

1. Grundlagen

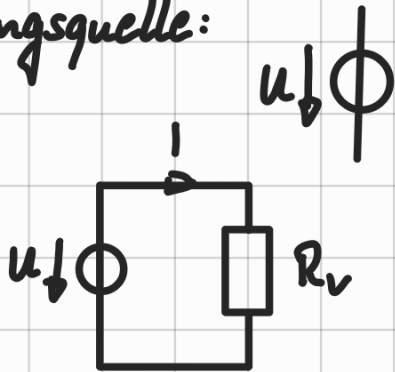
1.1 Gleichstromkreise

Ein Gleichstromkreis enthält eine (Gleich-)Spannungsquelle und Verbraucher (z.B. Widerstände).

Außerdem können Schalter, Schutz Einrichtungen, Messinstrumente, etc. enthalten sein.

1.1.1 Quellen, Zählpfeilsysteme

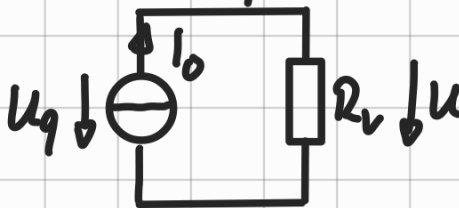
Spannungsquelle:



Spannungspfeil von + nach -

Strompfeil in Richtung pos. Ladungsträger (techn. Stromrichtung)

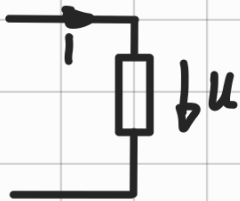
Stromquelle: „imaginäres Bauteil“



Strom ist fest vorgegeben ($\rightarrow$ kein reales Bauteil)

An der Quelle fällt eine Spannung U_q ab, die sich durch die angeschlossenen Verbraucher ergibt (hier: $U = R_v \cdot I_0 = U_q$)

Widerstand:

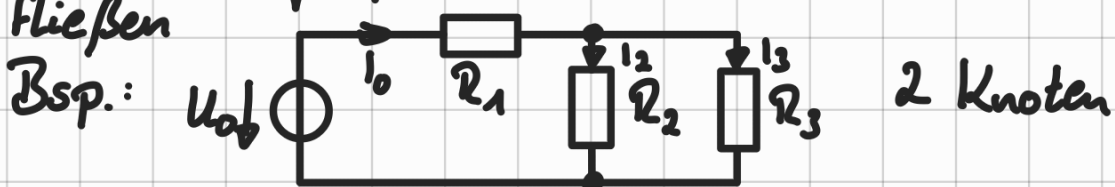


Strom- & Spannungspfeil haben dieselbe Richtung

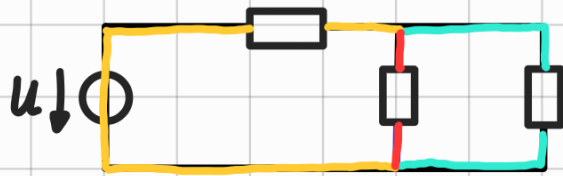
1.1.2 Knoten, Zweige, Maschen

Knoten: Verzweigungsstelle an der mind. 3 Ströme zu- bzw. abfließen

Bsp.:

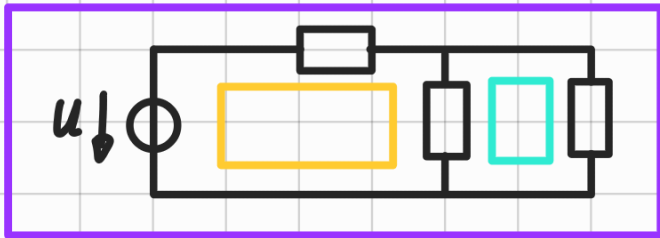


Zweig: Verbindung zwischen 2 Knoten



3 Zweige

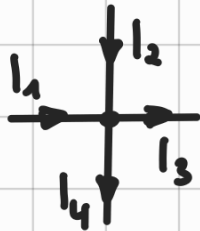
Masche: geschlossener Pfad im Netzwerk, der sich nicht selbst schneidet, d.h. bei dem jeder Knoten nur ein einziges Mal durchlaufen wird



3 Maschen

1.2 Kirchhoffsche Regeln

1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel)



Die Summe der ein- & auslaufenden Ströme an einem Knoten ist null.

Abgehende Ströme gehen negativ ein.

$$\rightarrow \text{Hier: } I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel)

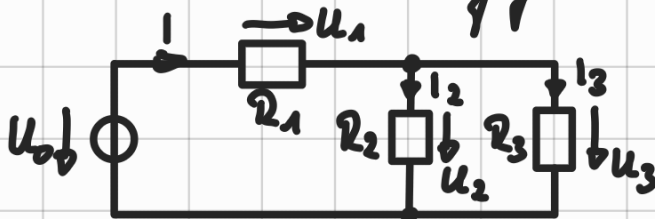


Die Summe der Spannungen in einer Masche ist null.

Wähle Umlaufrichtung willkürlich & betrachte Lage der Spannungspfeile relativ zur Umlaufrichtung.

$$\rightarrow \text{Hier: } U_0 - U_1 - U_2 = 0$$

1.2.1 Anzahl unabhängiger Gleichungen



2 Knoten

3 Maschen

Knotengleichungen

$$\left. \begin{array}{l} I - I_2 - I_3 = 0 \\ I_2 + I_3 - I = 0 \end{array} \right\} \text{ eig. dieselbe Gleichung } (\cdot (-1))$$

Maschengleichungen

$$U_2 - U_3 = 0 \rightarrow U_2 = U_3$$

$$U_0 - U_2 - U_1 = 0$$

$$U_0 - U_3 - U_1 = 0 \rightarrow \text{überflüssig}$$

Allgemein gilt: bei einem Netzwerk mit k Knoten und z Zweigen gibt es $K = k - 1$ unabh. Knotengleichungen und $M = z - K$ unabh. Maschengleichungen

$$\text{oben: } k = 2 \rightarrow K = 2 - 1 = 1$$

$$z = 3 \rightarrow M = 3 - 1 = 2$$

Mithilfe der Grundgleichungen an den Bauteilen (z.B. $U = R \cdot I$) kann man dann ein lineares Gleichungssystem aufstellen.

$$I - I_2 - I_3 = 0$$

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

$$U_0 - R_2 I_2 - R_1 I = 0$$

$\rightarrow$ 3 Gleichungen, 3 Unbekannte (I, I_2, I_3)

1.3 Leistung

Ist als Arbeit (Energie) pro Zeit definiert

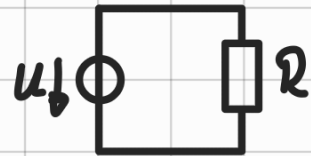
Bsp.: wie viel Energie wird pro Sekunde in

Wärme umgewandelt (bei Glühlampe in Licht)?

$$P = U \cdot I = \frac{dW}{dt}$$

$$[P] = W = \frac{J}{s}$$

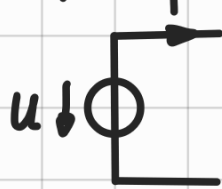
$$J = U s \\ kWh$$



Summe aller Leistungen der Verbraucher ergibt die Leistung der Quelle

1.3.1 Zählpeilsysteme

Erzeugerzählpfeilsystem



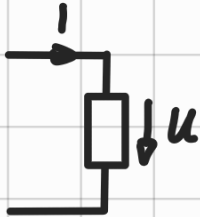
$$P = U \cdot I > 0$$

$$P = U \cdot I < 0$$

Quelle gibt
Leistung ab
Quelle nimmt
Leistung auf

Strom- & Spannungspfeil in
entgegengesetzte Richtung

Verbraucherzählpfeilsystem



$$P = U \cdot I > 0$$

$$P = U \cdot I < 0$$

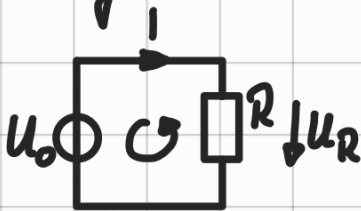
Verbraucher nimmt
Leistung auf!
Verbraucher gibt
Leistung ab!

gleiche Richtung

↳ kann nicht auftreten!

1.4 Reale Spannungsquelle

Warum gibt es keine ideale Spannungsquelle?



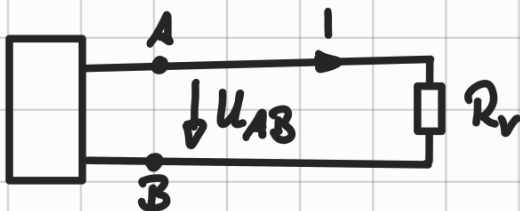
Maschenregel: $U_0 - U_R = 0$
 $U_0 = U_R$

Ohmsch. Gesetz: $U_R = R \cdot I$
 $\Rightarrow I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_0}{R}$

Leistung die die Quelle liefert: $P = U_0 \cdot I = \frac{U_0^2}{R}$
 $R \rightarrow 0 : P \rightarrow \infty$

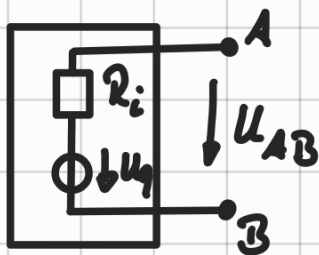
Eine Spannungsquelle, die eine unendl. Leistung liefert, kann es nicht geben.

