

Übungsaufgaben mit Musterlösungen

Aufgabe 1 (Stabilität von Differentialgleichungen)

Abbildung 1 zeigt einen Standardregelkreis. Der Regler C , die Strecke P und der geschlossene

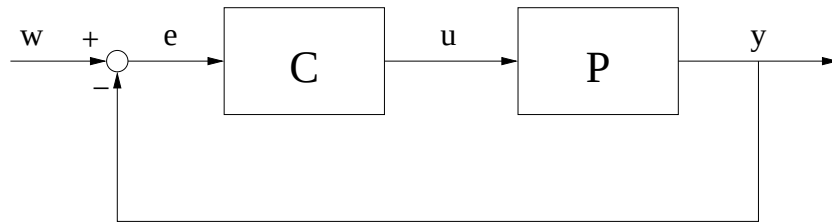


Abbildung 1: Standardregelkreis.

Kreis CL werden durch folgende Differentialgleichungen beschrieben:

$$C: \quad \dot{u} + u = 20e \quad (1.a)$$

$$P: \quad \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2u \quad (1.b)$$

$$CL: \quad \ddot{y} + 5\dot{y} + 8\dot{y} + 44y = 40w \quad (1.c)$$

- Ist der Regler C stabil?
- Ist die Strecke P stabil?
- Ist der geschlossene Kreis CL stabil?
- Was fällt Ihnen auf?
- Leiten Sie die Differentialgleichung des geschlossenen Kreises CL aus der Regler- und der Streckendifferentialgleichung her.

Lösung

- Der Regler C hat einen Pol (bzw. Eigenwert) bei -1 und ist somit stabil. (Alternativ hierzu kann die Vorzeichenbedingung zur Überprüfung der Stabilität verwendet werden.)
- Die Strecke P ist stabil, da sie einen doppelten Eigenwert bei -2 hat. (Alternativ hierzu kann die Vorzeichenbedingung zur Überprüfung der Stabilität verwendet werden.)
- Für den geschlossenen Kreis ergibt sich folgende charakteristische Gleichung:

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 44 = 0$$

Alle Koeffizienten des Polynoms sind positiv und somit ist die Vorzeichenbedingung, welche hier nur notwendig ist, erfüllt. Die Ungleichung

$$44 - 5 \cdot 8 \stackrel{?}{<} 0,$$

welche sich aus der Beiwertebedingung für ein System 3. Ordnung ergibt, ist aber nicht erfüllt und somit ist der geschlossene Kreis instabil.

- Obwohl der Regler als auch die Strecke für sich stabil sind, ist der geschlossene Kreis instabil. Es darf **nie** von der Stabilität der einzelnen Glieder eines Regelkreises auf die Stabilität des geschlossenen Kreises geschlossen werden.
- Durch einmaliges Differenzieren der Streckendifferentialgleichung P erhält man

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2\dot{u}.$$

Addieren der Streckendgl. P und Einsetzen der Reglerdgl. C liefert unter Berücksichtigung von $e = w - y$ schliesslich

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 8\dot{y} + 4y = 2(u + \dot{u}) = 40e = 40(w - y).$$

Aufgabe 2 (Regelungsnormalform, Zustandstransformation)

Ein lineares Übertragungssystem werde durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11\dot{y} + 6y = \dot{u} + b \cdot u \quad (2.a)$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$ beschrieben.

- Wählen Sie die Zustandsvariablen so, daß das System in Regelungsnormalform gegeben ist.
- Bestimmen Sie die transformierten Anfangsbedingungen.
- Überlegen Sie sich, ob das System für alle Werte von b auf die beschriebene Zustandsraumform gebracht werden kann.

Lösung

- a) Zur Bestimmung der Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormform können verschiedene Methoden angewendet werden. Die in der Vorlesung vorgestellte Methode basiert auf der Einführung zusätzlicher Eingänge. Da das System linear ist, ist das Eingangssystem dann gegeben durch die Summe der sich durch die "virtuellen" Eingänge ergebenden Lösungen. Mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Methode ergibt sich die Zustandsdarstellung in Regelungsnormform für ein System der Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b_nu^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (2.1)$$

zu:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (2.2)$$

$$y = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0) \underline{x} + 0u. \quad (2.3)$$

Für den hier betrachteten Fall ergibt sich somit:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (2.4)$$

$$y = (b \ 1 \ 0) \underline{x}. \quad (2.5)$$

Anderer Lösungsweg:

Im nachfolgenden soll ein weiterer Lösungsweg zur Umwandlung der gegebenen Gleichung auf Regelungsnormform betrachtet werden. Hierbei bringt man durch eine geeignete Substitution die Ableitung $\dot{u}$ auf der rechten Seite zum Verschwinden. Ein möglicher Ansatz ist

$$y = \dot{x}_1 + b \cdot x_1 = \left[\frac{d}{dt} + b \right] x_1. \quad (2.6)$$

Bevor man diesen Ansatz einsetzt, ist es sinnvoll, die Systemgleichung mit Hilfe eines Differentialoperators zu formulieren:

$$\left[\frac{d^3}{dt^3} + 6 \frac{d^2}{dt^2} + 11 \frac{d}{dt} + 6 \right] y = \left[\frac{d}{dt} + b \right] u. \quad (2.7)$$

Setzt man den Ansatz, in diese Gleichung ein, so erhält man:

$$\left[\frac{d^3}{dt^3} + 6 \frac{d^2}{dt^2} + 11 \frac{d}{dt} + 6 \right] \cdot \left[\frac{d}{dt} + b \right] x_1 = \left[\frac{d}{dt} + b \right] u. \quad (2.8)$$

Nun kann man die Reihenfolge der beiden Differentialoperatoren auf der linken Seite vertauschen. Da der linke Differentialoperator auf beiden Seiten gleich ist, kann man die letzte Gleichung wie folgt zusammenfassen:

$$\left[\frac{d}{dt} + b \right] \cdot \left\{ \left[\frac{d^3}{dt^3} + 6 \frac{d^2}{dt^2} + 11 \frac{d}{dt} + 6 \right] x_1 - u \right\} = 0 \quad (2.9)$$

$$\left[\frac{d}{dt} + b \right] \cdot \{ \ddot{x}_1 + 6\dot{x}_1 + 11x_1 + 6x_1 - u \} = 0 \quad (2.10)$$

Die letzte Gleichung ist offenbar erfüllt, wenn der Ausdruck in der geschweiften Klammer identisch null ist. Die gesuchte Differentialgleichung lautet also:

$$\ddot{x}_1 + 6\dot{x}_1 + 11x_1 + 6x_1 = u. \quad (2.11)$$

Mit den Zustandsvariablen x_1 , $x_2 = \dot{x}_1$ und $x_3 = \dot{x}_2$ ergibt sich die gleiche Zustandsdarstellung wie oben.

