

Hier hatten wir ein Bild mit dem Logo der Uni Tübingen.
Allerdings werden das nicht alle Tutor:innen durchgehen lassen,
da Studierende nichts im Namen der Uni veröffentlichen dürfen,
wegen Verantwortlichkeit und so.

Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler an der Universität Tübingen

SA - Saitenschwingung

Gruppe: 3
Verfasser: Micha Beck
Franziska Trotter
Studiengang: Medizintechnik B.Sc.
Betreuer: Chris Nill/Marcel Cech
Versuchsdatum: 01.03.2021
Abgabedatum: 01.03.2021
Abgabedatum 2: 05.03.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
1.1	Interferenz von Wellen	2
1.2	Seilwellen	2
2	Experimenteller Teil	3
2.1	Versuchsaufbau	3
2.2	Versuchsteil 1	3
2.2.1	Zielstellung	3
2.2.2	Durchführung	3
2.2.3	Beobachtung	3
2.2.4	Auswertung	4
2.3	Versuchsteil 2	7
2.3.1	Zielstellung	7
2.3.2	Durchführung	7
2.3.3	Beobachtung	7
2.3.4	Auswertung	7
2.4	Fazit	9
2.5	Messdaten	10

1 Theorie

1.1 Interferenz von Wellen

Treffen zwei oder mehrere mechanische Wellenzüge aufeinander, so kommt es zur Überlagerung; die jeweiligen Phase der Einzelwellen werden addiert (Superpositionsprinzip). Dieses Auftreten von Überlagerungsformen und deren Erscheinungsbild wird als Interferenz bezeichnet, welche im Extremfall konstruktiver (Maximas bzw. Minimas treffen aufeinander) oder destruktiver (Maxima und Minima treffen aufeinander) Natur sein kann. Trifft auf jedes Maximum ein Minimum mit gleicher Amplitude und umgekehrt aufeinander, so löschen sich die Wellen gegenseitig aus und es ist keinerlei Auslenkung des Mediums vorhanden. Anders ist es beim Aufeinandertreffen von Phasenbereichen die sich in Summe nicht zu Null ergeben. In diesen Bereichen ist bei der Überlagerung der Einzelwellen eine Schwingung vorhanden.

1.2 Seilwellen

Auf einem Seil wird eine Welle als Transversalwelle ausgebreitet. Das heißt die Welle breitet sich in eine Richtung (in diesem Fall in fortlaufende Richtung des Seils) aus und die Seilabschnitte schwingen in eine andere, orthogonal dazu stehende, Achse. Bei einem Seil mit zwei eingespannten Enden wird die Welle am zweiten Ende mit einem Phasenversatz von π reflektiert. Das bedeutet, dass ein eintreffender Wellenberg zu einem Wellental mit negativer Ausbreitungsrichtung $-k$ wird. Jetzt laufen zwei Wellen mit gleicher Frequenz und Amplitude in entgegengesetzte Richtung und interferieren miteinander. Die beiden Wellen werden beschrieben durch

$$y(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx) \text{ und } y(x, t) = y_0 \sin(\omega t + kx) .$$

Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und die Ausbreitungsrichtung $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Diese kontinuierliche Überlagerung zweier Wellen führt zu einer stehenden Welle auf dem Seil. Dabei gibt es ortsfeste Knoten, an welchen es keine Schwingung gibt, und Bäuche, welche maximal schwingen. Die festen Enden des Seils sind ebenfalls Knoten.