Bei realen Spannungsquellen hängt die Spannung U_{AB} vom fließenden Strom ab



U_{AB} : Klemmenspannung

Wir berücksichtigen dies mit einem Innenwiderstand R_i .

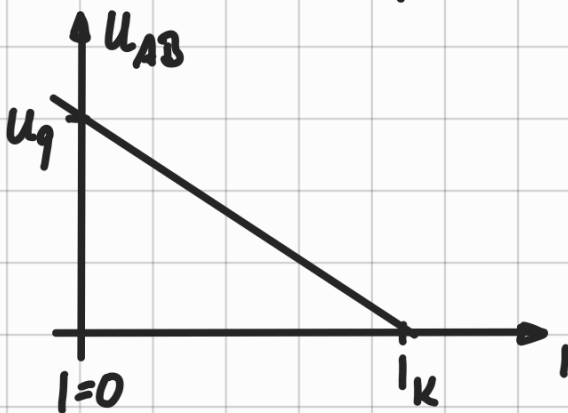


U_q : Quellenspannung

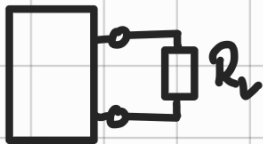
1.4.1 Arbeitsgerade

Nach der Maschenregel gilt: $U_{AB} = U_q - R_i \cdot I$

In der Realität ist die Spannungsquelle ein Bauteil mit 2 Anschlüssen, in das man nicht hineinsehen kann $\rightarrow$ durch Messungen müssen R_i und U_q bestimmt werden.

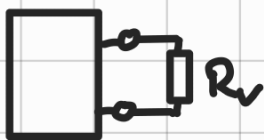


Leerlauf:



$R_v \rightarrow \infty$ dann fließt kein Strom
 $U_{AB} = U_q$ Leerlaufspannung

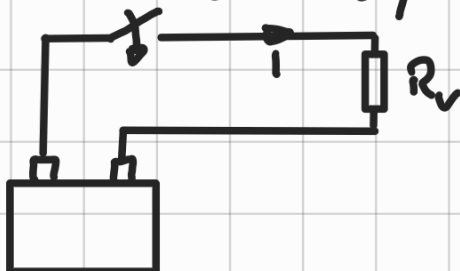
Kurzschluss



$R_v \rightarrow 0$
 $U_{AB} = 0 \rightarrow U_q - R_i \cdot I_k = 0 \rightarrow R_i = \frac{U_q}{I_k}$

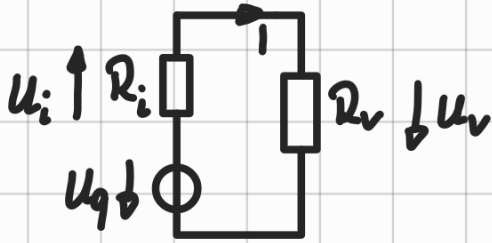
1.4.2 Beispiel

Betrachte Bleiakku mit $U_q = 12V$ und $I_k = 360A$



Frage: Wie groß ist die Leistung am Verbraucher für $I = 100A$ und $I = 200A$

1. Zeichne Ersatzschaltbild für Batterie:



2. R_i bestimmen: $R_i = \frac{12V}{360A} = \frac{1}{30} \Omega$

3. Maschengleichung: $U_i + U_v - U_q = 0 \rightarrow U_v = U_q - R_i \cdot I$

4. Leistung am Verbraucher:

$$P = U_v \cdot I = (U_q - R_i \cdot I) \cdot I$$

$$\rightarrow \text{für } 100A: P_v = 870W$$

$$\text{für } 200A: P_v = 1060W$$

$\rightarrow$ Die Leistung P_v verdoppelt sich nicht, wenn man I verdoppelt.

2. Lineare Gleichstromnetzwerke

Analyse: mit Maschen- & Knotenregel sowie Ohmsches Gesetz
 $\rightarrow$ i.d. R. aufwendig

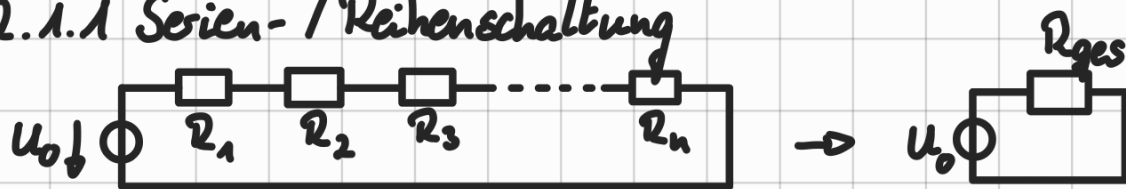
„Abkürzungen“: Gesamt- bzw. Ersatzwiderstand, Strom- & Spannungsteilerregel, Überlagerungssatz, Ersatzspannungsquelle

2.1 Schaltung von Widerständen



typische Fragestellungen: Wie groß ist I (ohne I_1, I_2 zu berechnen)?
Wie groß ist I_1 , wenn I bekannt ist?

2.1.1 Serien- / Reihenschaltung



Ersatzwiderstand $R_{ges} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

↳ ist immer größer als der größte Einzelwiderstand

2.1.2 Parallelschaltung

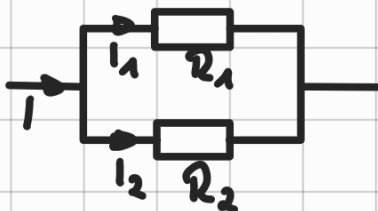


Ersatzwiderstand $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$

Spezialfall $n=2$: $R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

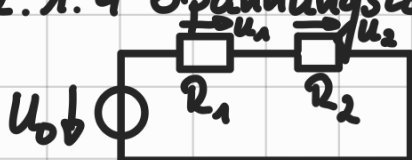
Ersatzwiderstand ist immer kleiner als der kleinste Einzelwiderstand

2.1.3 Stromteiler



Stromteilerformeln: $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$
 $I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$

2.1.4 Spannungsteiler



Spannungsteilerformeln: $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U$
 $U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$

2.1.5 Beispiel

geg.: $U_0 = 12 \text{ V}$, $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 60 \Omega$, $R_3 = 28 \Omega$



→ Ersatzwiderstand: $R_{\text{ges}} = R_3 + (R_1 \parallel R_2)$

$$= R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 48 \Omega$$

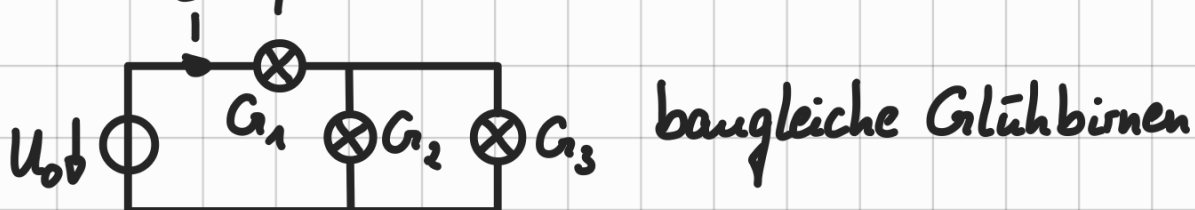
$$I = \frac{U_0}{R_{\text{ges}}} = \underline{\underline{0,25 \text{ A}}}$$

ges.: I_1, I_2 (wenn I gegeben ist)

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I = \frac{1}{6} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I = I - I_1 = \frac{1}{12} \text{ A}$$

2.1.6 Beispiel



Frage: Welche leuchtet am hellsten? → Bei welcher Glühlampe fällt die größte Leistung ab?