- b) Für das ursprüngliche System sind die Anfangsbedingungen in $y(0)$, $\dot{y}(0)$ und $\ddot{y}(0)$. Die Anfangsbedingungen des neuen Systems kann man recht leicht aus der Ausgangsgleichung $y = (b \ 1 \ 0) \underline{x}$ bestimmen:

$$y(0) = 0 = bx_{10} + x_{20} \quad (2.12)$$

$$\dot{y}(0) = 0 = bx_{20} + x_{30} \quad (2.13)$$

$$\ddot{y}(0) = 0 = bx_{30} + \dot{x}_3(0) = bx_{30} - 6x_{10} - 11x_{20} - 6x_{30} + u(0). \quad (2.14)$$

Löst man dieses lineare Gleichungssystem auf (z.B. durch Einsetzen), so erhält man für die Anfangsbedingungen

$$\alpha \cdot x_{10} = u(0), \quad \alpha \cdot x_{20} = -b \cdot u(0), \quad \alpha \cdot x_{30} = b^2 \cdot u(0) \quad (2.15)$$

$$\alpha = 6 - 11b + 6b^2 - b^3 \neq 0 \quad (2.16)$$

- c) Basierend auf den Ergebnissen in b) sieht man, daß für $\alpha = 0$, d.h. für $b = 1$, $b = 2$ oder $b = 3$, der oben beschriebene Ansatz zur Transformation auf Regelungsnormform nicht zulässig ist. Das System kann in diesem Fall nicht auf Regelungsnormform gebracht werden.

Aufgabe 3 (geschl. Kreis in ZRD, Polvorgabe)

Abbildung 2 zeigt einen Standardregelkreis. Der Regler R und die Strecke S werden durch fol-

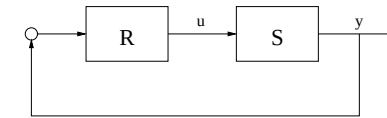


Abbildung 2: Standardregelkreis.

gende Gleichungen beschrieben:

Strecke:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3.a)$$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \quad (3.b)$$

Regler:

$$u = -(k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}) \underline{y} \quad (3.c)$$

Zeigen Sie, dass mit dieser Konfiguration die Pole/Eigenwerte des geschlossenen Kreises beliebig gewählt werden können. Setzen Sie hierzu die Messgleichung und Reglergleichung in die Systemgleichung ein.

Lösung

Einsetzen der Regler und Messgleichung in die Systemgleichung führt zu:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (-k_0 \ -k_1 \ \dots \ -k_{n-1}) \underline{y} \quad (3.1)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ -k_0 & -k_1 & \dots & -k_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} \quad (3.2)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -(a_0 + k_0) & -(a_1 + k_1) & -(a_2 + k_2) & \dots & -(a_{n-1} + k_{n-1}) \end{pmatrix}}_{A_{cl}} \underline{x} \quad (3.3)$$

Die Systemmatrix A_{cl} weist Frobeniusform auf, d.h. die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms können direkt aus der letzten Zeile abgelesen werden. Das charakteristische Polynom ergibt sich somit zu:

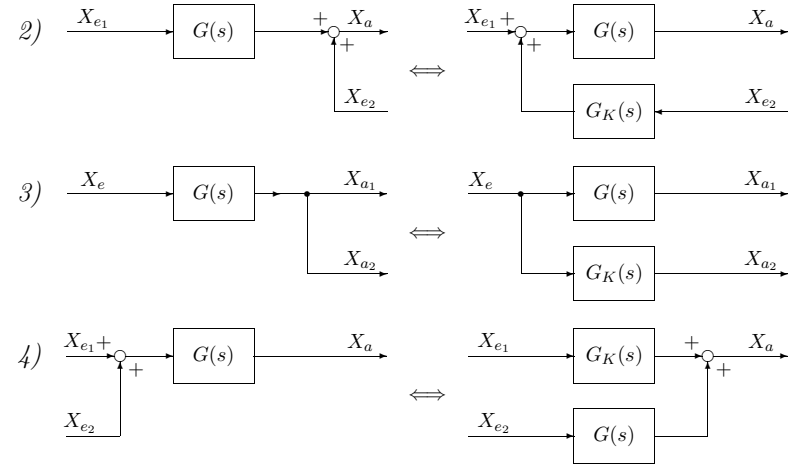
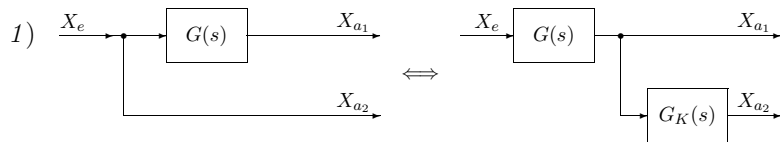
$$(a_0 + k_0) + (a_1 + k_1)\lambda + (a_2 + k_2)\lambda^2 + \dots + (a_{n-1} + k_{n-1})\lambda^{(n-1)} + \lambda^n = 0. \quad (3.4)$$

Hieraus folgt, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises durch Wahl der k_i beliebig gelegt werden können.

Aufgabe 4 (Zusammengeschaltete Regelkreisglieder)

Komplizierte Blockschaltbilder lassen sich oft durch Verlegen der Verzweigungs- und Additionsstellen vereinfachen. Einige einfache Regeln sollen im folgenden hergeleitet werden.

Wie muß die Übertragungsfunktion $G_K(s)$ in den vier Beispielen gewählt werden, damit sich das Übertragungsverhalten durch das Verlegen der Verzweigungs- bzw. Additionsstellen nicht ändert?



