

Übungsaufgaben Einführung in die Regelungstechnik

Aufgabe 1 (Stabilität von Differentialgleichungen)

Abbildung 1 zeigt einen Standardregelkreis. Der Regler C , die Strecke P und der geschlossene

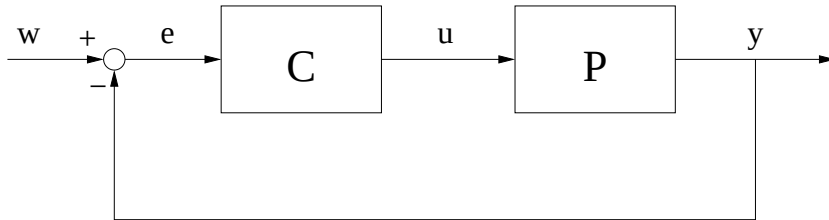


Abbildung 1: Standardregelkreis.

Kreis CL werden durch folgende Differentialgleichungen beschrieben:

$$C: \dot{u} + u = 20e \quad (1.a)$$

$$P: \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2u \quad (1.b)$$

$$CL: \ddot{y} + 5\dot{y} + 8y + 44y = 40w \quad (1.c)$$

- Ist der Regler C stabil?
- Ist die Strecke P stabil?
- Ist der geschlossene Kreis CL stabil?
- Was fällt Ihnen auf?
- Leiten Sie die Differentialgleichung des geschlossenen Kreises CL aus der Regler- und der Streckendifferentialgleichung her.

Aufgabe 2 (Regelungsnormform, Zustandstransformation)

Ein lineares Übertragungssystem werde durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6y = \dot{u} + b \cdot u \quad (2.a)$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$ beschrieben.

- Wählen Sie die Zustandsvariablen so, daß das System in Regelungsnormform gegeben ist.
- Bestimmen Sie die transformierten Anfangsbedingungen.
- Überlegen Sie sich, ob das System für alle Werte von b auf die beschriebene Zustandsraumform gebracht werden kann.

Aufgabe 3 (geschl. Kreis in ZRD, Polvorgabe)

Abbildung 2 zeigt einen Standardregelkreis. Der Regler R und die Strecke S werden durch fol-

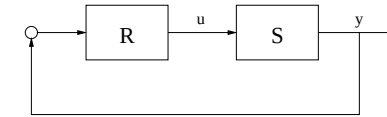


Abbildung 2: Standardregelkreis.

gende Gleichungen beschrieben:

Strecke:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3.a)$$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \quad (3.b)$$

Regler:

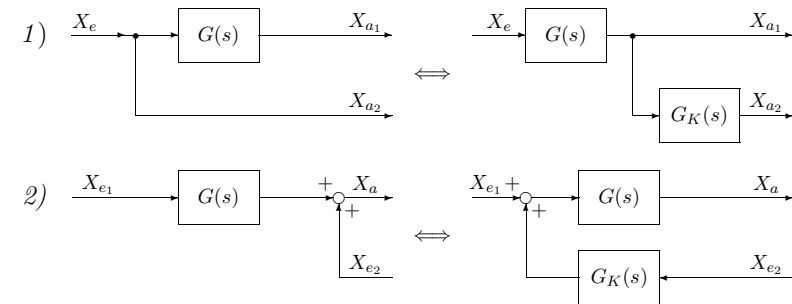
$$u = -(k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}) \underline{y} \quad (3.c)$$

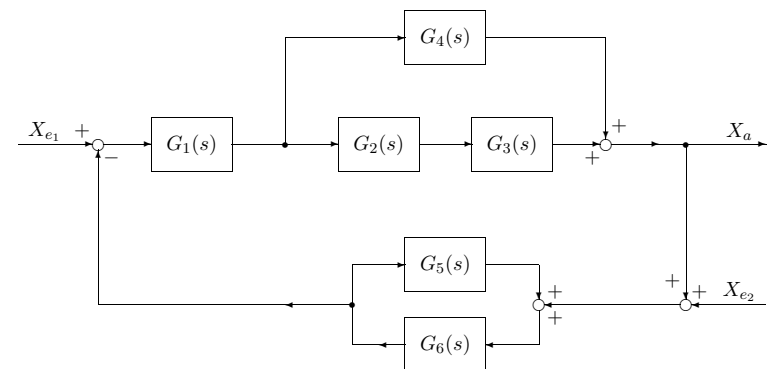
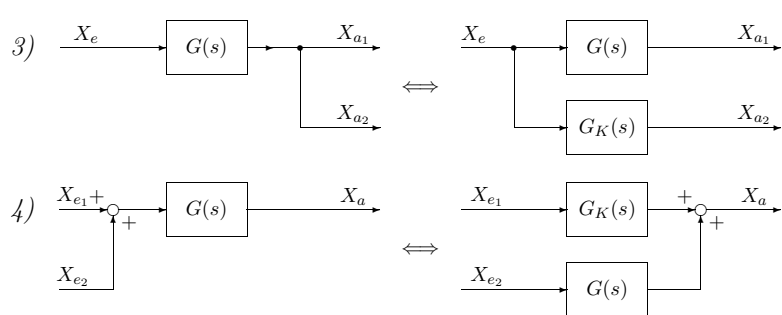
Zeigen Sie, dass mit dieser Konfiguration die Pole/Eigenwerte des geschlossenen Kreises beliebig gewählt werden können. Setzen Sie hierzu die Messgleichung und Reglergleichung in die Systemgleichung ein.

Aufgabe 4 (Zusammengeschaltete Regelkreisglieder)

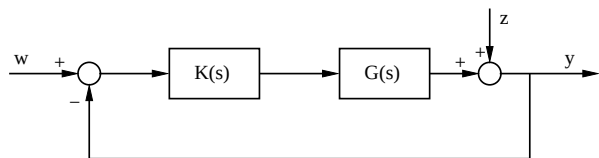
Komplizierte Blockschaltbilder lassen sich oft durch Verlegen der Verzweigungs- und Additionsstellen vereinfachen. Einige einfache Regeln sollen im folgenden hergeleitet werden.

Wie muß die Übertragungsfunktion $G_K(s)$ in den vier Beispielen gewählt werden, damit sich das Übertragungsverhalten durch das Verlegen der Verzweigungs- bzw. Additionsstellen nicht ändert?





Aufgabe 5 (Sensitivität und komplementäre Sensitivität) Gegeben sei das folgende Blockschaltbild eines Regelkreises mit Eingangsgröße w und Ausgangsgröße y .



$$G(s) = \frac{s-1}{s^3 + s^2 - s + 2}$$

$$K(s) = K$$

- Bestimmen Sie die Sensitivitätsfunktion $S(s)$ des Regelkreises.
- Bestimmen Sie die komplementäre Sensitivität $T(s)$.
- Bestimmen Sie für welche Werte von K die komplementäre Sensitivitätsfunktion stabil ist.
- Bestimmen Sie für welche Werte von K die Sensitivitätsfunktion stabil ist.