Da die Wellenlänge λ von der Frequenz abhängt, kann ein Seil fester Länge L nicht bei jeder Frequenz eine stehende Welle bilden. Dies ist nur bei bestimmten Verhältnissen von Seil- und Wellenlänge möglich:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 2 \cdot \frac{L}{n} \quad (1)$$

Mit $f = \frac{c}{\lambda}$ folgt daraus

$$f_n = n \cdot \frac{c}{2L} \quad (2)$$

und weiter

$$f_n = n \cdot f_1 \quad \text{mit} \quad f_1 = \frac{c}{2L} \quad (3)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle auf dem Seil ist abhängig von der Massenbelegung $\mu = \frac{m}{L}$ und der Seitenspannung F_{Sp} und berechnet sich durch

$$c = \sqrt{\frac{F_{Sp}}{\mu}} . \quad (4)$$

2 Experimenteller Teil

2.1 Versuchsaufbau

Eine Saite in Form eines Gummiseils wird von einem Lautsprecher (über Frequenzgenerator angesteuert) zur Schwingung angeregt. Die Saite verläuft horizontal und wird dann mittels Umlenkrollen auf die Vertikale umgeleitet, wo verschiedene Gewichte angehängt werden können. Dadurch kann entsprechend der unterschiedlichen Gewichtskräfte die Saitenspannung variiert werden. Zusätzlich können an der Saite bis zu zwei Klemmen angebracht werden, welche das feste Ende der Saite bilden, um die Länge der schwingenden Saite zu verändern.

2.2 Versuchsteil 1

2.2.1 Zielstellung

Der erste Versuchsteil bezieht sich auf die Masse μ des eingespannten Seils und Ausbreitungsgeschwindigkeit c der eingespannten Saite bei konstanter Länge L und variablen Massen M . Diese sollen mittels wiederholten Messungen mit verschiedenen Seilspannungen berechnet werden.

2.2.2 Durchführung

Für vier verschiedene Spannmassen (hier: 100 g; 150 g; 200 g; 250 g) und konstanter Saitenlänge L (hier: $L=77$ cm) werden die Frequenzen der ersten 8 Moden bestimmt. Dazu wird das Seil mehrmals neu gespannt, indem verschiedene Gewichte an das über die Umlenkrollen geführte Saitenende gehängt. Daraus wird dann für die unterschiedlichen Saitenspannungen die Grundfrequenz f_1 , die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die Masse m der schwingende Saite, sowie der gewichtete Mittelwert der Masse m ermittelt/berechnet.

2.2.3 Beobachtung

Die gegebenen Messwerte wurden hier in ein Diagramm eingefügt, wodurch schnell sichtbar wird, dass ein mutmaßlich linearer Zusammenhang zwischen der Saitenspannung und den Frequenzen, durch welche stehende Wellen entstehen können, besteht.