Lösung

Die gesuchte Übertragungsfunktion $G(s)$ läßt sich leicht angeben, wenn man bei beiden Bildern die jeweiligen Ausgangsgrößen in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen angibt und die entsprechenden Ausdrücke gleichsetzt.

Im folgenden sind die Gleichungen — analog zur Aufgabenstellung — für das ursprüngliche Blockschaltbild links und für das umgeformte rechts angegeben.

$$\begin{aligned} 1) \quad X_{a1}(s) &= G(s)X_e(s) & X_{a1}(s) &= G(s)X_e(s) \\ X_{a2}(s) &= X_e(s) & X_{a2}(s) &= G(s)G_K(s)X_e(s) \end{aligned}$$

Der Vergleich der Ausdrücke für X_{a2} liefert

$$1 = G(s)G_K(s)$$

Damit erhält man als Ergebnis

$$\boxed{G_K(s) = \frac{1}{G(s)}} \quad (4.1)$$

$$2) \quad X_a(s) = G(s)X_{e1}(s) + X_{e2}(s) \quad X_a(s) = G(s)X_{e1}(s) + G(s)G_K(s)X_{e2}(s)$$

Der Vergleich der Ausdrücke liefert

$$\boxed{G_K(s) = \frac{1}{G(s)}} \quad (4.2)$$

$$3) \quad \begin{aligned} X_{a1}(s) &= G(s)X_e(s) & X_{a1}(s) &= G(s)X_e(s) \\ X_{a2}(s) &= G(s)X_e(s) & X_{a2}(s) &= G_K(s)X_e(s) \end{aligned}$$

Der Vergleich der Ausdrücke für X_{a2} liefert

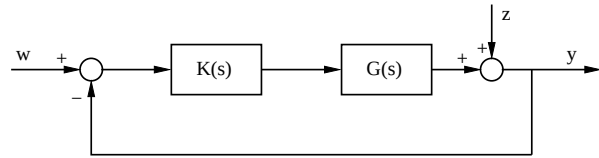
$$\boxed{G_K(s) = G(s)} \quad (4.3)$$

$$4) \quad X_a(s) = G(s)X_{e1}(s) + G(s)X_{e2}(s) \quad X_a(s) = G(s)X_{e1}(s) + G_K(s)X_{e2}(s)$$

Der Vergleich der Ausdrücke liefert

$$\boxed{G_K(s) = G(s)} \quad (4.4)$$

Aufgabe 5 (Sensitivität und komplementäre Sensitivität) Gegeben sei das folgende Blockschaltbild eines Regelkreises mit Eingangsgröße w und Ausgangsgröße y .



$$G(s) = \frac{s-1}{s^3 + s^2 - s + 2}$$

$$K(s) = K$$

- Bestimmen Sie die Sensitivitätsfunktion $S(s)$ des Regelkreises.
- Bestimmen Sie die komplementäre Sensitivität $T(s)$.
- Bestimmen Sie für welche Werte von K die komplementäre Sensitivitätsfunktion stabil ist.
- Bestimmen Sie für welche Werte von K die Sensitivitätsfunktion stabil ist.

Lösung

- Die Sensitivität ist definiert als $S = \frac{1}{1+GK}$. Für das betrachtete System ergibt sich

$$S = \frac{s^3 + s^2 - s + 2}{s^3 + s^2 + (K-1)s - K + 2}$$

- Die komplementäre Sensitivität ist definiert als $T = \frac{GK}{1+GK}$. Für das betrachtete System ergibt sich

$$T = \frac{K(s-1)}{s^3 + s^2 + (K-1)s - K + 2}$$

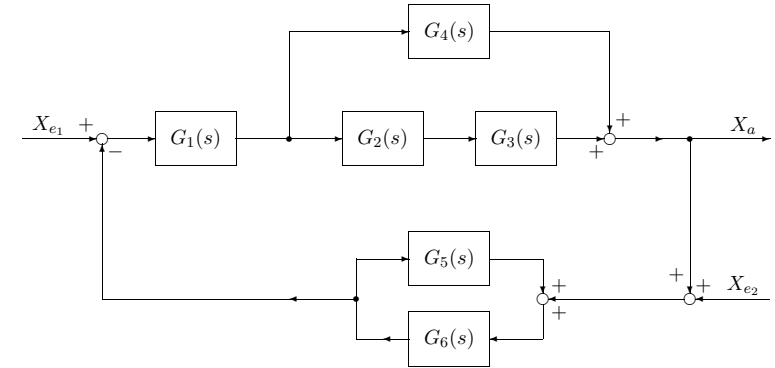
- Stabilität heißt, alle Pole haben negativen Realteil. Dies kann mit der Vorzeichen- und Beiwertebedingung überprüft werden. Aus der Vorzeichenbedingung folgt $K \in (1, 2)$, aus der Beiwertebedingung folgt $K > 1.5$. Insgesamt ergibt sich $K \in (1.5, 2)$.

- Der Nenner der Sensitivitätsfunktion ist (immer!) identisch mit dem Nenner der komplementären Sensitivitätsfunktion. Stabilität ergibt sich daher wieder für $K \in (1.5, 2)$.

Aufgabe 6 (Übertragungsfunktion aus Blockschaltbild)

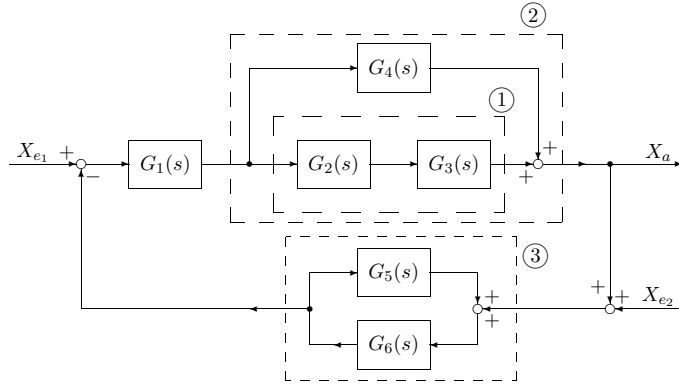
Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des dargestellten Regelkreises:

- durch Vereinfachung des Blockschaltbilds mit Hilfe der Regeln für das Verlegen von Verzweigungs- und Additionsstellen sowie der Regeln für Reihen-, Parallel- und Kreisschaltungen.
- durch Rechnung nach Einführung von möglichst wenigen Zwischengrößen.

