonometrische Zusammenhänge:

$\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} = \tan(x) / \left(\sqrt{1+\tan^2(x)}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(x)}}$

$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \frac{\cot(x)}{\sqrt{1+\cot^2(x)}}$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)} = \frac{1}{\cot(x)}$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\quad \sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$

$\csc^2(x) - \cot^2(x) = 1$ $\quad \sin(x) \cdot \csc(x) = 1$

$\cos(x) \cdot \sec(x) = 1$ $\quad \tan(x) \cdot \cot(x) = 1$

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ $\quad \cot = \frac{\cos}{\sin}$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y)$
$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\cdot\sin(y)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
$\tan(x+y) = (\tan(x) + \tan(y)) / (1 - \tan x \cdot \tan y)$
$\tan(x-y) = (\tan x - \tan y) / (1 + \tan x \tan y)$
$\cot(x+y) = (\cot(x)\cot(y) - 1) / (\cot(y) + \cot x)$
$\cot(x-y) = (\cot(x)\cot(y) + 1) / (\cot(y) - \cot(x))$

$\sin(x+y+z) = \sin(x)\cos(y)\cos(z) + \cos(x)\sin(y)\cos(z)$
$+ \cos(x)\cos(y)\sin(z) - \sin(x)\sin(y)\sin(z)$
$\cos(x+y+z) = \cos(x)\cos(y)\cos(z) - \sin(x)\sin(y)\cos(z)$
$- \sin(x)\cos(y)\sin(z) - \cos(x)\sin(y)\sin(z)$

$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ $\quad \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$
$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$ $\quad \cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$
$\sin(4x) = 8\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)$
$\cos(4x) = 8\cos(x)^4 - 8\cos(x)^2 + 1$

$\tan(2x) = 2\tan(x) / (1 - \tan(x)^2)$
$\cot(2x) = (\cot(x)^2 - 1) / (2\cot(x))$
$\tan(3x) = (3\tan(x) - \tan(x)^3) / (1 - 3\tan(x)^2)$
$\cot(3x) = (\cot(x)^3 - 3\cot(x)) / (3\cot(x)^2 - 1)$
$\tan(4x) = (4\tan(x) - 4\tan(x)^3) / (1 - 6\tan(x)^2 + \tan(x)^4)$
$\cot(4x) = (\cot(x)^4 - 6\cot(x)^2 + 1) / (4\cot(x)^3 - 4\cot(x))$

$\sin(x/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos x)}$ $\quad \cos(x/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos(x))}$
$\tan(x/2) = \sqrt{1-\cos(x)} / (1+\cos(x)) = (1-\cos(x)) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$
$\cot(x/2) = \sqrt{1+\cos(x)} / (1-\cos(x)) = (1+\cos(x)) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$

$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$
$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$
} analog vertauscht bei cos

$\tan(x) + \tan(y) = \sin(x+y) / (\cos(x)\cos(y))$
$\tan(x) - \tan(y) = \sin(x-y) / (\cos(x)\cos(y))$
} sin $\leftrightarrow$ cos bei: cot

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\sin(x)^2 = (1 - \cos(2x))/2$
$\sin(x)^3 = (3\sin(x) - \sin(3x))/4$
$\sin(x)^4 = (\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)/8$

$\cos(x)^2 = (1 + \cos(2x))/2$ $\quad \cos(x)^3 = (\cos(3x) + 3\cos(x))/4$
$\cos(x)^4 = (\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)/8$
$\sin(x)^2\cos(x) = \cos(x) - \cos(x)^3$
$\sin(x)\cos(x)^2 = \sin(x) - \sin(x)^3$
$\sin(x)^2\cos(x)^2 = \cos(x)^2 - \cos(x)^4$

$\sin(x)\sin(y)\sin(z) = (\sin(x+y-z) + \sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) - \sin(x+y+z))/4$
$\sin(x)\sin(y)\cos(z) = (-\cos(x+y-z) + \cos(-x+y+z)$
$+ \cos(x-y+z) - \cos(x+y+z))/4$
$\sin(x)\cos(y)\cos(z) = (\sin(x+y-z) - \sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) + \sin(x+y+z))/4$
$\cos(x)\cos(y)\cos(z) = (\cos(x+y-z) + \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) + \cos(x+y+z))/4$