- an G_2 und G_3 liegt die gleiche Spannung an (Parallelschaltung) → I_2 und I_3 gleich groß (baugleiche Glühlampen)

→ G_2 & G_3 leuchten gleich hell

- R_{ges} aus $G_2 \parallel G_3$ ist kleiner als R von G_1
 → damit ist $U_1 > U_2 = U_3$ (Spannungsteiler)

Außerdem gilt: $I = I_1 = I_2 + I_3 > I_2 = I_3$

→ $P_1 = U_1 \cdot I_1 > P_2 = P_3$

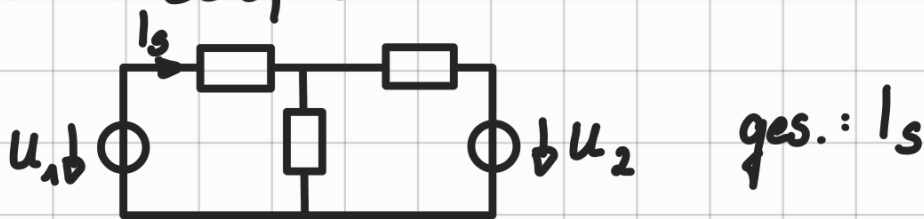
⇒ G_1 leuchtet am hellsten

2.2 Überlagerungssatz

2.2.1 Allgemein

1. Auswahl einer Spannungs- oder Stromquelle
2. Kurzschließen aller anderen Spannungsquellen und Auftrennen aller anderen Stromquellen
3. Gewünschte Größe in diesem Netzwerk bestimmen
4. Wiederholung von 1.-3. für alle anderen Quellen
5. Addition (Überlagerung) der Lösungen aus 3. ergibt die gewünschte Größe für das Gesamtnetzwerk

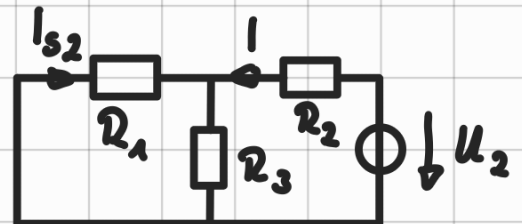
2.2.2 Beispiel



Ersatzwiderstand

$$R_{\text{ges}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$I_{s1} = \frac{U_1}{R_{\text{ges}}}$$



$$R_{\text{ges}} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

$$I = \frac{U_2}{R_{\text{ges}}}$$

Stromteiler (R_1, R_3):

$$I_{s2} = - \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot I$$

$$I_s = I_{s1} + I_{s2} = \frac{(R_2 + R_3)U_1 - R_3 U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

Wie muss R_3 bei $U_1 = 12 \text{ V}$, $U_2 = 16 \text{ V}$ und $R_2 = 20 \Omega$ gewählt werden, damit kein Strom I_s fließt?

$$I_3 = 0 \rightarrow (R_2 + R_3)U_1 - R_3U_2 = 0$$

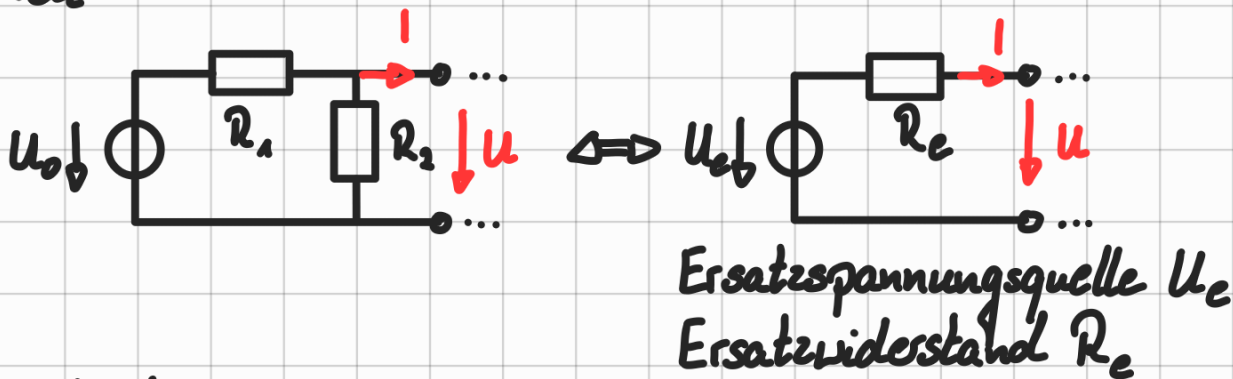
$$R_3 = \frac{-R_2U_1}{U_1 - U_2} = 60 \Omega$$

Für $U_1 = 16 \text{ V}$, $U_2 = 12 \text{ V}$ und $R_2 = 20 \Omega$ wäre dies nicht möglich, da der Widerstand R_3 negativ sein müsste.

2.3 Ersatzspannungsquelle

2.3.1 Grundidee

Zusammenfassung eines Teils eines Netzwerkes zu einem einfacheren Teil

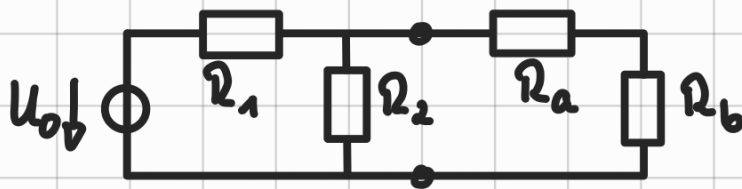


→ bestimme U_e & R_e so, dass egal was an den Klemmen angeschlossen wird, die Spannung U und der Strom I gleich sind

2.3.2 Allgemein

1. Originalschaltbild und Schaltbild mit Ersatzspannungsquelle skizzieren
 2. Leerlaufspannungen ermitteln
 3. Kurzschlussströme ermitteln
 4. anstatt 3. Ersatzwiderstand direkt berechnen durch Kurzschließen der Spannungsquellen (Stromquellen auftrennen) und die Spannung zwischen den Klemmen als „Spannungsquelle“ betrachten
- } Gleichsetzen liefert U_e, R_e

2.3.3 Beispiel

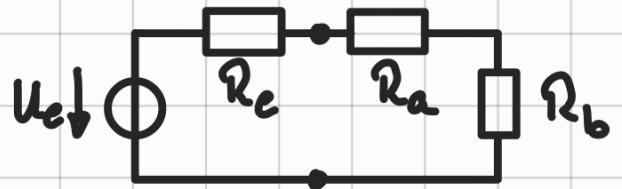


Leerlauf: $U_L = U_{R_2}$

Spannungsteiler $\Rightarrow U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0$

Kurzschluss: $I_k = \frac{U_0}{R_1}$

$\Rightarrow \frac{U_0}{R_1} = \frac{U_e}{R_e} \Leftrightarrow R_e = \frac{U_e}{U_0} \cdot R_1$



$U_L = U_e$

$\Rightarrow U_e = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0$

$I_k = \frac{U_e}{R_e}$

$R_e = \frac{U_e}{U_0} \cdot R_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

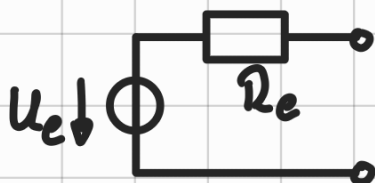
Alternative:

$U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$

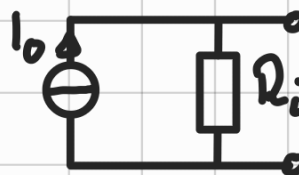
$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

$U = R_e \cdot I$

2.4 Ersatzstromquelle



$\Leftrightarrow$



Leerlauf: $U_L = U_e$

Kurzschluss: $I_k = \frac{U_e}{R_e}$

$U_L = U_{R_i} = R_i \cdot I_0$

$I_k = I_0$

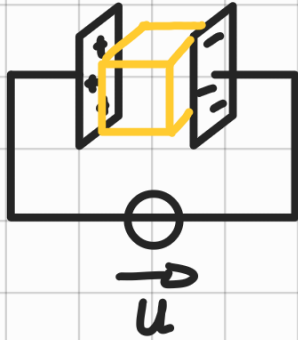
Gleichsetzen und Auflösen:

$$\begin{aligned} U_e &= R_i \cdot I_0 \\ R_e &= R_i \end{aligned}$$

3. Kondensatoren und Spulen

3.1 Kondensator

2 elektrisch geladene Flächen, die durch ein Dielektrikum getrennt sind



Je größer die Spannung U , desto größer die Ladung auf den Platten

$$Q \sim U \rightarrow Q = C \cdot U$$

C : Kapazität

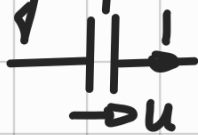
Durch Ableiten erhält man die Grundgleichung des Kondensators

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt}$$

$$[C] = F = \frac{A^2 s^4}{kg m^2}$$

typ. Größenordnung: pF bis μF

Schallsymbol



Ein Kondensator wirkt bei Gleichspannung wie ein offener Schalter bzw. Leerlauf.

$$\begin{aligned} \text{Energie } (P &= \frac{dW}{dt}) : W = \int P dt = \int U \cdot I dt = \int U \cdot C \frac{dU}{dt} dt \\ &= C \int U dU \\ &= \frac{1}{2} C U^2 \end{aligned}$$

→ die Spannung kennzeichnet die Energie des Kondensators

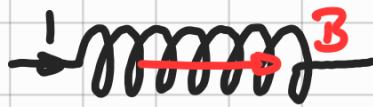
Spezialfall Plattenkondensator: $C = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$

$$\epsilon_0 = 8,854 \dots \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

ϵ_r = relative Permeabilitätszahl (abh. von Dielektrikum)