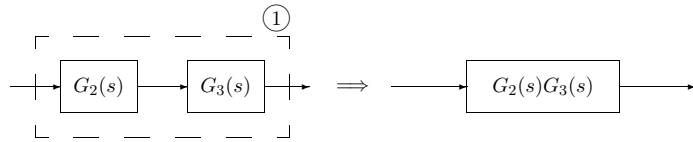


Lösung

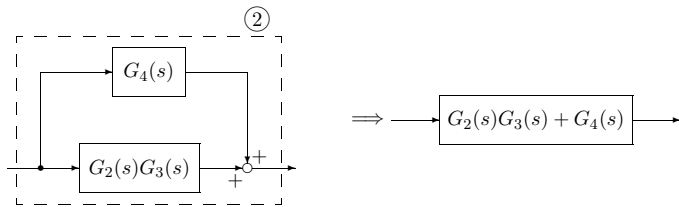
- a) Zeichnerische Lösung: Man kann die in der folgenden Zeichnung gekennzeichneten Blöcke unter Anwendung verschiedener Regeln zusammenfassen.



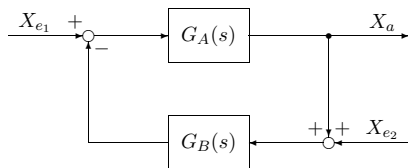
Man kann die gekennzeichneten Blöcke folgendermaßen zusammenfassen:



Damit läßt sich die obere Hälfte folgendermaßen weiter vereinfachen:



Dadurch erhält man folgendes vereinfachtes Blockschaltbild

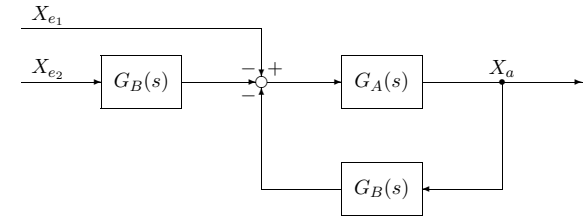


mit den neuen Übertragungsfunktionen

$$G_A(s) = G_1(s) [G_2(s)G_3(s) + G_4(s)] \quad (6.1)$$

$$G_B(s) = \frac{G_6(s)}{1 - G_5(s)G_6(s)} \quad (6.2)$$

Jetzt wird die Eingriffsstelle von X_{e2} nach vorne verlegt, woraus man folgendes Blockschaltbild erhält



Hierbei handelt es sich wieder um eine Kreisschaltung, für die gilt

$$X_a(s) = \frac{G_A(s)}{1 + G_A(s)G_B(s)} [X_{e1}(s) - G_B(s)X_{e2}(s)] \quad (6.3)$$

Damit erhält man weiter

$$X_a(s) = G_1^*(s)X_{e1}(s) + G_2^*(s)X_{e2}(s) \quad (6.4)$$

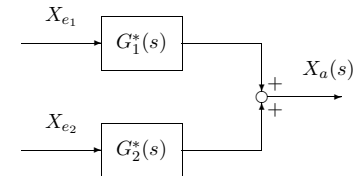
mit

$$G_1^*(s) = \frac{G_1(s) [G_2(s)G_3(s) + G_4(s)] [1 - G_5(s)G_6(s)]}{1 - G_5(s)G_6(s) + G_1(s)G_6(s) [G_2(s)G_3(s) + G_4(s)]} \quad (6.5)$$

und

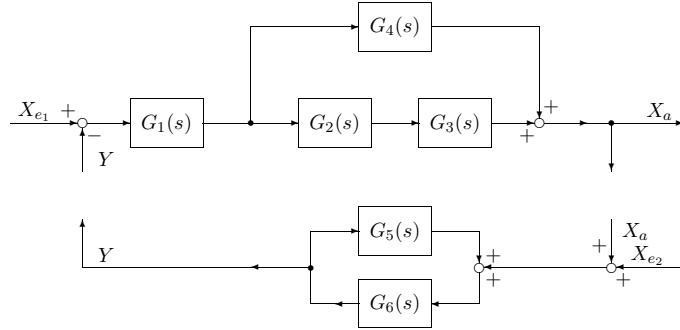
$$G_2^*(s) = -\frac{G_1(s)G_6(s) [G_2(s)G_3(s) + G_4(s)]}{1 - G_5(s)G_6(s) + G_1(s)G_6(s) [G_2(s)G_3(s) + G_4(s)]} \quad (6.6)$$

Somit ergibt sich folgendes vereinfachtes Blockschaltbild:



- b) Rechnerische Lösung:

Hierzu führt man die Zwischengröße $Y(s)$ ein:



Im Zweig oberhalb der Trennstelle erhält man:

$$\underbrace{G_1(s)[G_2(s)G_3(s) + G_4(s)]}_{=G_A(s)}[X_{e1}(s) - Y(s)] = X_a(s) \quad (6.7)$$

Der untere Zweig liefert

$$\{[X_a(s) + X_{e2}(s)] + G_5(s)Y(s)\}G_6(s) = Y(s) \quad (6.8)$$

Aus Gleichung (6.8) ergibt sich

$$Y(s) = \frac{G_6(s)}{1 - G_5(s)G_6(s)}[X_a(s) + X_{e2}(s)] = G_B(s)[X_a(s) + X_{e2}(s)] \quad (6.9)$$

Setzt man Gleichung (6.9) in Gleichung (6.7) ein, so führt dies zu

$$G_A(s)\{X_{e1}(s) - G_B(s)[X_a(s) + X_{e2}(s)]\} = X_a(s) \quad (6.10)$$

Dies führt auf

$$X_a(s)[1 + G_A(s)G_B(s)] = G_A(s)X_{e1}(s) - G_A(s)G_B(s)X_{e2}(s) \quad (6.11)$$