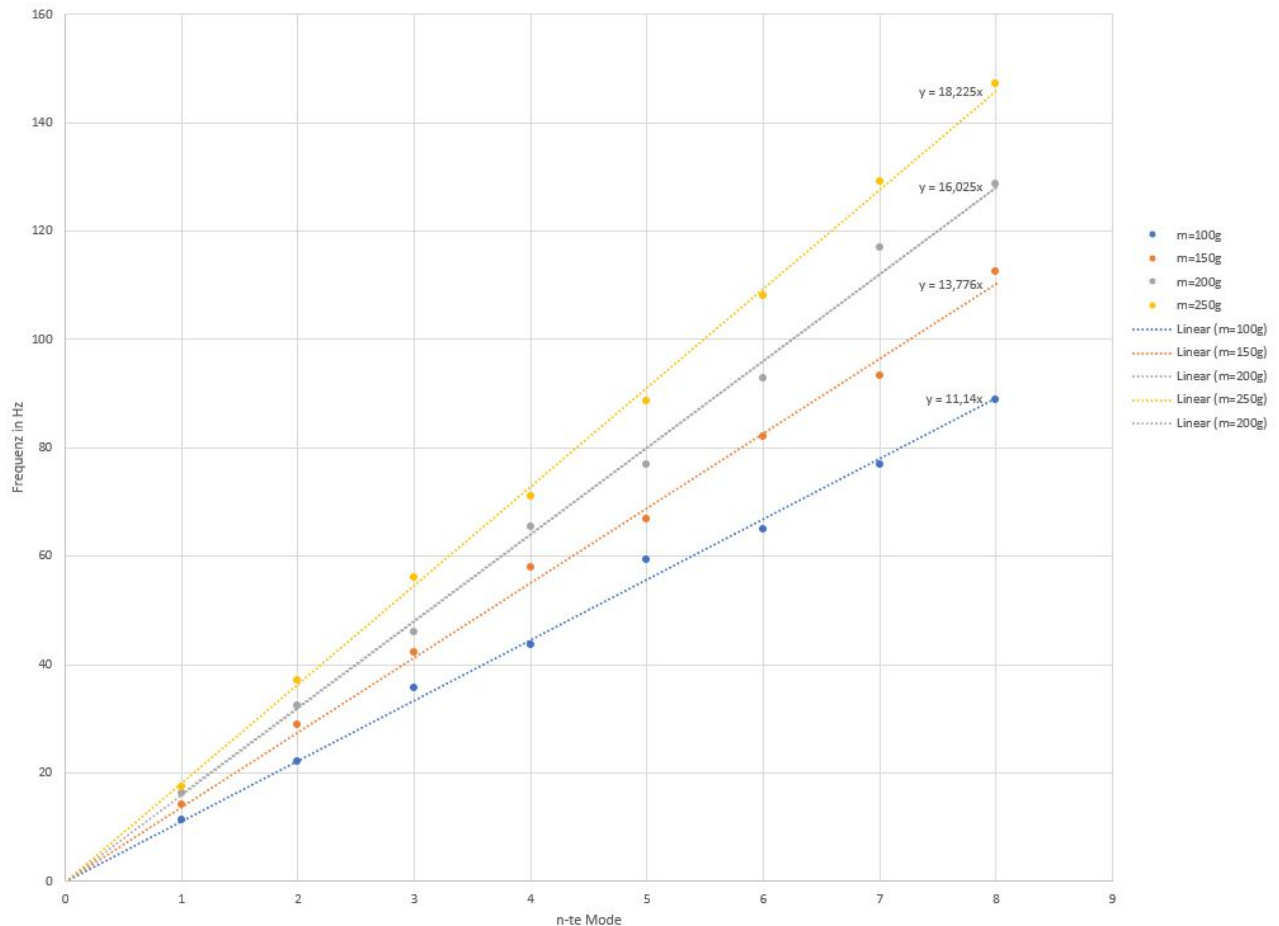


Abbildung 1: Frequenzen der ersten acht Moden einer Saite fester Länge $L = 77$ cm bei unterschiedlichen Saitenspannungen.

2.2.4 Auswertung

a) Aus dem Diagramm wird direkt sichtbar, dass die Seilspannung Einfluss auf die Frequenzen der verschiedenen Moden hat. Dabei entsprechen die Steigungen der Ausgleichsgeraden gerade der Grundfrequenzen f_1 . Über lineare Regression mit der RGP-Funktion von Excel können die Steigungen direkt abgelesen werden und es ergeben sich für die verschiedenen Massen verschiedene Grundfrequenzen.

Masse m	Grundfrequenz f_1 [Hz]	relativer Fehler
100 g	$11,14 \pm 0,26$	$11,14 (1 \pm 2,4\%) \text{ Hz}$
150 g	$13,8 \pm 0,3$	$13,8 (1 \pm 2,2\%) \text{ Hz}$
200 g	$16,0 \pm 0,4$	$16,0 (1 \pm 2,4\%) \text{ Hz}$
250 g	$18,23 \pm 0,24$	$18,23 (1 \pm 1,3\%) \text{ Hz}$

b) Mithilfe der Formel (3) lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c einer stehenden Welle in ihrer Grundmode berechnen.

$$c(L, f_1) = 2L \cdot f_1 \quad (5)$$

Für die verschiedenen Massen ergeben sich folgende Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