3.2 Spulen

Wicklung eines Leiters

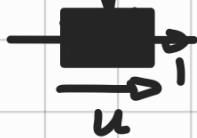


Magnetfeld B wird in der Spule durch den Strom I erzeugt;
Grundgleichung der Spule mit Induktivität L :

$$U = L \cdot \frac{dI}{dt} \quad [L] = H = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{A}^2}$$

typ. Größenordnung: μH bis mH

Schaltsymbol



Bei Gleichstrom wirkt die Spule wie ein geschlossener Schalter bzw. Kurzschluss.

$$\text{Energie: } W = \int P dt = \int U \cdot I dt = \int L \cdot I \frac{dI}{dt} dt = L \int I dI = \frac{1}{2} L I^2$$

→ Der Strom kennzeichnet die Energie der Spule

$$\text{Spezialfall lange Spule: } L = \mu_0 \mu_r \frac{A}{l} n^2$$

A : durchsetzte Fläche (Querschnittsfläche)

n : Wicklungszahl

μ_0 : $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ (Permeabilität des Vakuums)

μ_r : relative Permeabilitätszahl (abh. von Dielektrikum)

3.3 Ein- und Ausschaltvorgänge

bisherige Betrachtung: stationär

Konsequenz bei Gleichstrom: Ströme & Spannungen zeitl. konst.

neue Betrachtungsweise: transient

betrachte Übergang von einem stationären Zustand in einen anderen Zustand

Amplituden von Strömen und Spannungen zeitl. veränderlich
Frage: Wann kommt es zu einem Ausgleichsvorgang?

Bedingung 1: Im elektr. Netzwerk befindet sich mind. ein Energiespeicher

Bedingung 2: Im elektr. Netzwerk verändert sich etwas (z.B. Schalter umlegen oder Änderung eines Spannungswerts)

Frage: Warum kommt es zu einem Ausgleichsvorgang?

Weil sich die im System gespeicherte Energie nicht sprunghaft ändern kann.

$$p(t) = \frac{dU}{dt}$$

Wenn die Energie nicht stetig verläuft, müsste p unendlich groß sein.

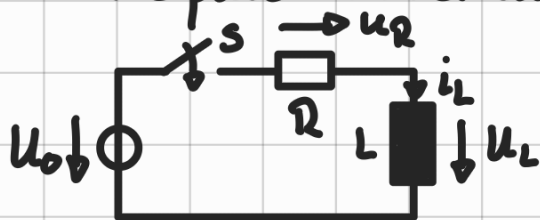
Das Grundproblem beim Schalten von Energiespeichern:

Es muss schaltungstechnisch dafür gesorgt werden, dass die die Energie kennzeichnende Größe (z.B. Stromstärke bei Spulen) stetig verlaufen kann.

praktische Relevanz: ungewollte bzw. gefährliche Überspannungen vermeiden

Bei der mathematischen Behandlung der Einschwingvorgänge muss von den allgemeingültigen Grundsätzen im Zeitbereich ausgegangen werden.

3.3.1 Spule: Einschaltvorgang



Anfangswert: $i_L(0) = 0A$

Maschenregel: $U_0 = u_L + u_R = L \cdot \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L$

DGL: $L \dot{i}_L + R i_L = U_0$

Ansatz: $i_L(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + B$

Einsetzen in DGL: $L \cdot A \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} + R A e^{-t/\tau} + R B = U_0$

$$\underbrace{\left(L \left(-\frac{1}{\tau}\right) + R\right)}_{\stackrel{!}{=} 0} A e^{-t/\tau} = \underbrace{U_0 - R B}_{\stackrel{!}{=} 0}$$

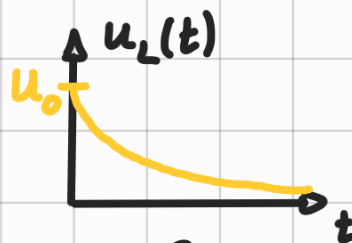
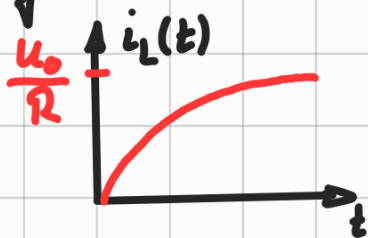
muss für alle Zeiten t erfüllt sein

$$\rightarrow \tau = \frac{L}{R} \quad \rightarrow B = \frac{U_0}{R}$$

$$\rightarrow i_L(t) = \frac{U_0}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

für $t=0$: $\frac{U_0}{R} + A \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{U_0}{R}$

Lösung: $i_L(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)$



$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \frac{U_0}{R} \cdot \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} t} = \underline{U_0 e^{-\frac{R}{L} t}}$$

3.3.2 Spule: Ausschaltvorgang



S_2 ist nötig, damit der Strom weiterfließen kann (sonst $\frac{di_L}{dt} \rightarrow \infty$ und damit elektr. Durchschlag, d.h. Lichtbogen an S)

Maschenregel: $u_L + u_R = 0 = L \cdot \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L$

DGL: $L \dot{i}_L + R i_L = 0$

Ansatz: $i_L(t) = a e^{-t/\tau}$

Einsetzen: $L \cdot a \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + R a e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$

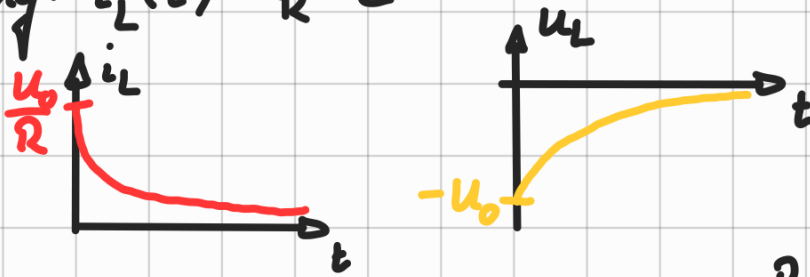
$a e^{-\frac{t}{\tau}} \underbrace{\left(-\frac{1}{\tau} + R\right)}_{=0} = 0$ muss für alle Zeiten t erfüllt sein

$\rightarrow \tau = \frac{L}{R}$

$\rightarrow i_L(t) = a e^{-\frac{R}{L} t}$

mit Anfangswert $i_L(0) = \frac{U_0}{R} = a e^0 = a$

Lösung: $i_L(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$



$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L \cdot \frac{U_0}{R} \left(-\frac{R}{L}\right) e^{-\frac{R}{L} t} = -U_0 e^{-\frac{R}{L} t}$

Die Spule wirkt zunächst als „Energiequelle“; sorgt dafür, dass der Strom in die ursprüngliche Richtung weiterläuft, und zwar so lange, bis die gespeicherte Energie aufgebraucht ist.

Die Energie wird im ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelt.

Energie zu Beginn in der Spule:

$W = \frac{1}{2} L (i_L(0))^2 = \frac{1}{2} L \cdot \frac{U_0^2}{R^2}$

Momentanleistung im Widerstand zu bestimmter Zeit t

$$p_R(t) = u_R(t) \cdot i_R(t) = R \cdot (i_L(t))^2 = R \cdot \frac{U_0^2}{R^2} \cdot (e^{-\frac{R}{L}t})^2 \\ = \frac{U_0^2}{R} \cdot e^{-\frac{2R}{L}t}$$

Gesamte im Widerstand in Wärme umgewandelte Energie
($p = \frac{dW}{dt}$)

$$W_R = \int_0^\infty p_R(t) dt = \int_0^\infty \frac{U_0^2}{R} e^{-\frac{2R}{L}t} dt \\ = \frac{U_0^2}{R} \left[-\frac{L}{2R} \cdot e^{-\frac{2R}{L}t} \right]_0^\infty \\ = \frac{U_0^2}{R} (0 - (-\frac{L}{2R} \cdot 1)) \\ = \frac{1}{2} L \left(\frac{U_0}{R} \right)^2$$

3.3.3 Kondensator: Einschaltvorgang



DGL für Einschaltvorgang: $U_0 = (1 + \frac{R_1}{R_2}) u_C + R_1 \cdot C \cdot \dot{u}_C$

Lösung mit Lösungsansatz wie bei der Spule

3.3.4 Kondensator: Ausschaltvorgang

Gleiche Schaltung wie oben, nur dass Schalter geöffnet wird

Anfangsbedingung: bei $t = 0$ ist der Kondensator vollständig geladen $\rightarrow u_{R_2}(0) = u_C(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0$

DGL für Ausschaltvorgang: $0 = u_C + R_2 C \cdot \dot{u}_C$

Lösung mit Lösungsansatz wie bei der Spule

Der Kondensator wirkt als „Energiequelle“. Die Energie wird im ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelt.

$$W_C(0) = \frac{1}{2} C (u_C(0))^2 = \frac{1}{2} C \cdot \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} U_0^2$$