Damit erhält man wie bei der grafischen Lösung

$$X_a(s) = \frac{G_A(s)}{1 + G_A(s)G_B(s)}X_{e1}(s) + \frac{-G_A(s)G_B(s)}{1 + G_A(s)G_B(s)}X_{e2}(s) \quad (6.12)$$

Aufgabe 7 (Übertragungsfunktion, Systemantwort, Sprungantwort)

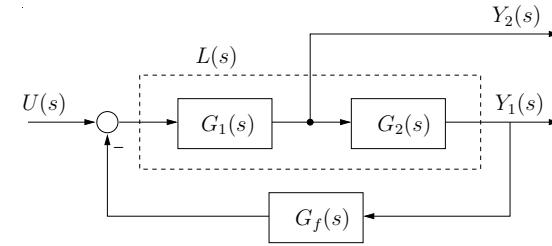
Gegeben sei das in der folgenden Abbildung dargestellte System

$$\text{mit } G_1(s) = \frac{3(s+2)}{s}, \quad G_f(s) = 2$$

a) Die Sprungantwort (Einheitsprung $u(t)=h(t)$) des Systems ist

$$y_1(t) = 0.5 + e^{-3t} - 1.5e^{-4t}. \quad (7.a)$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s)$.



- b) Welches Ausgangssignal $y_1(t)$ stellt sich für große Zeiten t ein, wenn das System mit $u(t) = \sin t$ angeregt wird? Zeichnen Sie den Zeitverlauf zu $y_1(t)$.
- c) Berechnen Sie den Zeitverlauf von $y_2(t)$ für $u(t) = h(t)$ ($y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Grenzwertsätze.

Lösung

- a) Um die Übertragungsfunktion des Systems zu bestimmen, stellt man zuerst die Sprungantwort $y_1(t)$ und das Eingangssignal $u(t)$ im Laplace-Bereich dar. Die Laplace-Transformierte von $y_1(t)$ ist

$$Y_1(s) = \mathcal{L}\{y_1(t)\} = \mathcal{L}\{0.5 + e^{-3t} - 1.5e^{-4t}\} \quad (7.1)$$

$$= \frac{0.5}{s} + \frac{1}{s+3} - \frac{1.5}{s+4} \quad (7.2)$$

$$= \frac{3(s+2)}{s(s+3)(s+4)}, \quad (7.3)$$

und die Laplace-Transformierte von $u(t)$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}. \quad (7.4)$$

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ des geschlossenen Kreises ergibt sich dann zu

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{3s(s+2)}{s(s+3)(s+4)} = \frac{3(s+2)}{(s+3)(s+4)}. \quad (7.5)$$

Außerdem ergibt die Anwendung der Kreisschaltungsregel für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)G_f(s)}, \quad (7.6)$$

und damit

$$L(s) = \frac{G(s)}{1 - G_f(s)G(s)}. \quad (7.7)$$

Mit der bekannten Übertragungsfunktion $G_f(s) = 2$ des Rückführgliedes und unter Verwendung von Gleichung (7.5) ergibt sich

$$L(s) = \frac{3(s+2)}{s(s+1)}. \quad (7.8)$$

Damit folgt (aus $L(s) = G_1(s)G_2(s)$)

$$G_2(s) = L(s)G_1^{-1}(s) = \frac{3(+2)}{s(s+1)} \cdot \frac{s}{3(s+2)} = \frac{1}{s+1}. \quad (7.9)$$

- b) Normalerweise könnte man diese Aufgabe im Laplace-Bereich bearbeiten und die Lösung durch Laplace-Rücktransformation bestimmen. Dies ist hier jedoch nicht besonders einfach. Die sinusförmige Anregung ermöglicht einen einfacheren Lösungsweg. Das Eingangssignal lautet

$$u(t) = A \sin \omega t. \quad (7.10)$$

Wie bereits aus der Vorlesung bekannt ergibt sich folgende Lösung

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi). \quad (7.11)$$

Das Ausgangssignal $y(t)$ ist ebenfalls ein sinusförmiges Signal mit Frequenz ω , wobei die Amplitude mit $|G(j\omega)|$ verstärkt wird und eine Phasenverschiebung von $\phi\{G(j\omega)\}$ auftritt. In diesem Fall ist $u(t) = \sin t$ und damit

$$A = 1 \quad \text{und} \quad \omega = 1 \quad (7.12)$$

$$G(j\omega) = \frac{3(2+j\omega)}{(3+j\omega)(4+j\omega)}. \quad (7.13)$$

Daraus folgt ($\omega = 1$):

$$|G(j)| = \left| \frac{3(2+j)}{(3+j)(4+j)} \right| = \frac{3|2+j|}{|3+j||4+j|} = \frac{3}{\sqrt{34}} = 0.5145 \quad (7.14)$$

$$\phi\{G(j)\} = \angle G(j) = \angle(2+j) - \angle(3+j) - \angle(4+j), \quad (7.15)$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{4}\right) \quad (7.16)$$

$$= -0.1031. \quad (7.17)$$

Einsetzen in Gleichung (7.11) führt auf die Lösung

$$y_1(t) = 0.5145 \sin(t - 0.1031). \quad (7.18)$$

Abbildung 3 zeigt den Zusammenhang zwischen Eingangssignal $u(t)$ und Ausgangssignal $y_1(t)$.

- c) Zur Berechnung von $y_2(t)$, eignet sich die veränderte Darstellung des Systems nach Abbildung 4. Wendet man die Regel für eine Kreisschaltung an ergibt sich für die neue Übertragungsfunktion

$$G'(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_f(s)} \quad (7.19)$$

$$= \frac{3(s^2 + 3s + 2)}{s^2 + 7s + 12}. \quad (7.20)$$

Mit dem Einheitssprung $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ als Eingang ergibt sich die Systemantwort im Bildbereich zu

$$Y_2(s) = G'(s)U(s) = \frac{3(s^2 + 3s + 2)}{s^2 + 7s + 12} \frac{1}{s}. \quad (7.21)$$