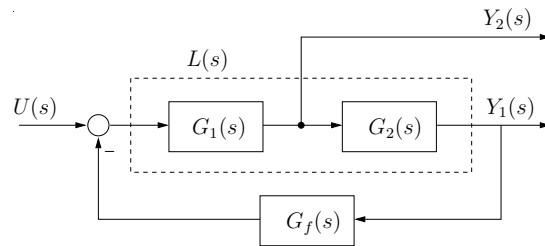
Aufgabe 6 (Übertragungsfunktion aus Blockschaltbild)

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des dargestellten Regelkreises:

- durch Vereinfachung des Blockschaltbilds mit Hilfe der Regeln für das Verlegen von Verzweigungs- und Additionsstellen sowie der Regeln für Reihen-, Parallel- und Kreisschaltungen.
- durch Rechnung nach Einführung von möglichst wenigen Zwischengrößen.

Aufgabe 7 (Übertragungsfunktion, Systemantwort, Sprungantwort)

Gegeben sei das in der folgenden Abbildung dargestellte System



mit $G_1(s) = \frac{3(s+2)}{s}$, $G_f(s) = 2$

- a) Die Sprungantwort (Einheitsprung $u(t)=h(t)$) des Systems ist

$$y_1(t) = 0.5 + e^{-3t} - 1.5e^{-4t}. \quad (7.a)$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s)$.

- b) Welches Ausgangssignal $y_1(t)$ stellt sich für große Zeiten t ein, wenn das System mit $u(t) = \sin t$ angeregt wird? Zeichnen Sie den Zeitverlauf zu $y_1(t)$.
- c) Berechnen Sie den Zeitverlauf von $y_2(t)$ für $u(t) = h(t)$ ($y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Grenzwertsätze.

Aufgabe 8

- a) Die Nyquist-Diagramme für drei verschiedene Systeme sind in den Abbildungen 3(a), 3(b) und 4(a) dargestellt. Überprüfen Sie die Stabilität der geschlossenen Regelkreise unter den folgenden Annahmen ($G(s)$: Regelstrecke, $K(s)$: Regler, m_0 : Anzahl der Pole des offenen Regelkreises in der rechten Halbebene, a_0 : Anzahl der Pole des offenen Regelkreises auf der imaginären Achse):

- 1) Die zu Abbildung 3(a) gehörige Übertragungsfunktion des offenen Kreises (GK) ist:

$$G(s)K(s) = \frac{40}{s(s+3)(s+10)}. \quad (8.a)$$

- 2) $m_0 = 2$ und $a_0 = 0$ für das Nyquist-Diagramm aus Abbildung 3(b).
- 3) $m_0 = 1$ und $a_0 = 0$ für das Nyquist-Diagramm aus Abbildung 4(a).

- b) In welchem Bereich von Abbildung 4(b) muß sich der kritische Punkt (-1, 0) befinden, damit der geschlossene Kreis stabil ist, wenn $m_0 = 0$ und $a_0 = 0$ gilt.

- c) Die Übertragungsfunktion eines offenen Kreises ist gegeben durch

$$G(s)K(s) = \frac{k(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)} \quad (8.b)$$

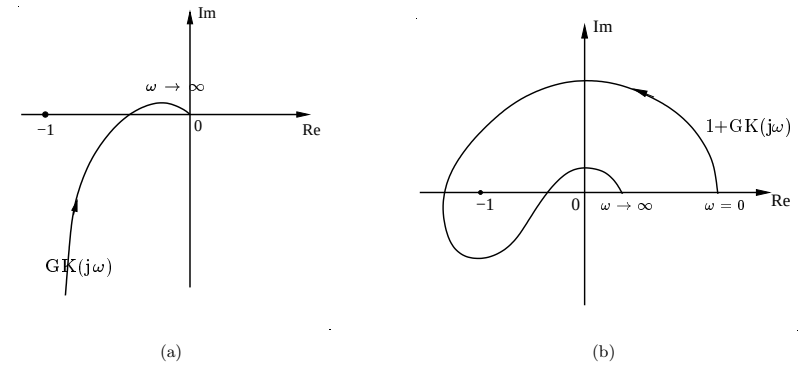


Abbildung 3: Nyquist-Diagramme für verschiedene Systeme

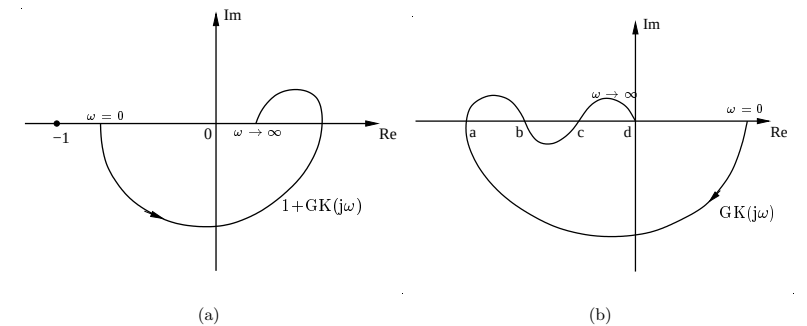
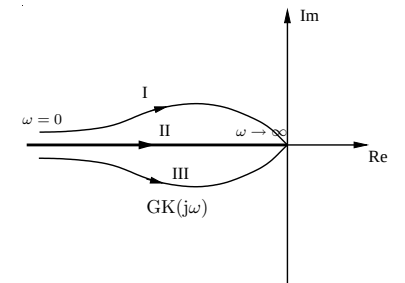


Abbildung 4: Nyquist-Diagramme verschiedene Systeme

mit $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ und $k > 0$.

- 1) Die Kurven I, II und III stellen Nyquist-Diagramme des offenen Kreises (8.b) für unterschiedliche Parameterkombinationen (T_1, T_2, k) dar. Welche Bedingungen müssen die Parameter jeweils erfüllen?
- 2) In welchem Fall ist der geschlossene Kreis stabil?



Aufgabe 9 (Vorzeichenbedingung, Amplituden- und Phasenreserve)

Abbildung 5 zeigt den zu untersuchenden Regelkreis. Im weiteren soll gelten: $G(s) = \frac{1}{s-2}$.

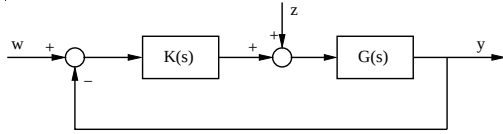


Abbildung 5: Standardregelkreis.

- a) Der Regler sei durch $K(s) = \frac{k(s-2)}{s}$, ($k > 0$) gegeben. Ist der geschlossene Regelkreis stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Im folgenden sei $K_1(s) = \frac{k(s+1)}{s+2}$.

- b) Welches Übertragungsverhalten hat $K_1(s)$ nach $PIDT_n$ -Nomenklatur?
c) Wie muß die Konstante k gewählt werden, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist? (Verwenden Sie die Vorzeichenbedingung)
d) Berechnen Sie die Systemantwort $y(t)$ auf die Führungsgröße $w(t) = h(t)$ (Störungen seien vernachlässigt, $k = 8$). Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf von $y(t)$.

Im folgenden sei $K_2(s) = \frac{k(s+1)}{s}$.