Masse m	Grundfrequenz f_1 [Hz]	Ausbreitungsgeschwindigkeit c [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]
100 g	11,1398948	17,15543806
150 g	13,77604962	21,21511641
200 g	16,02521217	24,67882674
250 g	18,22547486	28,06723128

Mit der EG-Genauigkeitsklasse III des Meterstabes und einer Saitenlänge von 77 cm ergibt sich ein systematischer Fehler von

$$\Delta x_{sys} = a + b \cdot [l] = 0,6 \text{ mm} + 0,4 \frac{\text{mm}}{\text{m}} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ mm} \quad (6)$$

Der statistische Fehler beträgt $\Delta x_{stat} = 0,3 \text{ mm}$ und durch Addition ergibt sich für die Ungenauigkeit der Saitenlänge $\Delta u_L = 1,3 \text{ mm}$.

Zu der Ausbreitungsgeschwindigkeit c ergibt sich nun die Unsicherheit Δc durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung. Hier wird die Rechnung beispielhaft mit den Werten der Messungen mit $m=100 \text{ g}$ durchgeführt.

$$\begin{aligned} \Delta c &= \sqrt{\left(\frac{\partial c(L, f_1)}{\partial L} \cdot \Delta u_L\right)^2 + \left(\frac{\partial c(L, f_1)}{\partial f_1} \cdot \Delta u_{f_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{(2f_1 \cdot \Delta u_L)^2 + (2L \cdot \Delta u_{f_1})^2} \\ &= \sqrt{(2 \cdot 11,1398948 \frac{1}{\text{s}} \cdot 0,0013 \text{ m})^2 + (2 \cdot 0,77 \text{ m} \cdot 0,256308188 \frac{1}{\text{s}})^2} \\ &= 0,39577584 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (7)$$

Für die Masse $m=100 \text{ g}$ ergibt sich also eine Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = (17,2 \pm 0,4) \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Für die anderen Saitenspannungen wird analog gerechnet.

Masse m	Ausbreitungsgeschwindigkeit c [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]
100 g	$17,2 \pm 0,4$
150 g	$21,2 \pm 0,5$
200 g	$24,7 \pm 0,6$
250 g	$28,1 \pm 0,4$

c) Die Saitenmasse soll nun mithilfe der gegebenen Größen berechnet werden. Dazu wird die Saitenspannung F_{Sp} benötigt, welche sich über die Gewichtskraft der angehängten Gewichte berechnet.

$$F_{Sp} = F_G = m_G \cdot g \quad (8)$$

Setzen wir nun diese Gleichung und $\mu = \frac{m}{L}$ in Gleichung (4) ein und stellen diese Formel nach m um, erhalten wir

$$c = \sqrt{\frac{m_G \cdot g \cdot L}{m}} \iff c^2 = \frac{m_G \cdot g \cdot L}{m} \iff m = \frac{m_G \cdot g \cdot L}{c^2} \iff m = \frac{m_G \cdot g}{4 \cdot L \cdot f_1^2}. \quad (9)$$

Hier wird beispielhaft für $m=100\text{ g}$ diese Rechnung durchgeführt. Die Erdbeschleunigung beträgt $g=9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$$m = \frac{0,1\text{ kg} \cdot 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4 \cdot 0,77\text{ m} \cdot 11,1398948\text{ Hz}^2} = 0,002566588\text{ kg} \quad (10)$$

Es ergeben sich folgende Seilmassen m_G für die jeweilige Spannmasse m :

Masse m	Seilmasse m_G
100 g	2,566588 g
150 g	2,517446 g
200 g	2,480508 g
250 g	2,39718 g

Die Messunsicherheit Δu_m ergibt sich ebenfalls über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung. Die Erdbeschleunigung sei exakt bestimmt, die Unsicherheit der Gewichte beträgt hier $\Delta u_{m_G} = 1,0\text{ g}$.