4. Reelle Wechselspannung

4.1 Zeitlich veränderliche Größen

4.1.1 Notation

Gleichgrößen: Großbuchstaben U, I

Wechselgrößen: Kleinbuchstaben + Zeitabhängigkeit $u(t), i(t)$

Mischgrößen: Kleinbuchstaben u, i



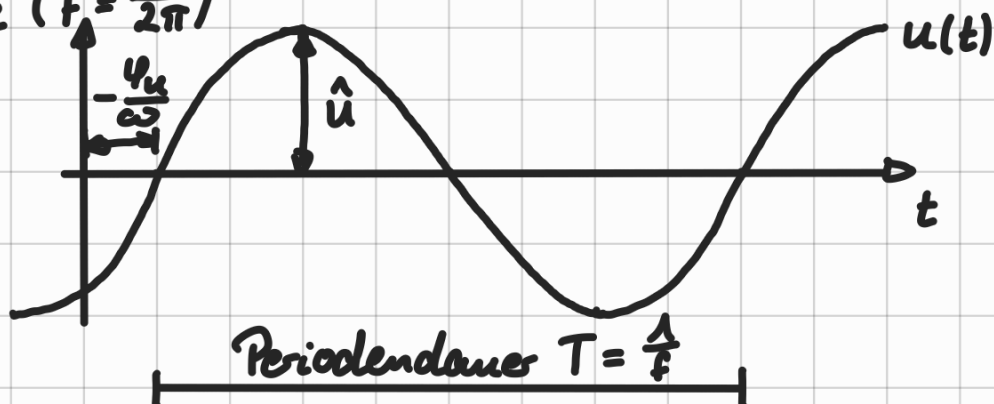
4.2 Wechselgrößen mit konstanter Frequenz

Für diese gilt: $u(t) = \hat{u} \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

Dabei sind $u(t), i(t)$ Momentanwerte von Spannung bzw. Strom, $\hat{u}, \hat{i}$ die Amplituden / Scheitelwerte, φ_u, φ_i die Phasenwinkel und ω die Kreisfrequenz ($f = \frac{\omega}{2\pi}$)

graphisch:



$$\sin(0) = 0 \rightarrow \omega t + \varphi_u = 0 \rightarrow \varphi_u = -\omega t$$

$$t = -\frac{\varphi_u}{\omega}$$

$$\text{Effektivwerte: } \left. \begin{aligned} U_{\text{eff}} &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = U \\ I_{\text{eff}} &= \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = I \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{bei sinusförmiger} \\ \text{Wechselspannung} \end{array}$$

4.3 Bauteile

Definiere Phase an Bauteil $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

4.3.1 Widerstand

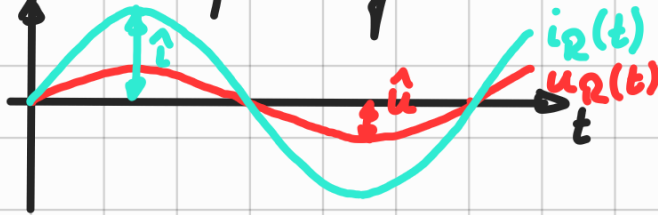
$$\text{Es gilt: } u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$\hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = R \cdot \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\text{Vergleich: } \hat{u} = R \cdot \hat{i}$$

$$\varphi_u = \varphi_i \rightarrow \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

Strom und Spannung sind in Phase



4.3.2 Kondensator

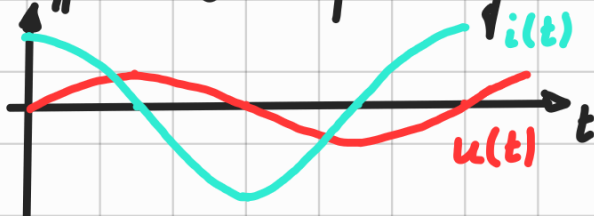
$$\text{Es gilt: } i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) &= C \cdot \hat{u} \omega \cos(\omega t + \varphi_u) \\ &= C \cdot \hat{u} \omega \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$\text{Vergleich: } \hat{i} = C \omega \hat{u}$$

$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} (-90^\circ)$$

Strom "eilt" der Spannung voraus



4.3.3 Spule

Es gilt: $u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$

$$\hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = L \cdot \hat{i} \omega \cos(\omega t + \varphi_i) \\ = L \cdot \hat{i} \omega \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$

Vergleich: $\hat{u} = \omega L \hat{i}$

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} (+90^\circ)$$

Spannung „eilt“ dem Strom voraus

4.3.4 Merkregel

Voraussetzungen: LUKI vor

→ bei L ist U vor Strom

→ bei C ist I vor Spannung

4.4 Zeigerdarstellung

4.4.1 Kirchhoffsche Regeln und Zeiger

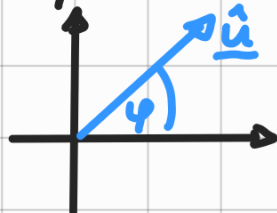
Die Kirchhoffschen Regeln gelten:

→ für Momentanwerte $u(t), i(t)$

→ nicht für Amplituden $\hat{u}, \hat{i}$ alleine

→ für Zeiger $\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{i}}$

Was sind Zeiger?

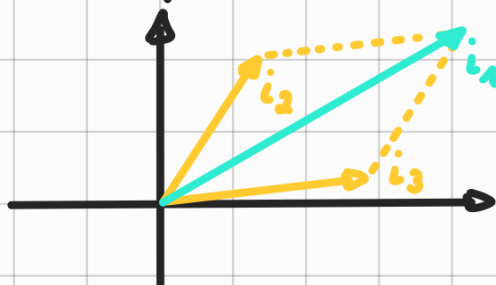


Länge $\hat{=}$ $\hat{u}$

Phase φ bzgl. einer fest gewählten Achse

Zeiger sind die Rechnung vereinfachende Hilfskonstrukte für Wechselstromkreise die nur eine Frequenz aufweisen. Für Zeiger gelten MR und KR.

→ Vektoraddition, -subtraktion



$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

4.4.2 Winkel im Zeigerdiagramm

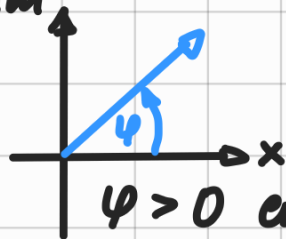
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

zeichne φ von $\underline{\hat{i}}$ zu $\underline{\hat{u}}$

bezeichne Schaltung als

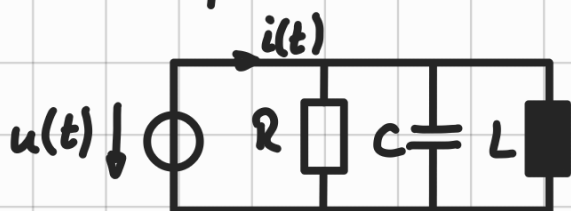
ohmsch induktiv falls $\varphi > 0$

ohmsch kapazitiv falls $\varphi < 0$



$\varphi > 0$ entgegen Uhrzeigersinn
 $\varphi < 0$ im Uhrzeigersinn

4.4.3 Beispiele



rechnerisch: $u(t) = u_R(t) = u_C(t) = u_L(t)$
 $= \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$

→ deshalb gilt: $\hat{u} = \hat{u}_R = \hat{u}_C = \hat{u}_L$

KR: $i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$

wichtig: es gilt nicht $\hat{i} = \hat{i}_R + \hat{i}_C + \hat{i}_L$

$$\hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) = \hat{i}_R \sin(\omega t + \varphi_u) + \hat{i}_C \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) + \hat{i}_L \sin(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2})$$

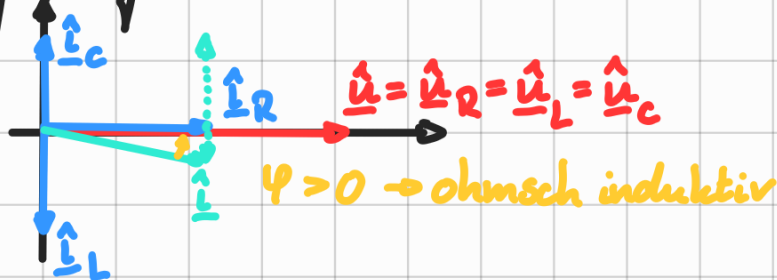
→ Lösung ist möglich mit Additionstheoremen, z.B.:

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

→ extrem aufwendig

→ macht man nie im Reellen, sondern immer nur komplex (→ Kap. 5)

Zeigerdiagramm



In einem qualitativen Zeigerdiagramm ist die Länge der Zeiger beliebig, in einem quantitativen Zeigerdiagramm verwendet man:

$$\hat{i}_R = \frac{1}{R} \hat{u}_R \quad \hat{i}_C = \omega C \hat{u}_C \quad \hat{i}_L = \frac{1}{\omega L} \hat{u}_L$$

in obiger Schaltung gilt: $\hat{u} = \hat{u}_R = \hat{u}_C = \hat{u}_L$

Phasenverschiebung

In sehr seltenen Fällen kann man die Phasenverschiebung aus dem Zeigerdiagramm ablesen