- e) Welches Übertragungsverhalten hat $K_2(s)$ nach $PIDT_n$ -Nomenklatur?
f) Wie muß die Konstante k gewählt werden, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist? Verwenden Sie hierfür das Nyquist-Kriterium.
g) Berechnen Sie die Amplituden- und die Phasenreserve ($k = 8$).
h) Berechnen Sie die Systemantwort $y(t)$ auf die Führungsgröße $w(t) = h(t)$ (Störungen seien vernachlässigt, $k = 8$). Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf von $y(t)$.
i) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben d) und h) bezüglich des sich einstellenden stationären Wertes. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 10 (Fundamentales Dilemma der Regelungstechnik)

- a) Die Sensitivität (S) und die komplementäre Sensitivität (T) eines Regelkreises sind gegeben.
- 1) Sind die Verläufe von S und T aus Abbildung 6 möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.
 - 2) Sind die Verläufe von S und T aus Abbildung 7 möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Gegeben ist der Regelkreis aus Abbildung 5, mit $G(s) = 5$.

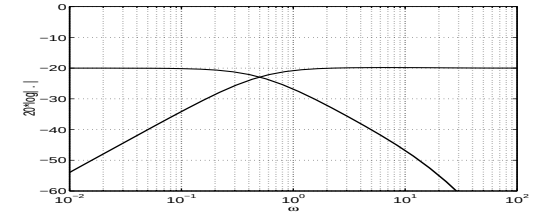


Abbildung 6: Verläufe von S und T .

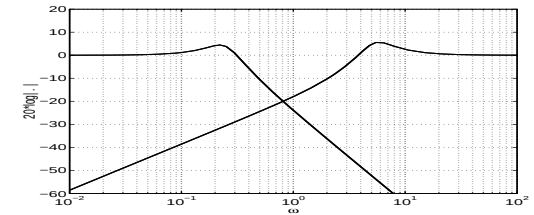


Abbildung 7: Verläufe von S und T .

- 1) Die Eingangsstörung z , die auf das System wirkt ist $z(t) = 2 \sin t$. Welches Ausgangssignal $y(t)$ stellt sich ein (unter Voraussetzung $w(t) = 0$)? Ziehen Sie zur Beantwortung dieser Frage die Verläufe der Sensitivität S und der komplementären Sensitivität T aus Abbildung 8 heran ($20 \log 0.2138 \approx -13.4$, $20 \log 0.9259 \approx -0.669$).

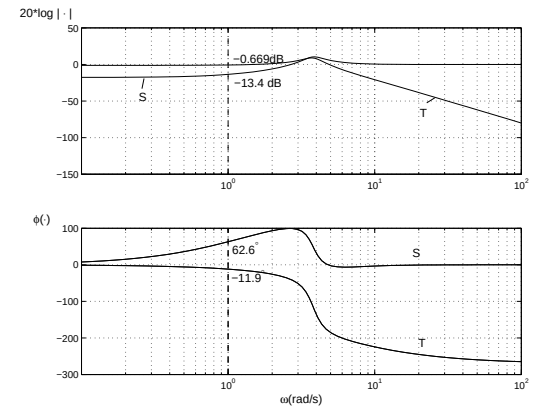


Abbildung 8:

- 2) Die Führungsgröße sei $w(t) = h(t)$. Es soll keine Eingangsstörung vorhanden sein ($z(t) = 0$). Ergibt sich für den Regelkreis eine bleibende Regelabweichung? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe von Abbildung 8.

Aufgabe 11 (Fundamentales Dilemma der Regelungstechnik)

Gegeben sei der Regelkreis in Abbildung 9.

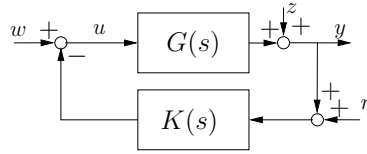


Abbildung 9: Regelkreis.

- a) Stellen Sie die Übertragungsfunktionen

$$G_{e\eta}(s) = \left. \frac{e(s)}{\eta(s)} \right|_{w=0, z=0}$$

$$G_{ez}(s) = \left. \frac{e(s)}{z(s)} \right|_{w=0, \eta=0}$$

mit $e = w - y$ (Regelfehler) allgemein in Abhängigkeit von $G(s)$ und $K(s)$ auf.

- b) Bestimmen Sie formal die Differenz $G_{e\eta}(s) - G_{ez}(s)$. Können Sie hieraus etwas bezüglich den erreichbaren Regelgüten zur Störunterdrückung und Rauschunterdrückung schließen?

Aufgabe 12 (Bleibende Regelabweichung)

Gegeben sei der Regelkreis aus Abbildung 9. Die Übertragungsfunktion der Regelstrecke ist

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)(s+5)}.$$

Diese Regelstrecke soll mit einem Regler der Form

$$K(s) = a \frac{s+1}{s}, \quad a \in \mathbb{R}$$

und mit Hilfe der oben dargestellten Regelkreisstruktur geregelt werden.

- Welchen Reglertypus ist $K(s)$?
- Für welche Werte von a ist der geschlossene Regelkreis stabil?
- Wie groß ist die bleibende Regelabweichung $e(t) = w(t) - y(t)$ für eine sprunghafte Störung $z(t) = h(t)$ (und $w(t) \equiv \eta(t) \equiv 0$) im Fall $a = 20$?
- Wie groß ist die bleibende Regelabweichung $e(t) = w(t) - y(t)$ für eine rampenförmige Störung $z(t) = t \cdot h(t)$ (und $w(t) \equiv \eta(t) \equiv 0$) im Fall $a = 20$?

Aufgabe 13 (Algebraischer Reglerentwurf, Hurwitz- und Nyquist-Kriterium)

Gegeben sind ein Streckenmodell $G(s)$ und ein Regler $K(s)$:

$$G(s) = \frac{k_s}{(1+2s)(1+3s)}, \quad k_s > 0 \quad (13.a)$$

$$K(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I}\right), \quad k_p > 0, \quad T_I > 0. \quad (13.b)$$

- Welche Bedingung müssen die Zeitkonstante T_I und die Kreisverstärkung $k_0 = k_s k_p$ erfüllen, damit der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist? Untersuchen Sie die Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums. Skizzieren Sie das Ergebnis in einem Stabilitätsdiagramm $T_I = T_I(k_0)$ und geben Sie dort den stabilen Bereich an.
- Wie müssen k_p und T_I gewählt werden, damit der geschlossene Regelkreis einen doppelten Pol $s_{1,2} = -\frac{1}{3}$ besitzt? Wie lautet in diesem Fall der dritte Pol s_3 .

Im folgenden sei $T_I = 3$.

- Welche Bedingungen muß k_0 erfüllen, damit der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist? Benutzen Sie dazu das Nyquist-Kriterium.
- Der Regelkreis wird gemäß Abbildung 10 verändert: Wie ändert sich die Ortskurve des offenen Regelkreises? Welche Bedingung muss k^* erfüllen, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist?