$$\begin{aligned} \Delta u_{m_G} &= \sqrt{\left(\frac{m(L, f_1, m_G)}{\partial L} \cdot \Delta u_L\right)^2 + \left(\frac{m(L, f_1, m_G)}{\partial f_1} \cdot \Delta u_{f_1}\right)^2 + \left(\frac{m(L, f_1, m_G)}{\partial m_G} \cdot \Delta u_{m_G}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{m_G \cdot g}{4 \cdot L^2 \cdot f_1^2} \cdot \Delta u_L\right)^2 + \left(\frac{m_G \cdot g}{2 \cdot L \cdot f_1^3} \cdot \Delta u_{f_1}\right)^2 + \left(\frac{g}{4 \cdot L \cdot f_1^2} \cdot \Delta u_{m_G}\right)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Durch Einsetzen werden die die Unsicherheiten Δu_m der Seilmassen m erhalten.

Masse m	Seilmasse m_G mit Fehler
100 g	$(2,57 \pm 0,13)\text{ g}$
150 g	$(2,52 \pm 0,11)\text{ g}$
200 g	$(2,48 \pm 0,12)\text{ g}$
250 g	$(2,40 \pm 0,07)\text{ g}$

d) Hier soll nun der gewichtete Mittelwert der Masse $\bar{m}_{Seil}$ der schwingenden Saite berechnet werden, sowie dessen Standardabweichung $\Delta u_{\bar{m}}$. Die Massen m_i bezeichnen hierbei die unterschiedlichen Spannmassen.

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{m_i}{\Delta u_{m_i}^2}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\Delta u_{m_i}^2}} \quad (12)$$

$$\Delta u_{\bar{m}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\Delta u_{m_i}^2}}} \quad (13)$$

Damit werden die Werte $\bar{m} = 2,454089\dots\text{ g}$ und $\Delta u_{\bar{m}} = 0,04497\dots\text{ g}$ berechnet und somit ergibt sich $\bar{m} = (2,45 \pm 0,05)\text{ g}$.

2.3 Versuchsteil 2

2.3.1 Zielstellung

Der zweite Versuchsteil zielt darauf ab, den Zusammenhang der umgekehrten Proportionalität von Grundfrequenz f_n und der Saitenlänge L zu zeigen ($L \propto \frac{1}{f_1}$).

2.3.2 Durchführung

Für eine feste Masse M (hier: $M=150\text{ g}$) werden nun je die Frequenzen der Eigenschwingungen f_1 , f_2 und f_3 für acht verschiedene Saitenlängen (hier: 100 cm, 90 cm, 80 cm, 70 cm, 60 cm, 50 cm, 40 cm, 30 cm) bestimmt.

2.3.3 Beobachtung

Dabei ergab sich experimentell folgender Datensatz:

Tabelle 1: Die Frequenz der ersten drei Eigenschwingungen in Abhängigkeit der Saitenlänge L

Länge L [m]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
1	10,30383257	22,32072191	33,12929442
0,9	11,47136233	23,12400052	37,15021935
0,8	13,73886829	27,00868532	39,49207673
0,7	15,54715558	30,31353018	44,59628672
0,6	17,38378746	37,15021935	51,03481643
0,5	22,32072191	41,79042791	65,74467181
0,4	27,00868532	51,03481643	78,96121074
0,3	37,15021935	73,55267583	108,9014664

2.3.4 Auswertung

a) Die jeweilige Grundfrequenz f_1 wird nach Gleichung SA.4 folgendermaßen ermittelt:

$$f_1 = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{6} \quad (14)$$

Daraus folgt also:

Länge L [m]	f_1 [Hz]
1	10,96
0,9	11,96
0,8	13,37
0,7	15,08
0,6	17,60
0,5	21,64
0,4	26,17
0,3	36,60

b) Wie zu erwarten liegen die Messdaten in Abbildung 2 auf einer Geraden. Dies liegt an der umgekehrten Proportionalität von f_1 zur Saitenlänge L ($L \propto \frac{1}{f_1}$). Diese wird aus Gleichung (3) ersichtlich:

$$f_1 = \frac{c}{2L} \iff L = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{f_1} \implies L \propto \frac{1}{f_1} \quad (15)$$

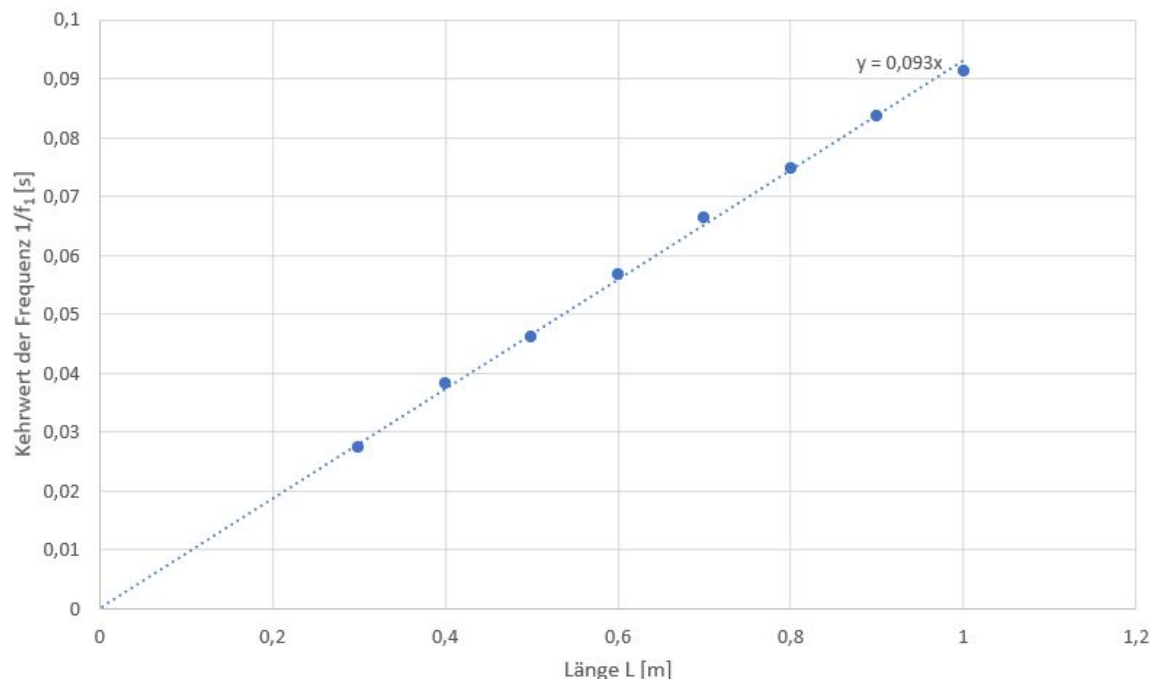


Abbildung 2: Der Kehrwert der Frequenz f_1 gegen die Saitenlänge L mit Ausgleichsgerade $y=0,093014x$

Aus Gleichung 15 geht ebenfalls hervor, dass die Steigung m der Ausgleichsgeraden in Abbildung 2 sich zu $b = \frac{2}{c}$ ergibt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist also

$$c = \frac{2}{b} = \frac{2}{0,093014 \frac{s}{m}} = 21,50213946 \frac{m}{s}. \quad (16)$$

Die Unsicherheit der Steigung der Ausgleichsgeraden, also auch der der Ausbreitungsgeschwindigkeit c wurde mit der RGP-Funktion von Excel zu $s_m = 0,000521936 \frac{m}{s}$ berechnet. Mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung lässt sich außerdem die Messunsicherheit Δu_c angeben. Hierbei gilt es zu beachten, dass der von Excel errechnete Wert mit dem Faktor $t=2$ multipliziert werden muss. Im Folgenden wird daher der Wert $s_b = 0,000521936 \frac{m}{s} \cdot 2 = 0,001043872 \frac{m}{s}$ verwendet.