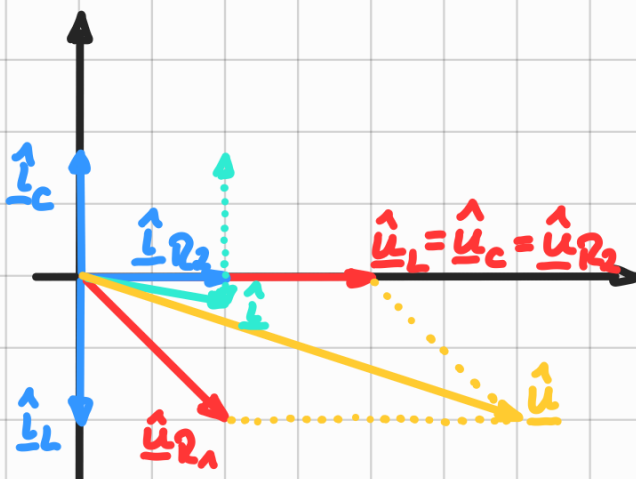
Hier ist:
$$\tan(\varphi) = \frac{\hat{i}_L - \hat{i}_C}{\hat{i}_R} = \frac{\frac{1}{\omega L} \hat{u} - \omega C \hat{u}}{\frac{1}{R} \hat{u}} = R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arctan \left(R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right)$$

Beispiel (qualitativ)

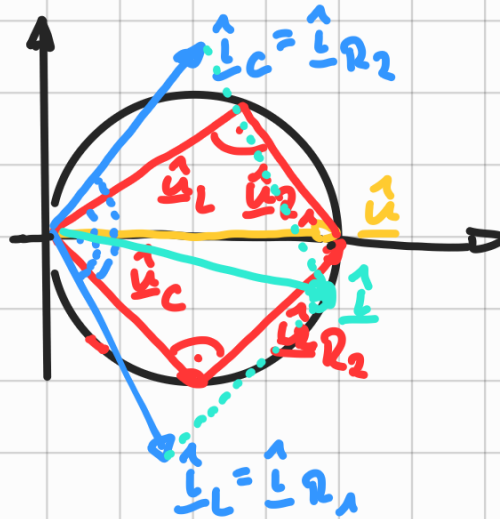
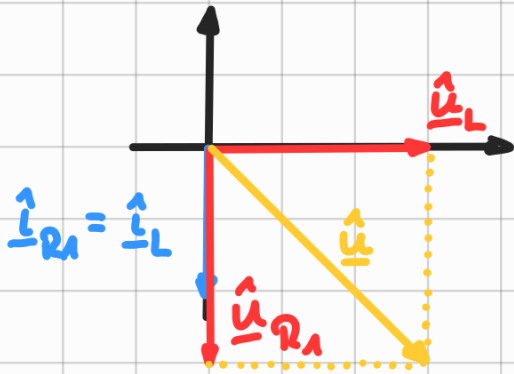
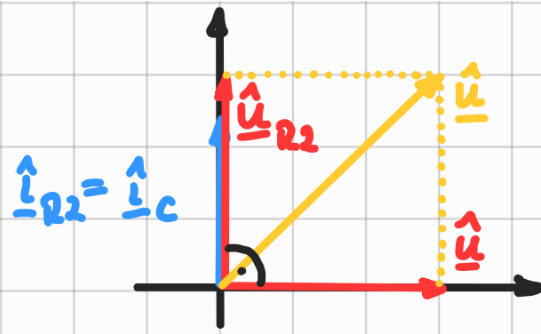
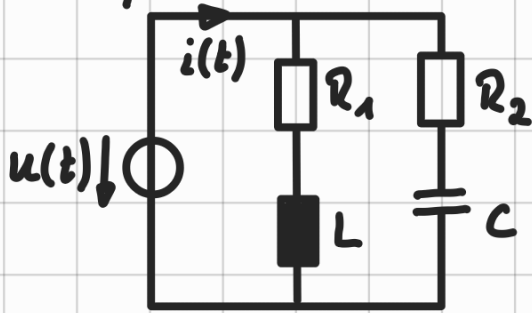


qualitatives Zeigerdiagramm mit Berücksichtigung von MR & KR
 starte mit dem Bauteil, das am weitesten von Spannungsquelle entfernt ist



$\hat{i}$ und $\hat{u}$ sind in Phase
 $\varphi > 0 \rightarrow$ ohmsch induktiv

Beispiel mit Thaleskreis



möglich wenn pro Zweig mind. 2 Bauteile

4.5 Leistung

Momentanleistung: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

$$= \hat{u} \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Wirkleistung: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$

$$= \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} \right) \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

$$= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi)$$

$$= U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

$$[P] = W$$

Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$

Bei Kondensator und Spule ist $P = 0$

Blindleistung: $Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$

Kondensator: $Q = U \cdot I \cdot (-1) < 0$

Spule: $Q = U \cdot I \cdot (+1) > 0$

Anhand des Vorzeichens der Gesamtblindleistung einer Schaltung nennt man die Schaltung für

$Q < 0$ ohmsch kapazitiv

$Q > 0$ ohmsch induktiv

$[Q] = \text{var}$ (voltage ampere relative)

Scheinleistung: $S = (P^2 + Q^2)^{1/2}$
 $= U \cdot I$

$[S] = \text{V} \cdot \text{A}$

Effektivwerte:

$$U_{\text{eff}} = U = \left(\frac{1}{T} \int_0^T (u(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

$= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$ für sinus- oder cosinusförmige Spannung

$$I_{\text{eff}} \text{ analog: } \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

5. komplexe Wechselspannung

5.1 komplexe Darstellung von Wechselgrößen

Spannung und Strom

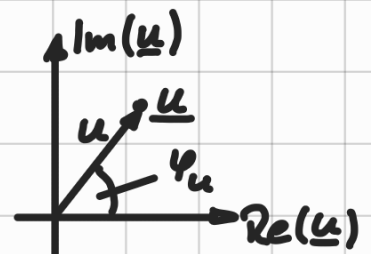
$$\underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}$$

$$\underline{i}(t) = I e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t}$$

U, I : Effektivwerte

φ_u, φ_i : Phasenwinkel

$\underline{U}, \underline{I}$: Zeiger der Effektivwerte



5.1.1 Zusammenhang mit reellen Größen

$$z = r \cdot e^{j\varphi} = r (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))$$

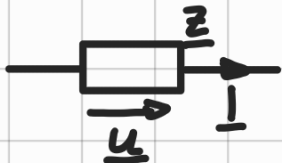
$$\underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U \cos(\omega t + \varphi_u) + j U \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Vergleich:

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} \cdot U \sin(\omega t + \varphi_u) \\ &= \sqrt{2} \cdot \operatorname{Im}(\underline{u}(t)) \end{aligned}$$

5.2 komplexer Scheinwiderstand

Schaltzeichen



$$\text{es gilt: } \underline{u} = \underline{z} \cdot \underline{i}$$

$$\underline{z} \in \mathbb{C} : \text{Impedanz, } [\underline{z}] = \Omega$$

$$\underline{i} = \frac{1}{\underline{z}} \underline{u} = \underline{y} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}} \in \mathbb{C} : \text{Admittanz}$$

$$[\underline{y}] = S (\text{Siemens})$$

$$\text{Verwende } \underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi_u)}, \quad \underline{i}(t) = I e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$\underline{z} = Z e^{j\varphi}$$

$$U e^{j\omega t} e^{j\varphi_u} = Z e^{j\varphi} \cdot I e^{j\omega t} e^{j\varphi_i}$$

$$U e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot I e^{j\varphi}$$

$$\text{Vergleich: } U = Z \cdot I$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

5.2.1 Bezeichnungen

$$\text{Schreibe: } \underline{z} = R + jX$$

$$\underline{y} = G + jB$$

Wirkwiderstand (Resistanz)

$$R = |\operatorname{Re}(\underline{z})|$$

Blindwiderstand (Reaktanz)

$$X = |\operatorname{Im}(\underline{z})|$$

Wirkleitwert (Konduktanz)

$$G = |\operatorname{Re}(\underline{y})|$$

Blindleitwert (Suszeptanz)

$$B = |\operatorname{Im}(\underline{y})|$$

5.2.2 Ohmscher Widerstand

$$\underline{U} = R \underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \rightarrow \text{Impedanz } \underline{Z} = R \text{ ist rein reell}$$

$$\varphi = 0$$

$$X_R = 0$$

5.2.3 Kondensator

$$\underline{I} = C \cdot \frac{d\underline{U}}{dt} = j\omega C \underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{U}$$

$$\rightarrow \text{Impedanz } \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j^2 \omega C} = -j \cdot \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

5.2.4 Spule

$$\underline{U} = L \cdot \frac{d\underline{I}}{dt} = j\omega L \underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$\rightarrow \text{Impedanz } \underline{Z} = j\omega L$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$X_L = \omega L$$