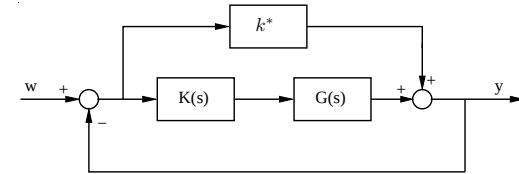


Abbildung 10: Neue Regelkreisstruktur.

Im folgenden sei $k^* = 0$, $T_I = 3$ und $k_0 = \frac{9}{32}$.

- Berechnen Sie die Amplituden- und Phasenreserve.
- Berechnen Sie die Sprungantwort $y(t)$ des geschlossenen Regelkreises für $w(t) = h(t)$.
- Die Rauschunterdrückung soll $|T(j\omega)| < 0.01$ für $\omega \geq 10 \text{ rad/s}$ sein. Erfüllt der Regler diese Anforderung?

Aufgabe 14 (Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols)

nicht klausurrelevant

Abbildung 11 zeigt die Sprungantworten von unterschiedlichen Systemen. Im Folgenden sollen basierend auf den Einstellregeln von Ziegler-Nichols bzw. Åström/Hägglund Regler für diese Systeme entworfen werden.

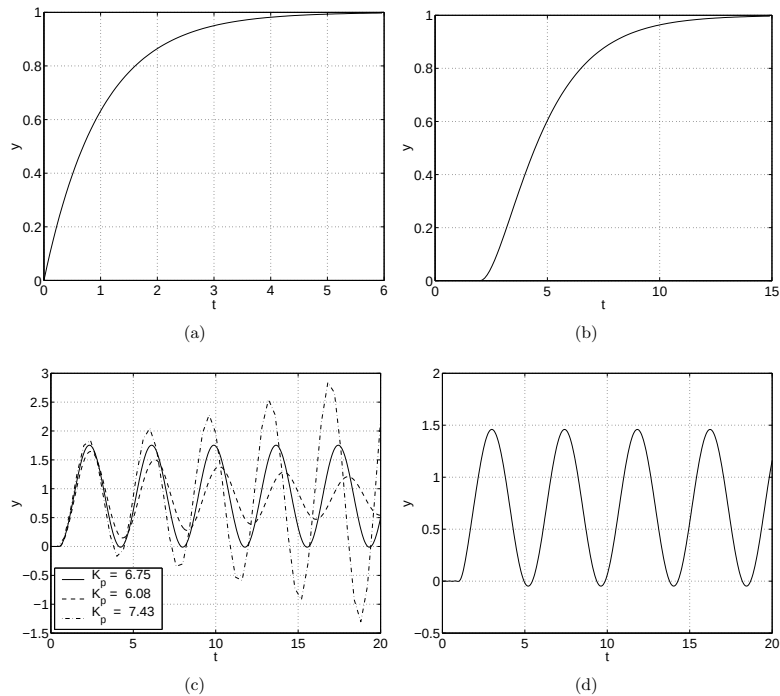


Abbildung 11: Sprungantworten verschiedener Beispielsysteme.

- Abbildung 11(a) zeigt die Sprungantwort eines Systems. Würden Sie für dieses System Reglerparameter mit Hilfe der Sprungmethode von Ziegler/Nichols bestimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Abbildung 11(b) zeigt die Sprungantwort eines zweiten Systems. Bestimmen Sie mit Hilfe der Sprungmethode von Ziegler/Nichols einen geeigneten PID-Regler.
- Abbildung 11(c) zeigt die Sprungantworten eines geschlossenen Regelkreises mit drei verschiedenen P-Reglern. Bestimmen Sie einen geeigneten PI-Regler unter Verwendung der Schwingmethode von Ziegler-Nichols.
- Abbildung 11(d) zeigt die Sprungantwort eines geschlossenen Regelkreises. Der verwendete Regler ist ein Zweipunktglied mit Verstärkung $d = 1$. Entwerfen Sie mit Hilfe der Methode von Åström/Hägglund einen PID-Regler.

Aufgabe 15 (Reglerentwurf mittels Loopshaping)

Im Folgenden wird von der Standardkonfiguration (Abbildung 12) eines Regelkreises ausgegangen: Gegeben ist das in Abbildung ?? dargestellte Bodediagramm einer linearen Regelstrecke $G(s)$.

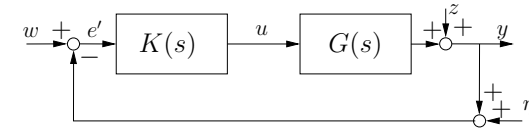


Abbildung 12: Standardregelkreis.

- Ist die Regelstrecke stabil? Geben Sie eine kurze Begründung an.
- Um welchen Streckentyp handelt es sich?
- Entwerfen Sie einen Regler $K(s) = K_1(s)$, so dass der geschlossene Kreis
 - keine bleibende Regelabweichung (d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$) bei sprungförmigen Störungen aufweist.
 - eine Bandbreite von $\omega_B \approx 5 \text{ rad/s}$ besitzt.
- Der Regler soll durch ein Lead-Element $K_2(s) = v \frac{s+w}{s+vw}$ mit $v, w > 0$ zu $K(s) = K_1(s)K_2(s)$ erweitert werden, um die Phasenreserve zu erhöhen. Bestimmen Sie die Parameter v und w mit Hilfe der Bodediagramme in Abbildungen 14-16 so, dass die Phasenreserve des neuen Systems $G_1(s) = G(s)K_1(s)K_2(s)$ mindestens 50° beträgt.
- Welche Eigenschaft des geschlossenen Kreises wird durch hinzufügen von $K_2(s)$ ungewollt beeinflusst und muss durch eine Änderung in $K_1(s)$ korrigiert werden?

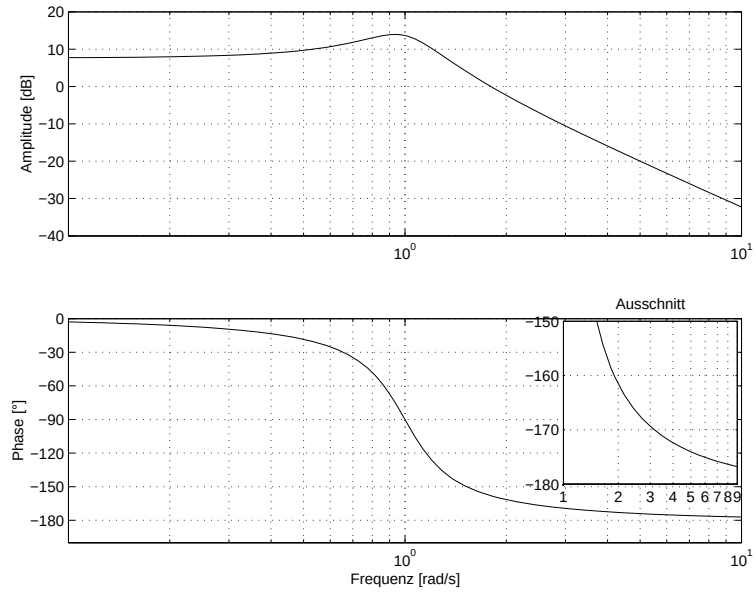


Abbildung 13: Bodediagramm der Regelstrecke.