$$\Delta u_c = \sqrt{\left(-\frac{2}{b^2} \cdot s_b\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{0,093014^2} \cdot 0,001043872 \frac{m}{s}\right)^2} = 0,241312... \frac{m}{s} \quad (17)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist also anzugeben als $c = (21,50 \pm 0,25) \frac{m}{s}$. Abschließend wird nun noch die Ausbreitungsgeschwindigkeit c mit dem Wert für c aus Teil a) verglichen, bei dem die Spannmasse ebenfalls $m=150$ g betrug.

$$1 - \frac{c_1}{c_2} = 0,0140516 \equiv 1,5 \% \quad (18)$$

Diese Abweichung von 1,5 % ist sehr gering. Betrachtet man jedoch die Werte für c_1 und c_2 mit ihren zugehörigen Fehlern und Unsicherheiten zu $c_1 = (21,5 \pm 0,25) \frac{m}{s}$ und $c_2 = (21,2 \pm 0,5) \frac{m}{s}$, so ist ein Schnitt der beiden Intervalle feststellbar. Dies bedeutet, dass man im Rahmen der messbedingten Ungenauigkeit mit beiden Methoden den selben Wert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle bestimmt.

2.4 Fazit

Abschließend soll nun noch auf mögliche, denkbare Fehlerquellen eingegangen werden, die unsere Ergebnisse und Versuchsdaten vom eigentlich der Realität entsprechenden Wert abbringen könnten. Hierbei sind vor allem statistische Abweichungen zu nennen, da es insbesondere beim Einstellen des Frequenzgenerators zu Abweichungen zwischen dem "wahren" Wert und dem Wert, der durch Abschätzung als "wahr" angenommen wurde kommen kann. Ebenfalls denkbar wäre eine Änderung der Saitentemperatur zwischen dem ersten Durchlauf bei a) und dem zweiten bei b), welche wiederum zu Differenzen hinsichtlich den Messwerten c_1 und c_2 führen könnte. Dies ist zwar theoretisch vorstellbar, in der Praxis ist dieser Effekt wohl aber vernachlässigbar klein.

2.5 Messdaten

Werte für den Versuch SA

Gruppennummer:	3	Nachname Teilnehmer*in 1:	Trotter
		Nachname Teilnehmer*in 2:	Beck

Erster Teil: feste Saitenlänge, variable Masse

Saitenlänge	77 cm	EG-Genauigkeitsklasse Meterstab:	3
-------------	-------	----------------------------------	---

Masse M in kg	Frequenz der n-ten Mode in Hz							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0,1	11,198585	22,099695	35,636945	43,596	59,32106707	65,064878	76,868963	88,846049
0,15	14,090077	28,81063	42,324494	57,87965031	66,89104676	82,129673	93,240499	112,52424
0,2	16,26982	32,280063	45,873552	65,40151345	76,97805871	92,84807	116,9067	128,59513
0,25	17,281201	37,094288	56,136801	71,11962458	88,72440031	107,98041	129,24624	147,17626

Zweiter Teil: variable Saitenlänge, feste Masse

Spannmasse:	0,15 kg
-------------	---------

Länge L in m	f_1 in Hz	f_2 in Hz	f_3 in Hz
1	10,303833	22,320722	33,129294
0,9	11,471362	23,124001	37,150219
0,8	13,738868	27,008685	39,492077
0,7	15,547156	30,31353	44,596287
0,6	17,383787	37,150219	51,034816
0,5	22,320722	41,790428	65,744672
0,4	27,008685	51,034816	78,961211
0,3	37,150219	73,552676	108,90147