

Injektiv: aus $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (jeweils 1-mal)
 Surjektiv: Für alle aus Z gibt es ein a aus D
 (jeweils Wert wird getroffen)

Fakultät: $n! = (n-1)! \cdot n = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n$
 $\Rightarrow (n-2)! = \frac{n!}{(n-1)n}$; $(n-1)! = \frac{n!}{n}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $0! = 1$

Vektorrechnung

$\langle x | y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos \alpha$

Spur: $(a \times b) \cdot c \hat{=} \det(a, b, c)$

Rechtsystem: $\{u, v, u \times v\}$

Links " : $\{u, v, v \times u\}$

Trigo:

$1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\cosh(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$; $\sinh(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

Matrizen allgemein:

regulär: $\text{Rg}(A) = Z = S \Rightarrow$ invertierbar

Singulär: qualitativ ohne vollen Rang

Linksinverse: $\text{Rg}(A) = S$; Rechts $\text{Rg}(A) = Z$

Quadrat: $[A | E] \rightarrow [E | A^{-1}]$

für 2×2 :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Folgen, Reihen, Grenzwerte:

Quotienten-/Wurzelkriter: Betrag!

$t < 1 \rightarrow$ konvergent $t = 1$ keine Aussage

Leibniz: -alternierend

monoton fallende 0-Folge?

Minorante zu a_n :

$|a_n| \leq b_n \Rightarrow \sum a_n$ konvergiert (wenn $\sum b_n$ konv.)

$a_n \geq b_n \Rightarrow \sum a_n$ divergiert (wenn $\sum b_n$ div.)

Wichtige Reihen

harmonisch: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$; $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = e(-1)$

geom.: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $|q| < 1 = \frac{1}{1-q}$ (auch $\neq$)

e-Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = -\ln(1+x)$ für $x \in (-1, 1]$

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(Faktoriel lassen, x kann rausziehen)

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{N+1}}{1-q}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$; $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{k^k} = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ für $a > 0$

$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^a \ln x = 0$ für $a > 0$

$\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \exp(\ln \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x})$
 $= \lim_{x \rightarrow 0+0} \exp(-\sin x \cdot \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \exp\left(-\frac{\sin x}{x} \cdot x \ln(x)\right)$

1-Dim Analysis

Differenzenquotient:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ableitung Umkehrfunktion:

$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) \Big|_{y=f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Bsp.: $\sin(x)$

$\frac{d}{dy} \arcsin y \Big|_{y=y_0} = \frac{1}{\frac{d}{dx} \sin(x) \Big|_{x=\arcsin(y_0)}}$

$= \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}$

Taylor:

$T_n(f, x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

$R_n(f, x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

$f - T_n = R_n$

$T_n(f, x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x)$

Integrale

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln |f(x)|]$

$\int \frac{1}{(x-a)^k} = \left[\frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \right] \quad k > 1$

$\int \frac{1}{(x-a)^1} = [\ln |x-a|]$

Partialbruch: Grad Nenner > Zähler

$\frac{q(x)}{x^2+a} = \frac{Ax+B}{x^2+a} + \frac{q(x)}{(x^2+a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$

Auf Definitionslücken achten!

Gleichweise Integration/Differentiation

$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j-1}}{j} (x-x_0)^j$

mit: $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$

für $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

Integralvergleichskriterium:

$f: (m, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei positiv u. m.f. dann haben

$\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ und $\int_m^{+\infty} f(x) dx$

das gleiche Konvergenzverhalten

Integralbeispiele:

$$\int \sin^2(x) dx = [-\sin(x)\cos(x)] + \int \cos^2(x) dx$$

$$= [-\sin(x)\cos(x)] + \int dx - \int \sin^2(x) dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} [x - \sin(x)\cos(x)]$$

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} [x + \sin(x)\cos(x)]$$

$$\int x \sin x dx = [\sin x - x \cos x]$$

$$\int x \cos x dx = [\cos x + x \sin x]$$

$$\int x^2 \sin x dx = [2x \sin x + (2-x^2) \cos x]$$

$$\int x^2 \cos x dx = [2x \cos x + (x^2-2) \sin x]$$

$$\int \ln(x) dx = [x \ln x - x]$$

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x - \frac{1}{n+1})$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsinh}(\frac{x}{a}) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\int \sin(kx) \cos(kx) dx = -\frac{1}{4k} \cos(2kx) = \frac{1}{2k} \sin^2(kx)$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)|$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = x - \arctan x$$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^4(x)} dx = -\frac{1}{3\sin^3(x)}$$

$$\int \cos x \sin x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$\int \sinh(x) \cosh(x) dx = \frac{1}{2} \cosh^2(x)$$

Mehrdim. Analysis

Richtungsableitung:

$$\partial_v f(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x \cdot v) - f(a)}{x}$$

mit $|v|=1$!