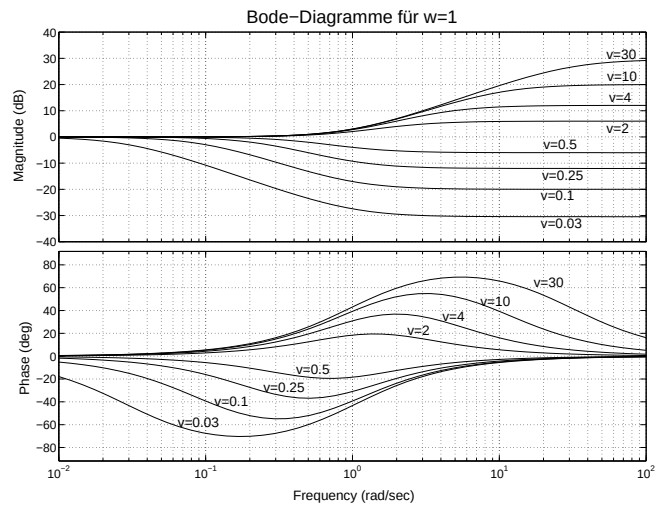


Abbildung 14: Bodediagramm von $K_2(s)$ für $w = 1$ und verschiedene Werte von v .

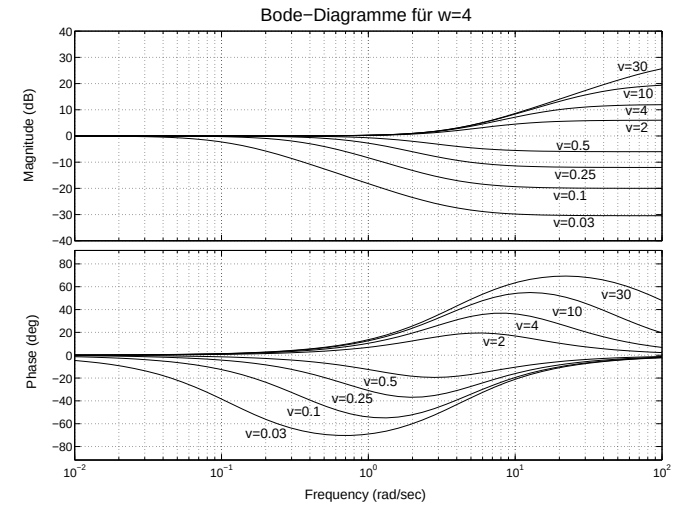


Abbildung 15: Bodediagramm von $K_2(s)$ für $w = 4$ und verschiedene Werte von v .

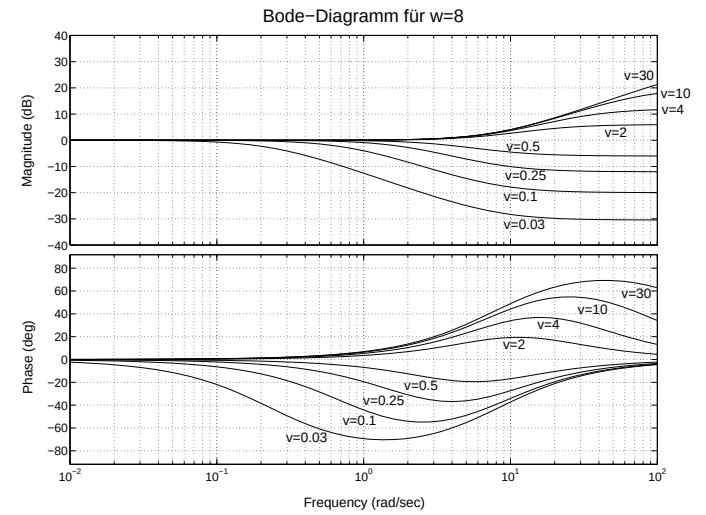


Abbildung 16: Bodediagramm von $K_2(s)$ für $w = 8$ und verschiedene Werte von v .

Aufgabe 16 (Reglerentwurf mittels Loopshaping)

Für die Regelstrecke

$$G(s) = 7 \frac{7.5 - s}{(1 + 10s)(1 + s)(10 + s)} \quad (16.a)$$

soll ein Regler nach dem loop-shaping Verfahren entworfen werden. Ziel der Regelung ist es die Durchtrittsfrequenz ω_D des Regelkreises auf $\omega_D = 1$ [rad/s] zu erhöhen, und dabei eine Phasenreserve von $\gamma_r = 45^\circ$ und eine Amplitudenreserve von $a_r \geq 3$ zu garantieren. Die Systemantwort des geschlossenen Kreises auf einen Sollwertsprung soll keine bleibende Regelabweichung aufweisen.

- a) Welche Eigenschaft muss der Regler auf jeden Fall aufweisen, damit die Systemantwort des geschlossenen Regelkreises auf einen Sollwertsprung keine bleibende Regelabweichung aufweist? Wie äussert sich diese Eigenschaft im Bode-Diagramm des offenen Kreises? Wie in der Sensitivität des geschlossenen Kreises?

Im Folgenden soll der Regler durch die Reihenschaltung eines PI-Reglers und eines lead-Elementes realisiert werden. Also:

$$K(s) = K_{pi}(s) \cdot K_{lead}(s) \quad (16.b)$$

mit

$$K_{pi}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \quad \text{und} \quad (16.c)$$

$$K_{lead}(s) = v \frac{s + w}{s + vw} \quad \text{mit } v > 1. \quad (16.d)$$

Die Zeitkonstante T_I des PI-Reglers wird zu $T_I = 10$ festgelegt. Die Phase des PI-Reglers als Funktion der Frequenz ω beträgt

$$\phi_{pi} = -\arctan\left(\frac{1}{T_I \omega}\right). \quad (16.e)$$

- b) Abbildung 17 zeigt drei verschiedene lead-Elemente. Welches lead-Element würden Sie auswählen um die Phasenreserve $\gamma_r = 45^\circ$ zu garantieren? Begründen Sie Ihre Antwort und berücksichtigen Sie sowohl Gleichung (16.e) als auch Abbildung 18. (Hinweis: $\text{atan}(-0.1) \approx -5.71^\circ$.)

Im folgenden wird das lead-Element 1 aus Abbildung 17 verwendet.

- c) Abbildung 19 zeigt das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises mit PI-Glied ($K_p = 1$, $T_I = 10$) und lead-Element. Bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor K_p so, dass die gewünschte Durchtrittsfrequenz ω_D erreicht wird.
- d) Abbildung 20 zeigt das Bode-Diagramm des entworfenen offenen Regelkreises. Bestimmen Sie die Phasen- und die Amplitudenreserve. Werden die Spezifikationen eingehalten?
- e) Abbildung 21 zeigt das Bode-Diagramm der Sensitivität S und der komplementären Sensitivität T des entworfenen Regelkreises. Beurteilen Sie qualitativ den Verlauf von S und T . Anhand welcher Eigenschaften bewerten Sie die Güte des entworfenen Regelkreises?