5.3 Kirchhoffsche Regeln

$$\text{Knotenregel: } \sum_k \underline{I}_k = 0$$

$$\text{Maschenregel: } \sum_k \underline{U}_k = 0$$

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$$

$\rightarrow$ Kirchhoffsche Regeln gelten auch für Zeiger

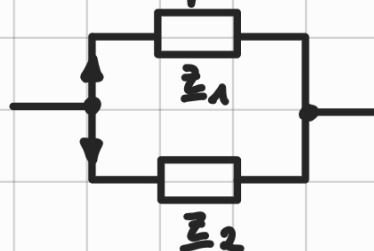
Strom- & Spannungsteilerregel

$$\text{am Knoten: } \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}$$

$$\text{in Masche: } \underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$$



Reihen- und Parallelschaltung

Reihenschaltung: $\underline{Z}_{\text{ges}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n$

Parallelschaltung: $\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}$

alternativ: $\underline{Y}_{\text{ges}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n$

5.4 Leistung

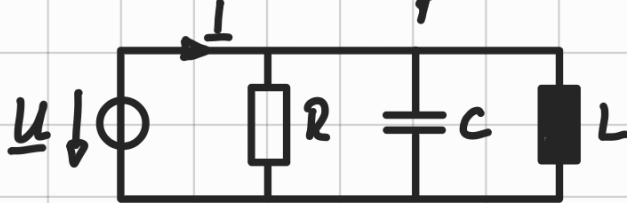
komplexe Scheinleistung: $\underline{S} = \underline{U} \cdot \overset{\text{"komplex konjugiert"}}{\underline{I}^*} = \underline{U} e^{j(\omega t + \varphi_u)} \cdot \underline{I} e^{j(\omega t + \varphi_i)}$
 $= \underline{U} \cdot \underline{I} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$
 $= \underline{U} \cdot \underline{I} \cdot (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))$
 $= P + jQ$

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S})$$

$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S})$$

5.4.1 Blindleistungskompensation

Q ist für Kondensatoren negativ und für Spulen positiv $\rightarrow Q_{\text{ges}}$ kann so gestaltet werden, dass $Q_{\text{ges}} = 0$ ist



1. Möglichkeit

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}_{\text{ges}} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}_{\text{ges}} \cdot |\underline{I}|^2 = \underline{Z}_{\text{ges}} \cdot I^2$$

$\underline{S} = P + jQ$ muss rein reell sein, wenn $Q = 0$ gelten soll $\rightarrow \underline{Z}_{\text{ges}}$

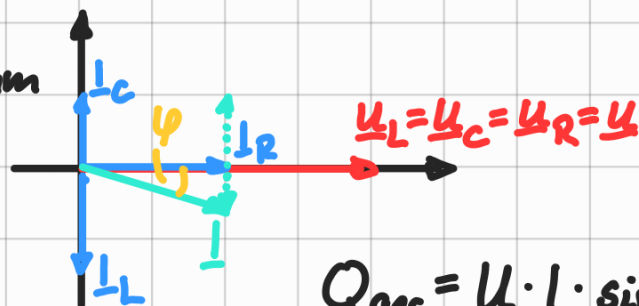
bzw. $\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ges}}}$ muss rein reell sein

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{-j}{\omega L}$$

$$= \frac{1}{R} + j \underbrace{(\omega C - \frac{1}{\omega L})}_{=0}$$

$\rightarrow$ es muss gelten $\omega C = \frac{1}{\omega L}$

2. Möglichkeit Zeigerdiagramm



$$Q_{\text{ges}} = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \varphi = 0$$

$$\rightarrow |I_C| = |I_L|$$

$$\rightarrow \left| \frac{1}{Z_C} U_C \right| = \left| \frac{1}{Z_L} U_L \right|$$

$$\rightarrow \omega C U = \frac{1}{\omega L} U$$

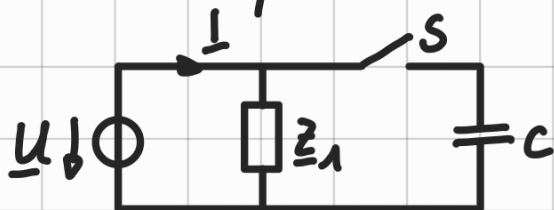
$$\rightarrow \omega C = \frac{1}{\omega L}$$

3. Möglichkeit

$$\begin{aligned} Q_{\text{ges}} &= \sum Q_i = Q_R + Q_C + Q_L \\ &= 0 + (-U_C |I_C|) + (+U_L |I_L|) \quad \left. \vphantom{\sum Q_i} \right\} \text{alles Beträge!} \\ &= -U \cdot \frac{1}{Z_C} \cdot U + U \cdot \frac{1}{Z_L} \cdot U \\ &= U^2 (-\omega C + \frac{1}{\omega L}) = 0 \rightarrow \omega C = \frac{1}{\omega L} \end{aligned}$$

5.5 Ausführliche Beispiele

5.5.1 Beispiel



$$\begin{aligned} \text{geg.: } Z_1 &= 2 \Omega \cdot e^{j30^\circ} = 2 \Omega e^{j\frac{\pi}{6}} \\ U &= 10 \text{ V} \\ f &= 2 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Zunächst sei S geöffnet

Geben Sie den zeitlichen Verlauf von $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$ an, sowie die Schein-, Wirk- und Blindleistung

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Im}(\underline{U}(t)) \\ &= \sqrt{2} \cdot 10 \text{ V} \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}(t) &= 10 \text{ V} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \\ &= 10 \text{ V} \cdot (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

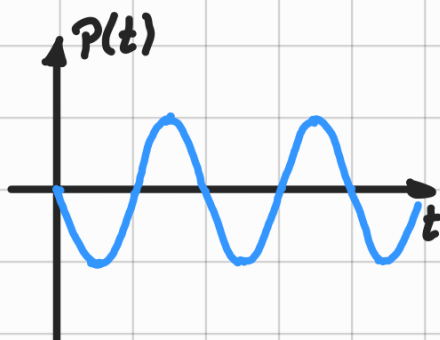
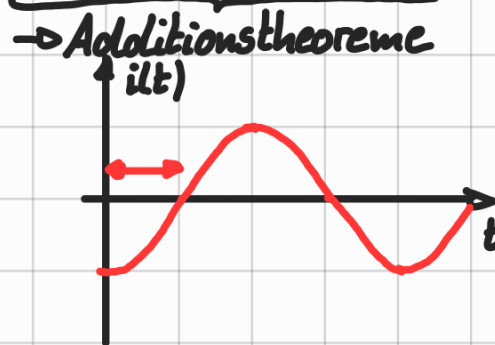
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{Z_1} = \frac{10 \text{ V}}{2 \Omega e^{j\frac{\pi}{6}}} = 5 \text{ A} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\underline{I}(t) = \underline{I} e^{j\omega t} = 5 \text{ A} \cdot e^{j(\omega t - \frac{\pi}{6})}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Im}(I(t))$$

$$= \sqrt{2} \cdot 5A \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 100W \cdot \underbrace{\sin(\omega t) \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})}_{\rightarrow \text{Additionstheoreme}}$$



$p(t)$ nimmt auch negative Werte an
 $\rightarrow$ weist darauf hin, dass $Q_{\text{ges}} \neq 0$ gilt

Leistungen: $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$

$$= 10V \cdot 5A e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$= 50VA \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$= 50VA \cdot (\cos(\frac{\pi}{6}) + j \sin(\frac{\pi}{6}))$$

$$= 50VA \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2})$$

$$= P + jQ$$

$$\rightarrow P = 25\sqrt{3}W$$

$$Q = 25\text{ var}$$

Nun sei S geschlossen

Bestimmen Sie X_c so, dass $Q_{\text{ges}} = 0$ gilt

Geben Sie anschließend den zeitl. Verlauf von $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$ an

1. Möglichkeit: Summe der Blindleistungen betrachten

2. Möglichkeit: Gesamtstrom berechnen und Imaginärteil auf Null setzen

$$\underline{S} = \underbrace{\underline{U}}_{\text{reell}} \underbrace{\underline{I}^*}_{\text{reell}}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_c}$$

$$= 5A e^{-j\frac{\pi}{6}} + \frac{10V}{-jX_c}$$

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$= -j \cdot X_c$$

$$= 5A \cdot (\cos(\frac{\pi}{6}) - j \sin(\frac{\pi}{6})) + j \frac{10V}{X_c}$$

$$\text{Im}(\underline{I}) = -5A \cdot \frac{1}{2} + \frac{10V}{X_c} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow X_c = 4\Omega$$