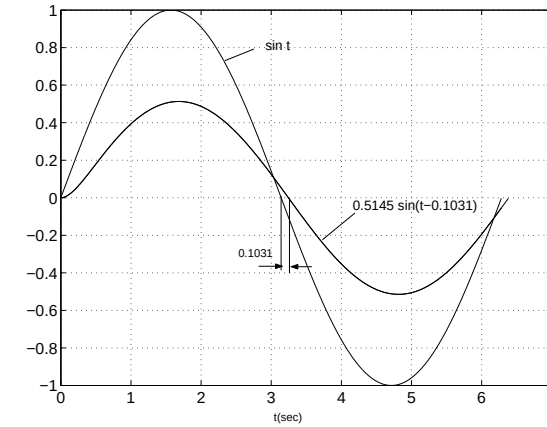


Abbildung 3: Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal

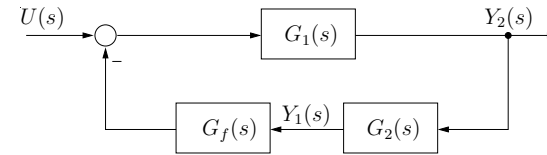


Abbildung 4: Alternative Darstellung des Systems

Die Sprungantwort berechnet sich dann durch Rücktransformation in den Zeitbereich. Die Pole von $Y_2(s)$ sind,

$$s_1 = 0 \quad s_2 = -3 \quad s_3 = -4. \quad (7.22)$$

Unter Anwendung des Entwicklungssatzes auf

$$Y_2(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+3} + \frac{c_3}{s+4} \quad (7.23)$$

mit

$$c_1 = \left. \frac{3(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)} \right|_{s=0} = 0.5 \quad (7.24)$$

$$c_2 = \left. \frac{3(s+1)(s+2)}{s(s+4)} \right|_{s=-3} = -2 \quad (7.25)$$

$$c_3 = \left. \frac{3(s+1)(s+2)}{s(s+3)} \right|_{s=-4} = 4.5 \quad (7.26)$$

ergibt sich die Lösung zu

$$y_2(t) = 0.5h(t) - 2e^{-3t} + 4.5e^{-4t}. \quad (7.27)$$

Für die Grenzwerte ergibt sich aus der Lösung (7.27)

$$y_2(0_+) = 3 \quad (7.28)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0.5. \quad (7.29)$$

Diese stimmen mit denen aus den Grenzwertsätzen überein

$$y_2(0_+) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \{sY(s)\} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3(s^2 + 3s + 2)}{s^2 + 7s + 12} \right\} = 3 \quad (7.30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \{sY(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{3(s^2 + 3s + 2)}{s^2 + 7s + 12} \right\} = 0.5. \quad (7.31)$$

Aufgabe 8

- a) Die Nyquist-Diagramme für drei verschiedene Systeme sind in den Abbildungen 5(a), 5(b) und 6(a) dargestellt. Überprüfen Sie die Stabilität der geschlossenen Regelkreise unter den folgenden Annahmen ($G(s)$: Regelstrecke, $K(s)$: Regler, m_0 : Anzahl der Pole des offenen Regelkreises in der rechten Halbebene, a_0 : Anzahl der Pole des offenen Regelkreises auf der imaginären Achse):

- 1) Die zu Abbildung 5(a) gehörige Übertragungsfunktion des offenen Kreises (GK) ist:

$$G(s)K(s) = \frac{40}{s(s+3)(s+10)}. \quad (8.a)$$

- 2) $m_0 = 2$ und $a_0 = 0$ für das Nyquist-Diagramm aus Abbildung 5(b).
3) $m_0 = 1$ und $a_0 = 0$ für das Nyquist-Diagramm aus Abbildung 6(a).

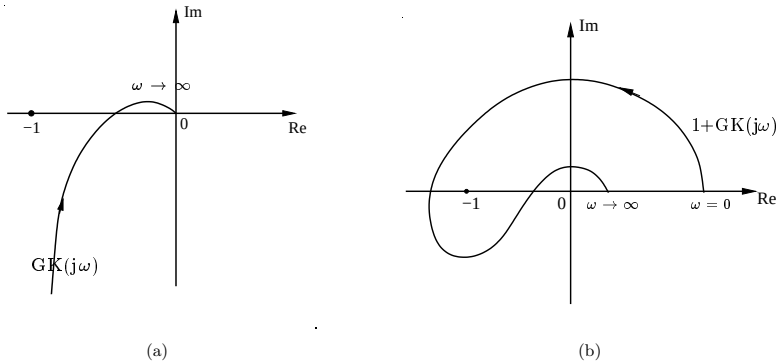


Abbildung 5: Nyquist-Diagramme für verschiedene Systeme

- b) In welchem Bereich von Abbildung 6(b) muß sich der kritische Punkt $(-1, 0)$ befinden, damit der geschlossene Kreis stabil ist, wenn $m_0 = 0$ und $a_0 = 0$ gilt.
c) Die Übertragungsfunktion eines offenen Kreises ist gegeben durch

$$G(s)K(s) = \frac{k(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)} \quad (8.b)$$

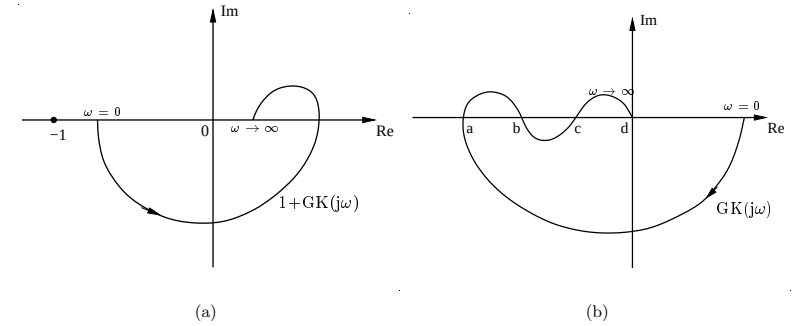
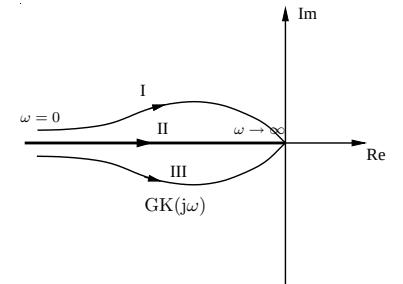


Abbildung 6: Nyquist-Diagramme verschiedene Systeme

mit $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ und $k > 0$.