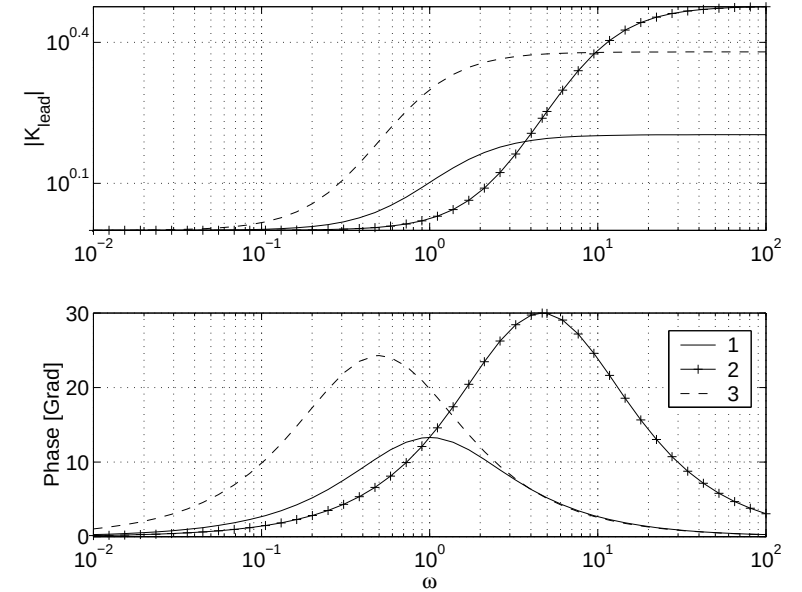


Abbildung 17: Bode-Diagramme verschiedener lead-Elemente.

- f) Folgende Eigenschaften seien bekannt:

Die maximale positive Phase ϕ^* des lead-Elementes stellt sich bei der Frequenz ω^* ein, mit

$$\omega^* = w\sqrt{v} \quad (16.f)$$

und beträgt

$$\tan \phi^* = \frac{v - 1}{2\sqrt{v}}. \quad (16.g)$$

Bei gegebenem ϕ^* muss mit (16.g) gelten:

$$v = (1 + 2 \tan^2 \phi^*) + \sqrt{(1 + 2 \tan^2 \phi^*)^2 - 1}. \quad (16.h)$$

Berechnen Sie die Parameter w , v des lead-Elementes so, dass sich für $\omega_D = 1$ [rad/s] genau $\gamma_r = 45^\circ$ Phasenreserve ergibt und das lead-Element dort seine maximale Phase aufweist. Hinweis: Berücksichtigen Sie zur Lösung dieser Teilaufgabe den Einfluss der Phase des PI-Regler Anteils und verwenden Sie das Bode-Diagramm der Regelstrecke $G(s)$ aus Abbildung 18.

- g) Leiten Sie die Beziehungen (16.f), (16.g) und (16.h) des lead-Elementes, sowie die Phasendrehung (16.e) des PI-Reglers her.

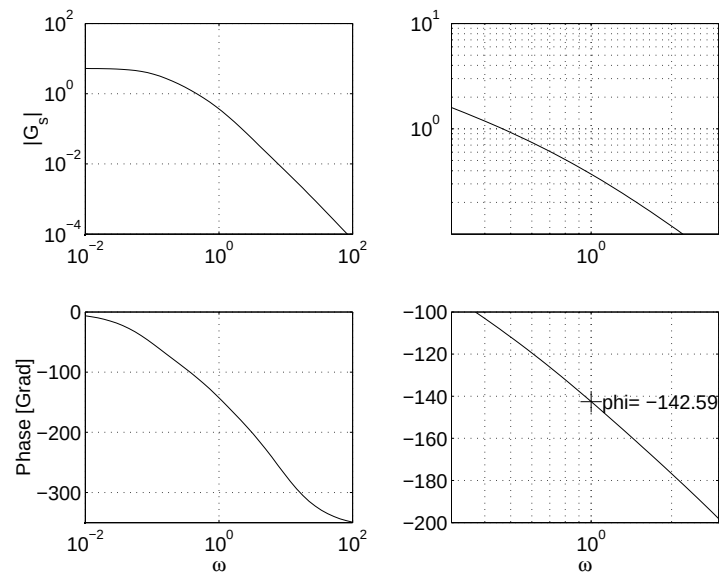


Abbildung 18: Bode-Diagramm der Regelstrecke $G(s)$ und Detailansicht um $w = 1$ [rad/s].

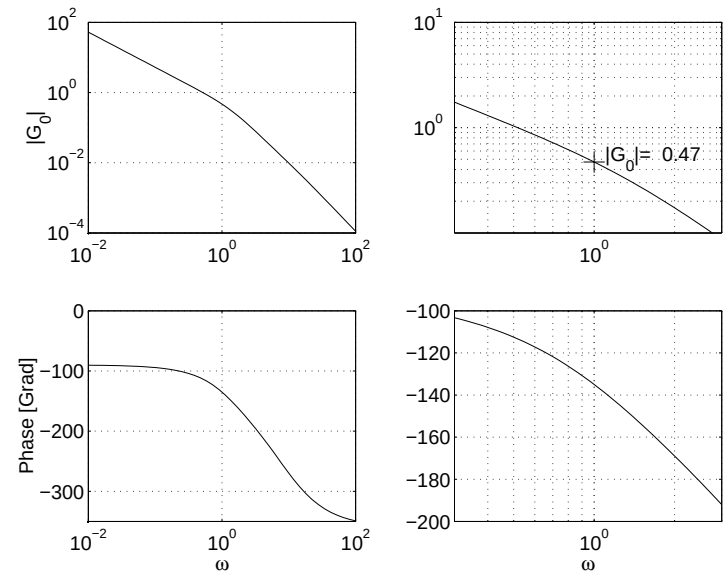


Abbildung 19: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises mit PI-Glied ($K_p = 1$) und lead-Element.

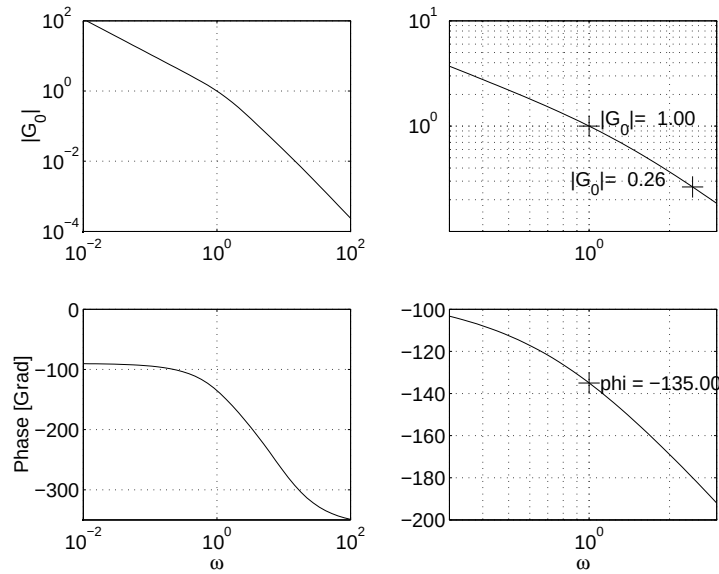


Abbildung 20: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises, mit vollständig entworfenem Regler.