Jakobi: 1 Zeile: Ableitung mit (x,y,z)

$$J(f+g)(a) = Jf(a) + Jg(a)$$

$$J(g \circ f)(a) = (Jg(b)) \cdot (Jf(a))$$

mit $b=f(a)$

Eigenschaft Gradient:

- steht senkrecht auf Tangente

- zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs

$$\text{Bsp: } \operatorname{grad} f\left(\frac{5}{3}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

-> Tangente hat Richtung $\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

mit Steigung $\frac{5}{3}$

$$\operatorname{Rot} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Für einfach zusammenhängende Bereiche heißt $\operatorname{Rot} f = 0$ dass ein Potential existiert

Divergenz: Spur der Zehnbinarität

Unt. Stellen / Extrema:

Lagrange:

Hessematrix:

$\det(H_f(x_0)) < 0$: Sattelpunkt

$\det(H_f(x_0)) > 0$: $SP > 0$ lok. Min, $SP < 0$ lok. Max

wegen der aus der Skizze erkennbaren Vorzeichenwechsel, liegen bei P_1, P_2 Sattelpunkte vor. Die Stelle P_3 liegt in einem von Nullstellen umrandeten, kompakten Gebiet. Da die Funktion f stetig ist, nimmt sie ein Minimum in diesem kompakten Gebiet an. Dieses kann wegen des negativen Vorzeichens der Funktionswerte in dessen Innerem nicht auf dem Rand liegen. Da P_3 die einzige kritische Stelle im Inneren des Gebietes ist, muss dort ein lokales Minimum vorliegen!

Parametrisierung:

regulär: $C(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | geschlossen: Auf = End

Kreis: gegen URS | für URS
 $[t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(t) + m \\ 0 \\ r \sin(t) + b \end{pmatrix}$

Kurvenintegrale

Vektorfeld:

$$\int_C g(x) \cdot dx = \int_a^b g(C(t)) \cdot C'(t) dt$$

Gradientenfeld:

$$\int_k g(x) \cdot dx = U(C(b)) - U(C(a))$$

(wegunabhängig)

reellwertige Funktion:

$$\int_k f(s) ds = \int_a^b f(C(t)) |C'(t)| dt$$

Länge Kurve:

$$L(k) = \int_k 1 ds = \int_a^b |C'(t)| dt$$

Lineare Abbildungen:

Orthogonal, wenn $A^T A = E_n$
 $\rightarrow$ invertierbar, bijektiv

$f: V \rightarrow W$:

$$c(f(v)) = c P_B B^T v$$

kern(f)
 $f(v) = 0$
 Bild(f)
 $f(v)$

$$c P_B = (c(f(b_1)) \dots c(f(b_n)))$$

V, W, Z mit Basen E, F, G :

$\alpha: V \rightarrow W$ und $\beta: W \rightarrow Z$

$$\Rightarrow G(\beta \circ \alpha)_E = G \beta_F F^T \alpha_E$$

Dimensionsformel:

$\alpha: V \rightarrow W$:

$$\dim(V) = \dim \ker(\alpha) + \dim \text{Bild}(\alpha)$$

$A \in K^{z \times s}$: Abbildung α ist

injektiv $\Leftrightarrow \dim \ker(\alpha) = 0$
 $\Rightarrow S \leq z$

Surjektiv $\Leftrightarrow z = S - \dim \ker(\alpha)$

bijektiv $\Leftrightarrow z = S$ und $\ker(\alpha) = \{0\}$

Basiswechsel: $B: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Eid}_B = \begin{pmatrix} E^{b_1} & E^{b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Bide} = (\text{Eid}_B)^T =$ "Standardbasisvektoren mit Basisvektoren aus B darstellen"

Bsp. L. A. Basiswechsel:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 (x, y) \mapsto (-3x, 4y, 4x, 3y)$$

$$E^T f_E: E(f(e_1)) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, E(f(e_2)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T f_B = B^T E^T f_E B$$

Eigenschaft L. A: $A \in K^{z \times s}$

Surjektiv $\Leftrightarrow \text{Rg}(A) = z$ [in V]

Injektiv $\Leftrightarrow \text{Rg}(A) = s$ [in W]

Gram-Schmidt: $f_1 = \frac{b_1}{|b_1|}$

$$f_2 = b_2 - \langle b_2 | f_1 \rangle f_1$$

$$f_3 = b_3 - \langle b_3 | f_1 \rangle f_1 - \langle b_3 | f_2 \rangle f_2$$

Bei Matrizen:

$$|A| = \sqrt{\langle A_1 | A_1 \rangle \langle A_2 | A_2 \rangle} = \sqrt{\langle A | A \rangle} \quad E^T f(v) = Fv + P$$

Lineare Gleichungssysteme: $AX = b$

für quadratische $A: \in K^{z \times s}$

$\det A \neq 0 \Rightarrow$ genau 1 Lösung pro b

keine Lösung: 0-Zeile = $c \neq 0$

$\det A = 0: L(S_A) = \text{usp} + L(S_0)$

$$\dim(L(b)) = s - \text{Rg}(A)$$

für $z \neq s$:

$\text{Rg}(A) = z \Rightarrow$ mehrere Lösungen

für jedes b $\dim S - \text{Rg}(A) = s - z$
 (mehrere) Rechtsinverse, keine Links

$\text{Rg}(A) = S < z$

gibt $b \rightarrow$ keine Lösungen

gibt $b \rightarrow$ eine Lösung

$\rightarrow$ mehrere Links, keine Rechts

$\text{Rg}(A) < \min\{s, z\}$ keine R/L

Bsp:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L(0) = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad L(0) = \{ \}$$

Affine Abbildungen:

affin, wenn: $A \in K^{n \times n}, t \in K^n$

so dass $\alpha(v) = Av + t$

Umkehr Abbildung: $\alpha^{-1}: A^{-1}v - A^{-1}t$

Koordinatensystem: $F = (p; f_1, f_2, f_3)$

Orthogonale Matrizen:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \rightarrow \text{un eigentlich}$$

$\Rightarrow$ Spiegelung an 1. Koordinatenachse

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \rightarrow \text{un eigentlich}$$

$\Rightarrow$ Spiegelung an Winkelhalbierenden

1. Quadrant.

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = 1 \quad \text{eigentlich}$$

Drehung um Winkel φ .

$$E = (0, e_1, \dots, e_n); F = (p, f_1, \dots, f_n)$$

dam gilt für Punkte $x \in K^n$

$$F x = F^{-1}(F x - p) \cdot E = F F x + p$$

$$F^T x = F^T F x + p = F^T x + p$$

$$E^T F x = F^T x + p$$

Eigenwerte

$$A v = \lambda v$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) \stackrel{!}{=} 0$$

alg. Vielfachheit: e_p (Anzahl 0-Stellen)

geom. Vielfachheit $\dim(\text{Eigenraum})$

$$d_p \leq e_p$$

wenn A symmetrisch $L = V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$

Diagonalisierbarkeit

wenn $d_p = e_p$ für alle p

$$\text{bzw. } \sum_{i=1}^n \dim V_i = \dim(A)$$

$$Q = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x + 2a^T x + c = 0 \}$$

1. A, a, c bestimmen
 (auf 2a achten)!

2. Eigenvektoren normieren
 $\Rightarrow F^T A F = D$

$$3. \tilde{a} = F^T a$$

4. $\tilde{Q}$ aufstellen
 (auf 2a achten)!

5. Quadratische ergänzen

$$(y_1 - 5)^2, (y_2 + 3)^2$$

$$\Rightarrow F P = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$F F P = E P \quad \left(\begin{array}{l} \text{lineare} \\ \text{Terme auf} \\ 2x \text{ beseitigen} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow G = (E P, f_1, f_2, \dots)$$

$\Rightarrow$ durch Quadratische Zeilen

Typ Quadrik: $\text{Rang} = \begin{pmatrix} c & a \\ a & A \end{pmatrix}$

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A_{\text{neu}})$: kegelig

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A_{\text{neu}}) - 1$: Mittelpunkts

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A_{\text{neu}}) - 2$: Parabolische

Zeichen:

$$\text{Ellipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Hyperbel: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Asymptoten: } y = \pm \frac{b}{a} x$$

$$\text{Parabolisches Geradenpaar: } x^2 = a$$

Gestalt Quadrik: $\mathbb{R}^2$

$$\pm(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad \textcircled{I} \quad \text{Punkt / Gerade}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad \text{Scheidendes Geradenpaar}$$

$$x_1 = 0 \quad \text{Doppelgerade / Doppelgerade}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0 \quad \text{kein Punkt}$$

$$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 \quad \text{hyperbel / hyp. Zyl.}$$

$$-x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0 \quad \text{hyperbel / hyp. Zyl.}$$

$$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 \quad \text{Ellipse / el. Zyl.}$$

$$x_1^2 + 1 = 0 \quad \text{kein Punkt}$$

$$\textcircled{III} \quad x^2 + 2x = 0 \quad \text{Parabel / par. Zyl.}$$

$\mathbb{R}^3$

$\textcircled{I}:$

$$\pm(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \quad \text{Punkt}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{Doppeltigel}$$

$\textcircled{II}$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0 \quad \text{kein Punkt}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 &= 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{zweischaliges} \\ &\text{Hypertoroid} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1 &= 0 \\ -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{einschaliges} \\ &\text{Hypertoroid} \end{aligned}$$

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 \quad \text{Ellipsoid}$$

$\textcircled{III}$

$$\pm(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3 = 0 \quad \text{elliptisches Paraboloid}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{hyperbolisches} \\ &\text{Paraboloid} \end{aligned}$$

$\textcircled{I}$ kegelige Quadrik

$\textcircled{II}$ mittel/punktsquadrant

$\textcircled{III}$ parabolische Quadrik