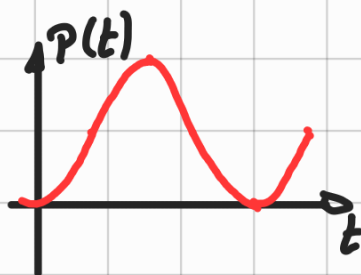
zeitl. Verlauf

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 10V \sin(\omega t)$$

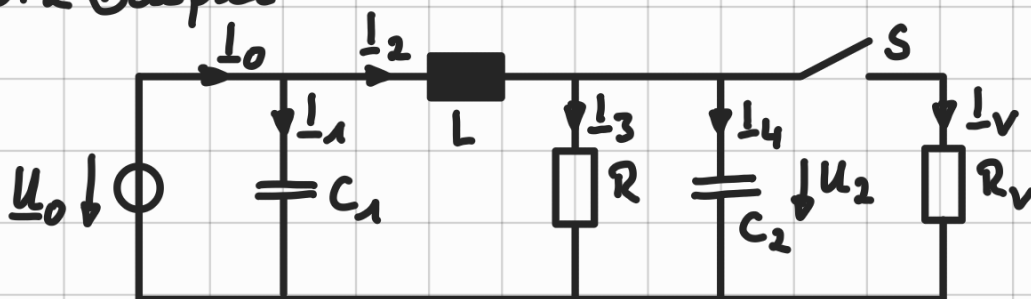
$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 5A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t)$$

$$p(t) = 50\sqrt{3} W \sin^2(\omega t)$$

Da $Q_{\text{ges}} = 0$ ist, ist $p(t)$ immer positiv



5.5.2 Beispiel



geg.: $X_L = 50\Omega$ $R = 50\Omega$
 $X_{C1} = 100\Omega$ $f = 50\text{ Hz}$
 $X_{C2} = 50\Omega$

Schalter S zunächst offen und $U_0 = 100V$

gesucht: 1. L, C_2

2. $\underline{Z}_{RC}$ (aus R, C_2), $\underline{Z}_2$ (aus R, C_2, L)

3. I_0, I_1, I_2

4. Phase φ zw. $\underline{I}_0$ & $\underline{U}_0$

5. Amplitude $\hat{u}_2$ von $\underline{U}_2$

6. qualitatives Zeigerdiagramm

1. Betrachte Blindwiderstände

$$X_L = \omega L \rightarrow L = \frac{1}{\omega} X_L = \frac{50 \Omega}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz}} = 0,16 \text{ H}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow C_2 = \frac{1}{\omega X_{C2}} = 63,7 \mu\text{F}$$

2. Impedanzen

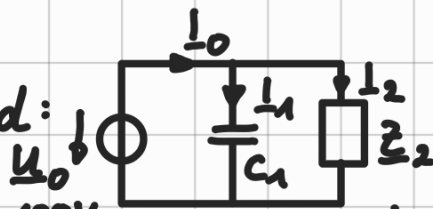
$$\underline{Z}_{RC} = \underline{Z}_R \parallel \underline{Z}_{C2} = \frac{\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{C2}} = \frac{R \cdot (-jX_{C2})}{R + (-jX_{C2})}$$
$$= R \cdot (-jX_{C2}) \cdot \frac{R + jX_{C2}}{R^2 + X_{C2}^2}$$

$$= -j(50 \Omega)^2 \frac{50 \Omega + j50 \Omega}{(50 \Omega)^2 + (50 \Omega)^2}$$
$$= 25 \cdot (1 - j) \Omega$$

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_{RC} + \underline{Z}_L = \underline{Z}_{RC} + jX_2$$
$$= 25(1 - j) \Omega + j50 \Omega$$
$$= 25(1 + j) \Omega$$

3. $\underline{I}_0, \underline{I}_1, \underline{I}_2$

Ersatzschaltbild:



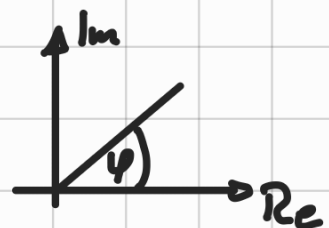
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_2} = \frac{100 \text{ V}}{25(1 + j) \Omega} = 4 \text{ A} \cdot \frac{1 - j}{2} = 2(1 - j) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_C} = \frac{100 \text{ V}}{-j \cdot 100 \Omega} = 1j \text{ A}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (2 - j) \text{ A}$$

4. Phase zw. $\underline{U}_0$ und $\underline{I}_0$

$$\frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \underline{Z}_{\text{ges}} = \underline{Z}_{\text{ges}} e^{i\varphi} = \frac{100 \text{ V}}{(2 - j) \text{ A}}$$
$$= 20(2 + j) \Omega$$



$$\tan(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(\dots)}{\operatorname{Re}(\dots)} = \frac{20 \cdot 1}{20 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26,6^\circ \text{ (ohmsch induktiv)}$$

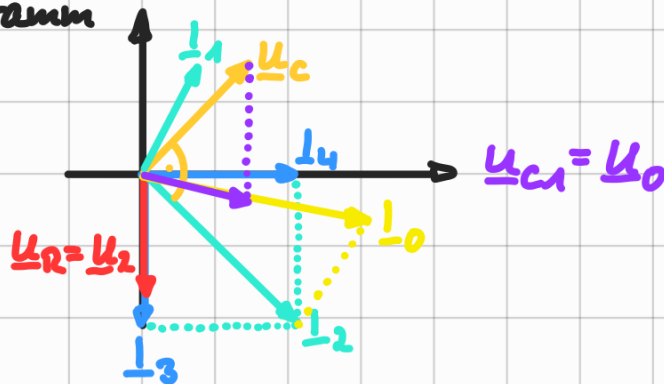
5. $\hat{u}_2$

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 = \underline{U}_R &= \underline{U}_{C1} - \underline{U}_C = \underline{U}_0 - \underline{U}_L \\ &= 100 \text{ V} - (\underline{Z}_C \underline{I}_C) \\ &= 100 \text{ V} - j 50 \Omega \cdot 2(1-j) \text{ A} \\ &= -j \cdot 100 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_2 = \sqrt{2} \cdot |\underline{U}_2| \approx 141 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \text{schnellste Alternative: } \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{RC} \cdot \underline{I}_2 = 25(1-j) \cdot 2(1-j) \text{ V} \\ &= -j \cdot 100 \text{ V} \end{aligned}$$

6. Zeigerdiagramm



Schalter S sei nun geschlossen

$$R_v = 25 \Omega, U_v = |\underline{U}_v| = 50 \text{ V}, U_0 = 150 \text{ V}$$

ges.: Wirkleistung P_0 der Quelle

Ersatzadmittanz Y_3 (aus R, C_2, R_v)

Blindleistungen Q_0, Q_L

anschließend X_{C1} so, dass $Q_0 = 0$

1. P_0

$$P_0 = \operatorname{Re}(\underline{U}_0 \underline{I}_0^*) = U_v \cdot I_v + U_R \cdot I_3$$

$$= U_v \cdot \frac{U_v}{R_v} + U_v \cdot \frac{U_v}{R} = \left(\frac{1}{R_v} + \frac{1}{R}\right) U_v^2 = 150 \text{ W}$$

2. Ersatzadmittanz

$$\underline{Y}_3 = \underline{Y}_R + \underline{Y}_{C2} + \underline{Y}_{Rv} = \frac{1}{\underline{Z}_{Rc}} + \underline{Y}_{Rv} = \frac{1}{25(1-j)\Omega} + \frac{1}{25\Omega}$$

$$= \frac{1}{50} (3+j) S$$

3. Blindleistungen

$$\begin{aligned} Q_L &= \operatorname{Im}(\underline{U}_L \underline{I}_2^*) = \operatorname{Im}(\underline{Z}_L \underline{I}_2 \underline{I}_2^*) \\ &= \operatorname{Im}(jX_L) \underline{I}_2^2 \\ &= X_L \underline{I}_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_v \rightarrow |\underline{I}_2| = |\underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_v| \\ \underline{I}_2 &= \frac{1}{50} \sqrt{9+1} S \cdot 50V = \sqrt{10} A \end{aligned}$$

$$\rightarrow Q_L = 50\Omega \cdot (10A)^2 = 500 \text{ var}$$

$$\begin{aligned} Q_0 &= \operatorname{Im}(\underline{U}_0 \underline{I}_0^*) = \operatorname{Im}(\underline{U}_0 (\underline{Y}_{\text{ges}} \underline{U}_0)^*) \\ &= \underline{U}_0^2 \cdot \operatorname{Im}(\underline{Y}_{\text{ges}}^*) \end{aligned}$$

Alternative:

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q_{C1} + Q_{C2} + Q_L \\ &= -U_1 \cdot I_1 - U_2 \cdot I_4 + Q_L = -U_0 \frac{U_0}{X_{C1}} - U_v \frac{U_v}{X_{C2}} + Q_L \\ &= -225 \text{ var} - 50 \text{ var} + 500 \text{ var} = 225 \text{ var} \end{aligned}$$

4. Blindleistungskompensation

$$Q_0 = \left(-\frac{U_0^2}{X_{C1}} + 450 \text{ var}\right) = 0$$

$$\rightarrow X_{C1} = 50 \Omega$$