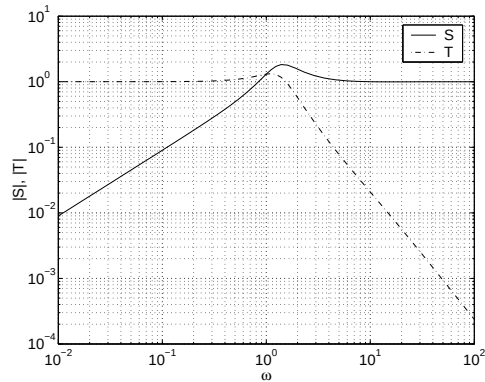


Abbildung 21: Verläufe der Sensitivität S und der komplementären Sensitivität T .

Aufgabe 17 (Robustheit)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s)K(s) = k_1 \frac{s+1}{(s+a)(s+b)}$$

des offenen Kreises eines Standardregelkreises, wobei $a, b < 0$ und $k_1 > 0$. Abb. 22 zeigt die zugehörige Ortskurve für $k_1 = 1$.

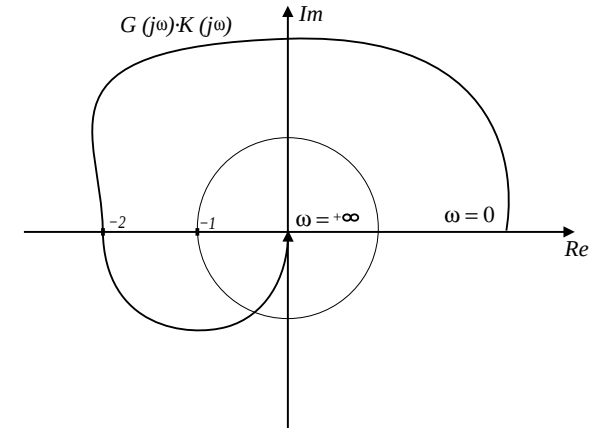


Abbildung 22: Ortskurve von $G(s)K(s)$ für $k_1 = 1$.

- Ist der geschlossene Kreis mit $k_1 = 1$ stabil? Geben Sie eine Begründung an.
- In welchem Bereich kann man k_1 variieren, so dass der geschlossene Kreis stabil ist?
- Geben Sie die Amplitudenreserve des geschlossenen Kreises an.

Aufgabe 18 (Zustandsrückführung)

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}_0 = 0$$

$$\mathbf{y} = [0 \ 1 \ 1] \mathbf{x}$$

Berechnen Sie einen Zustandsregler $u = \mathbf{k}^T \mathbf{x} + r$, so daß gilt:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+s+1)} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

Aufgabe 19 (Zustandsrückführung, Beobachter)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

Entwerfen Sie für das System eine Zustandsrückführung und einen Beobachter.

- Ist das System stabil?
- Zeigen Sie, dass das System steuerbar ist.
- Entwerfen Sie für das System eine Zustandsrückführung, so dass die Pole des geschlossenen Kreises bei -5 und -6 liegen.
- Zeigen Sie, dass das System beobachtbar ist.
- Berechnen Sie die Pole der Fehlerdynamik, wenn der Beobachter

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \begin{bmatrix} -18 \\ 30 \end{bmatrix} (y - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}})$$

verwendet wird, wobei A , $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}^T$ die Zustandsraumdarstellung des Systems beschreiben.

- Wo liegen die Pole des geschlossenen Kreises, der aus Regelstrecke, Beobachter und Polvorgaberegung besteht?

Aufgabe 20 (Zustandsrückführung, Beobachter)

In einem Nährmedium befinden sich ein Stamm von Bakterien und eine antibiotisch wirkende Substanz. Für die Bakterienmenge x_1 und die Menge des Antibiotikums x_2 gelten näherungsweise folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - bx_2(t) & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= -bx_2(t) + u(t) & x_2(0) &= x_{20},\end{aligned}\tag{20.a}$$

mit den positiven reellen Konstanten a , b und der pro Zeiteinheit zugeführten Menge an Antibiotikum $u(t)$.

- Bringen Sie das Differentialgleichungssystem (20.a) auf die Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t).\tag{20.b}$$

- Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung und die Eigenwerte des Systems.
- Transformieren Sie das System auf Regelungsnormalform. Können die Eigenwerte des geschlossenen Kreises durch eine Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ beliebig verschoben werden? (Begründen Sie Ihre Antwort)
- Berechnen Sie die Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ so, dass beide Pole des geschlossenen Kreises bei -1 liegen:

- Über die Darstellung in Regelungsnormalform.
- Unter Verwendung der Ackermann-Formel.
- Durch direktes Ausrechnen über den Ansatz (direkten Vergleich von Soll- und Ist-Polynom).

Im Folgenden sei $a = b = 1$.

- Nehmen Sie an, Sie können aus Kostengründen nur eine der beiden Zustandsgrößen messen. Also

$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \tag{20.c}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{20.d}$$

Dennoch wollen Sie eine Polvorgabe-Regelung realisieren. Für welche Grösse entscheiden Sie sich?

- Nehmen Sie an nur der Zustand x_1 werde gemessen. Entwerfen Sie einen Beobachter für das System (beide Pole des Beobachters bei -2).
- Welche Ordnung hat der aus Regelstrecke, Identitätsbeobachter und konstanter Rückführung der Zustandsschätzung

$$u = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}\tag{20.e}$$

bestehende Regelkreis? Geben Sie die Pole des gesamten Regelkreises an.

Aufgabe 21 (Steuerbarkeit linearer Systeme)

Die linearisierten Bewegungsgleichungen (kleine Auslenkungen) für zwei gekoppelte Pendel (Abbildung 23) sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}ml^2\ddot{\theta}_1 &= -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu \\ ml^2\ddot{\theta}_2 &= -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu.\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die dazugehörigen Zustandsgleichungen mit den Zustandsvariablen $x_1 = \theta_1, x_2 = \dot{\theta}_1, x_3 = \theta_2, x_4 = \dot{\theta}_2$.
- Ist das System steuerbar? Geben Sie sowohl eine mathematische als auch eine physikalische Begründung an.
- Durch welche Maßnahmen kann man das Ergebnis von Punkt (b) verändern?

Aufgabe 22 (Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit linearer Systeme)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Konstruieren Sie (nichttriviale) Vektoren $\mathbf{b}, \mathbf{c}^T$ so, daß das gegebene System weder steuerbar noch beobachtbar ist.

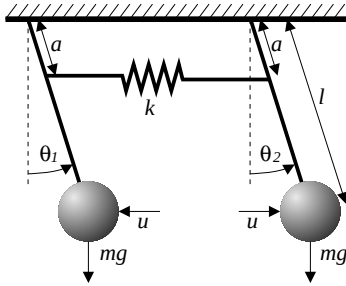


Abbildung 23: Zwei gekoppelte Pendel.

Aufgabe 23 (Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit linearer Systeme)

Gegeben seien zwei Kreise (Abbildung 24) mit gleichem Übertragungsverhalten.