- 1) Die Kurven I, II und III stellen Nyquist-Diagramme des offenen Kreises (8.b) für unterschiedliche Parameterkombinationen (T_1, T_2, k) dar. Welche Bedingungen müssen die Parameter jeweils erfüllen?
2) In welchem Fall ist der geschlossene Kreis stabil?



Lösung

- a) Achtung: die Unteraufgaben 2) und 3) beziehen sich auf $1 + G(s)K(s)$ und nicht auf $G(s)K(s)$.

	Referenzpunkt	Phasendrehung	m_0	a_0	Stabilität des geschlossenen Kreises?
1)	$(-1, 0)$	$\pi/2$	0	1	ja
2)	$(0, 0)$	0	2	0	nein
3)	$(0, 0)$	π	1	0	ja

- b) Da $m_0 = 0$ und $a_0 = 0$, ist die Bedingung für Stabilität des geschlossenen Kreises eine Phasendrehung von 0 um den Referenzpunkt $(-1, 0)$. Dies ist erfüllt, wenn der Referenzpunkt zwischen den Punkten b und c oder links von a auf der negativen reellen Achse liegt.
c) 1) Die Beziehungen zwischen den Parametern erhält man am einfachsten durch überprüfen der Phasendrehung des offenen Kreises. Daraus ergibt sich:

$$\arg\{G(j\omega)K(j\omega)\} = \arg\{T_2j\omega + 1\} - \arg\{T_1j\omega + 1\} - \pi \quad (8.1)$$

$$= \arctan T_2\omega - \arctan T_1\omega - \pi \quad (8.2)$$

$$\begin{cases} > -\pi \quad \forall \omega & \text{für } T_2 > T_1 \Rightarrow \text{Verlauf III} \\ = -\pi \quad \forall \omega & \text{für } T_2 = T_1 \Rightarrow \text{Verlauf II} \\ < -\pi \quad \forall \omega & \text{für } T_2 < T_1 \Rightarrow \text{Verlauf I} \end{cases} \quad (8.3)$$

- 2) Aus der Übertragungsfunktion des offenen Kreises liest man ab: $a_0 = 2$. Damit ist die Bedingung für Stabilität des geschlossenen Kreises eine Phasendrehung von π um den Referenzpunkt $(-1, 0)$. Dies ist für den Verlauf III der Fall. Der Regelkreis ist also stabil für $T_2 > T_1$.

Aufgabe 9 (Vorzeichenbedingung, Amplituden- und Phasenreserve)

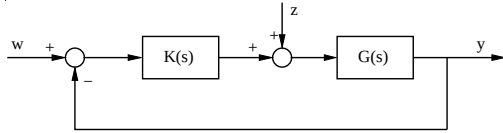


Abbildung 7: Standardregelkreis.

Abbildung 7 zeigt den zu untersuchenden Regelkreis. Im weiteren soll gelten: $G(s) = \frac{1}{s-2}$.

- a) Der Regler sei durch $K(s) = \frac{k(s-2)}{s}$, ($k > 0$) gegeben. Ist der geschlossene Regelkreis stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Im folgenden sei $K_1(s) = \frac{k(s+1)}{s+2}$.

- b) Welches Übertragungsverhalten hat $K_1(s)$ nach $PIDT_n$ -Nomenklatur?
- c) Wie muß die Konstante k gewählt werden, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist? (Verwenden Sie die Vorzeichenbedingung)
- d) Berechnen Sie die Systemantwort $y(t)$ auf die Führungsgröße $w(t) = h(t)$ (Störungen seien vernachlässigt, $k = 8$). Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf von $y(t)$.

Im folgenden sei $K_2(s) = \frac{k(s+1)}{s}$.

- e) Welches Übertragungsverhalten hat $K_2(s)$ nach $PIDT_n$ -Nomenklatur?
- f) Wie muß die Konstante k gewählt werden, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist? Verwenden Sie hierfür das Nyquist-Kriterium.
- g) Berechnen Sie die Amplituden- und die Phasenreserve ($k = 8$).
- h) Berechnen Sie die Systemantwort $y(t)$ auf die Führungsgröße $w(t) = h(t)$ (Störungen seien vernachlässigt, $k = 8$). Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf von $y(t)$.
- i) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben d) und h) bezüglich des sich einstellenden stationären Wertes. Was fällt Ihnen auf?

Lösung

- a) Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises ergibt sich zu

$$G_0(s) = G(s)K(s) = \frac{1}{s-2} \frac{k(s-2)}{s} = \frac{k}{s}. \quad (9.1)$$

Entscheidend für die Stabilität des geschlossenen Kreises sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $1 + G_0(s) = 0$. Mit

$$1 + G_0(s) = 0 \Rightarrow s + k = 0 \quad (9.2)$$

ergibt sich $s = -k < 0$ und damit ein stabiles Systemverhalten des geschlossenen Kreises. Berechnet man jedoch die Übertragungsfunktion zwischen Eingangsstörung $Z(s)$ und Ausgang $Y(s)$ ergibt sich

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{G(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{s-2} \frac{1}{1 + \frac{k}{s}} = \frac{s}{(s-2)(s+k)}. \quad (9.3)$$

Gleichung (9.3) zeigt, daß der instabile Pol $s = 2$ **nicht** beseitigt worden ist. Der geschlossene Regelkreis wurde durch die "Kürzung" des instabilen Pols **intern instabil** (siehe auch Beispiel aus der Vorlesung). Pole in der rechten Halbebene dürfen nicht kürzt werden!

