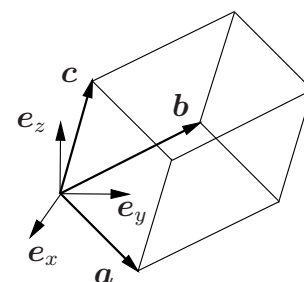


Aufgabe 4

Ein Parallelepiped ist ein Polyeder, dessen Grund- und Seitenflächen Parallelogramme sind. Mit Hilfe der Vektorrechnung zeige man folgende Eigenschaften eines Parallelepipeds:

1. alle vier Raumdiagonalen schneiden sich in einem Punkt
2. die Summe der Quadrate der Längen der vier Raumdiagonalen ist gleich der Summe der Quadrate der Länge aller zwölf Kanten.



Geg.: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Lösung**4.1**

Raumdiagonalen:

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{0} + \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a})$$

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{b} + \gamma(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$\mathbf{d}_4 = \mathbf{c} + \delta(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})$$

Schnittpunkt $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2$:

$$\mathbf{0} + \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a})$$

$$\alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \alpha\mathbf{c} - \mathbf{a} - \beta\mathbf{b} - \beta\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\underbrace{\mathbf{a}}_{\neq 0}(\alpha - 1 + \beta) + \underbrace{\mathbf{b}}_{\neq 0}(\alpha - \beta) + \underbrace{\mathbf{c}}_{\neq 0}(\alpha - \beta) = \mathbf{0}$$

$$\alpha - 1 + \beta = 0$$

$$\alpha - \beta = 0$$

$$\beta = 1 - \alpha$$

$$\alpha = \beta$$

$$\beta = 1 - \beta$$

$$2\beta = 1$$

$$\beta = \frac{1}{2} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

analog für $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_3$; $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_4$; $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_3$

$$\rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}$$

4.2

Länge von $|\mathbf{d}| = \sqrt{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}_1|^2 &= |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 &&= (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &&&= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + 2\mathbf{a}\mathbf{c} + 2\mathbf{b}\mathbf{c} \\ |\mathbf{d}_2|^2 &= |\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}|^2 &&= \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}\mathbf{c} - 2\mathbf{a}\mathbf{c} - 2\mathbf{a}\mathbf{b} \\ |\mathbf{d}_3|^2 &= |\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 &&= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} + 2\mathbf{a}\mathbf{c} - 2\mathbf{b}\mathbf{c} \\ |\mathbf{d}_4|^2 &= |\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 &&= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\mathbf{c} - 2\mathbf{b}\mathbf{c} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^4 |\mathbf{d}_i|^2 = 4\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}^2 + 4\mathbf{c}^2 = \text{Summe aller Kanten im Quadrat}$$