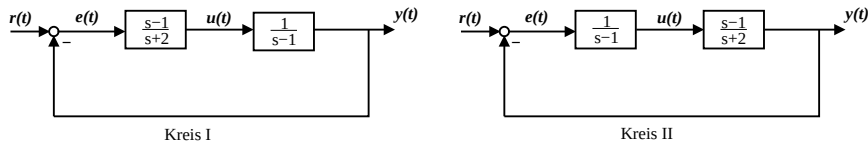


Abbildung 24: Zwei Kreise mit gleichem Übertragungsverhalten.

- Überprüfen Sie Kreis I auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.
- Überprüfen Sie Kreis II auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Zustandsraumdarstellung der einzelnen Teilsysteme und berechnen Sie dann die Zustandsraumdarstellung für den gesamten Kreis.

Aufgabe 24 (Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit)

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \ c_2 \ c_3] \mathbf{x}.$$

- Welche Bedingungen müssen $\lambda \in \mathcal{R}$ und $c_i \in \mathcal{R}$ erfüllen, damit das System steuerbar ist.
- Welche Bedingungen müssen $\lambda \in \mathcal{R}$ und $c_i \in \mathcal{R}$ erfüllen, damit das System beobachtbar ist.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems für $\lambda = 0$. Was passiert falls das System nicht beobachtbar ist?

Aufgabe 25 (Kaskadenregelung) Gegeben sei das folgende System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = [1 \ 0], d = 0.$$

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s) = \frac{x_1(s)}{x_2(s)}$ und $G_2(s) = \frac{x_2(s)}{u(s)}$ (siehe Abbildung 25).
- Wählen Sie den Regler für den inneren Kreis ($K_2(s)$ oder K_2, V) so, daß der geregelte innere Kreis $T_2(s) = \frac{x_2(s)}{e_2(s)}$ eine Bandbreite von 10 rad/s besitzt und $T_2(0) = 1$ ist.
- Entwerfen Sie den äußeren Regler ($K_1(s)$ oder K_1) so, daß bei einer sprungförmigen Änderung des Sollwertes r der Ausgang x_1 keine bleibende Regelabweichung hat und die Bandbreite 1 rad/s beträgt.

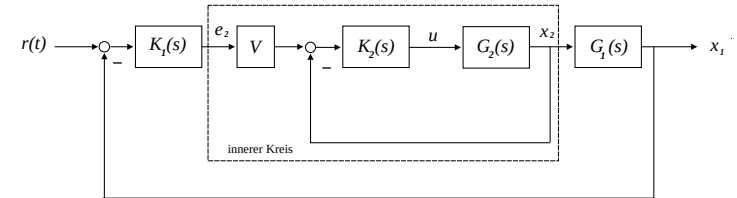


Abbildung 25: Kaskadenregelung.

Aufgabe 26 (Kaskadenregelung)

Entwerfen Sie für die in Abbildung 26 gezeigte Strecke eine Kaskadenregelung. Der Regler für den inneren bzw. äußeren Kreis soll ein P-Regler bzw. PI-Regler sein.

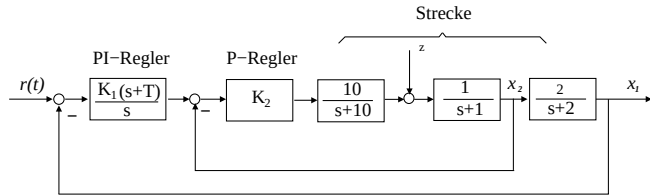


Abbildung 26: Kaskadenregelung mit P-Regler und PI-Regler.

- Der P-Regler soll so gewählt werden, dass der innere geschlossene Kreis möglichst schnell und genügend gedämpft ist. Die stationäre Regelabweichung ist bei dem Entwurf des inneren Kreises weniger wichtig. Eine Übertragungsfunktion, die diese Anforderungen erfüllt ist z.B. $G_{innen}(s) = \frac{55}{s^2+11s+65}$. Bestimmen Sie den P-Regler so, so dass der innere geschlossene Kreis die Übertragungsfunktion $G_{innen}(s) = \frac{55}{s^2+11s+65}$ hat.
- Der PI-Regler soll so gewählt werden, dass die Anforderungen an den geschlossenen Gesamtregelkreis (Keine bleibende Regelabweichung, Schnelligkeit,...) erfüllt sind. Eine Übertragungsfunktion, die diese Anforderungen erfüllt ist z.B. $G_{außen}(s) = \frac{220}{s^3+11s^2+65s+220}$. Bestimmen Sie den PI-Regler so, so dass der Gesamtregelkreis die Übertragungsfunktion $G_{außen}(s) = \frac{220}{s^3+11s^2+65s+220}$ hat.
- Abbildung 27 zeigt eine Simulation (Matlab) zum Führungs- und Störverhalten (Sprungförmige Störung z zum Zeitpunkt $t = 15s$) der Kaskadenregelung und zum Vergleich eine Simulation zum Führungs- und Störverhalten einer Standardregelung mit PI-Regler $K(s) = \frac{1}{4} \frac{s+2}{s}$. Erklären Sie anhand der Regelkreisstruktur (Abbildung 26) weshalb die Kaskadenregelung ein besseres Störverhalten als die Standardregelung hat.

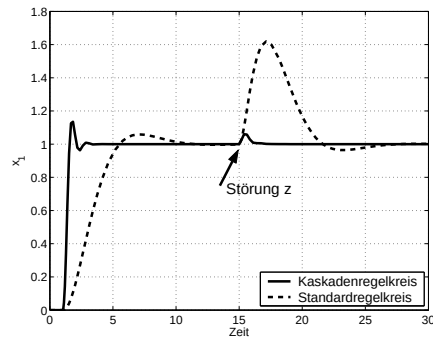


Abbildung 27: Führungs- und Störverhalten der unterschiedlichen Regelkreise.

Aufgabe 27 (Anti-windup)

Wo würden Sie bei der in Abbildung 28 gezeigten Regelkreisstruktur¹ das Anti-windup hinzufügen?

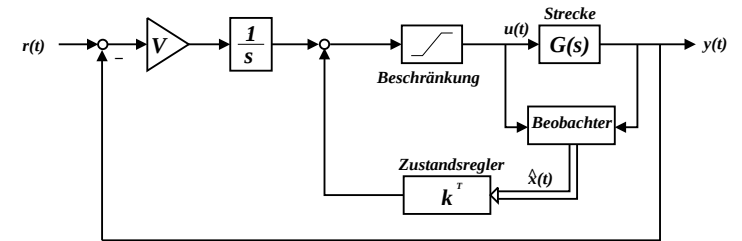


Abbildung 28: Zustandsregler mit I-Anteil.

¹Bei der gegebenen Regelkreisstruktur handelt sich um einen Zustandsregler mit I-Anteil (Integral Control). Eigenschaften dieser Struktur: Keine bleibende Regelabweichung - ist ohne I-Anteil (Zustandsregler = P-Regler) i.A. nicht der Fall. Zusätzlich werden auch konstante Störungen am Ausgang ausgeregelt.