- b) Es handelt sich um PDT_1 -Verhalten (siehe Vorlesung zur Nomenklatur des Übertragungsverhaltens).
- c) Mit $K_1(s) = \frac{k(s+1)}{s+2}$ folgt für die Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$G_0(s) = G(s)K_1(s) = \frac{k(s+1)}{(s+2)(s-2)}. \quad (9.4)$$

Die Stabilität des geschlossenen Kreises läßt sich leicht mit der Vorzeichenbedingung überprüfen. Die charakteristische Gleichung $1 + G_0(s) = 0$ führt auf

$$1 + \frac{k(s+1)}{(s+2)(s-2)} = 0 \Rightarrow s^2 + ks + k - 4 = 0. \quad (9.5)$$

Die Vorzeichenbedingung ergibt damit die folgenden Bedingungen für die Stabilität des geschlossenen Kreises:

$$\begin{cases} k > 0 \\ k - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k > 4} \quad (9.6)$$

- d) Die Übertragungsfunktion zwischen Führungsgröße $W(s)$ und Ausgangsgröße $Y(s)$ entspricht der komplementären Sensitivität $T(s)$ und läßt sich durch

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = T(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{8(s+1)}{s^2 + 8s + 4} \quad (9.7)$$

ausdrücken. Mit $W(s) = \frac{1}{s}$ und Partialbruchzerlegung folgt

$$Y(s) = T(s)W(s) = \frac{8(s+1)}{s(s^2 + 8s + 4)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s + 0.536} - \frac{1}{s + 7.464}. \quad (9.8)$$

Laplace-Rücktransformation von (9.8) ergibt dann

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 - e^{-0.536t} - e^{-7.464t}} \quad (9.9)$$

den Verlauf der Ausgangsgröße für den geschlossenen Regelkreis (siehe Abbildung 8).

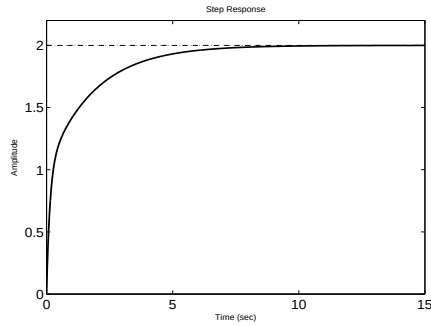


Abbildung 8:

e) Der Regler hat *PI*-Verhalten.

f) Mit $K_2(s) = \frac{k(s+1)}{s}$ ergibt sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises zu

$$G_0(s) = G(s)K_2(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-2)}. \quad (9.10)$$

Um die Stabilität des geschlossenen Kreises mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums zu überprüfen muß zunächst der Verlauf des Frequenzgangs $G_0(j\omega)$ in der komplexen Ebene bestimmt werden. Diesen spaltet man sinnvollerweise in Real- und Imaginärteil auf:

$$G_0(j\omega) = \frac{k(j\omega+1)}{j\omega(j\omega-2)} = -\frac{k(j\omega+1)}{\omega^2 + j2\omega} \quad (9.11)$$

$$= -\frac{3k}{\omega^2 + 4} - j\frac{k(\omega^2 - 2)}{\omega^3 + 4\omega}, \quad (9.12)$$

und bestimmt Anfangs- und Endwerte:

$$\operatorname{Re}\{G_0(0)\} = -\frac{3}{4}k \quad \operatorname{Im}\{G_0(j\omega)\} \rightarrow +\infty \quad \text{für } \omega \rightarrow 0 \quad (9.13)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\{G_0(j\omega)\} = 0_- \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im}\{G_0(j\omega)\} = 0_- \quad (9.14)$$

Entscheidend für die Stabilitätsuntersuchung sind Schnittpunkte mit der reellen Achse. In diesem Fall gibt es genau einen Schnittpunkt. Er ergibt sich zu

$$\operatorname{Im}\{G_0(j\omega_1)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = 2 \quad (9.15)$$

$$\operatorname{Re}\{G_0(j\omega_1)\} = -\frac{k}{2}. \quad (9.16)$$

Das resultierende Nyquist-Diagramm zeigt Abbildung 9. Die Übertragungsfunktion (9.10) weist einen Pol auf der imaginären Achse ($s = 0 \Rightarrow a_0 = 1$) und einen instabilen Pol in der rechten Halbebene ($s = 2 \Rightarrow m_0 = 1$) auf. Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist muß die Phasendrehung bezüglich des Referenzpunktes $(-1, 0)$ $\frac{3}{2}\pi$ betragen. D.h. $(-1, 0)$ muß zwischen dem Punkt A und dem Ursprung liegen. Aus dieser Bedingung läßt sich folgern:

$$-\frac{k}{2} < -1 \quad \Rightarrow \quad k > 2 \quad (9.17)$$

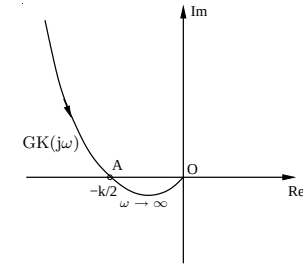


Abbildung 9:

g) Mit $k = 8$, läßt sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises als

$$G_0(s) = G(s)K(s) = \frac{8(s+1)}{s(s-2)} \quad (9.18)$$

ausdrücken.

Amplitudenreserve:

Aus Abbildung 9 erhält man $|OA| = \frac{k}{2} = 4$. Daraus berechnet sich die Amplitudenreserve direkt zu

$$a_r = \frac{1}{|OA|} = 0.25. \quad (9.19)$$

Phasenreserve:

Zuerst ist diejenige Frequenz ω_1 zu bestimmen, bei welcher die Amplitude von $G_0(j\omega)$ genau eins beträgt:

$$\left| \frac{8(j\omega_1+1)}{j\omega_1(j\omega_1-2)} \right| = \frac{8|j\omega_1+1|}{|j\omega_1-2||j\omega_1|} = \frac{8\sqrt{\omega_1^2+1}}{\omega_1\sqrt{\omega_1^2+4}} \stackrel{!}{=} 1 \quad (9.20)$$

$$\omega_1^4 - 60\omega_1^2 - 64 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 + 256}}{2} = 61.0483 \quad (9.21)$$

$$(\text{nur } \omega_1^2 > 0 \text{ macht Sinn}) \quad (9.22)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = 7.8133 \text{ rad/s.} \quad (9.23)$$

Damit läßt sich der Phasenwinkel des offenen Regelkreises für ω_1 leicht ausrechnen. Es ergibt sich:

$$\arg\{G_0(j\omega_1)\} = \arg\{j\omega_1+1\} - \arg\{j\omega_1-2\} - \pi/2 \quad (9.24)$$

$$= \arctan \omega_1 - (\pi - \arctan \frac{\omega_1}{2}) - \pi/2 \approx -1.9487 \text{ rad.} \quad (9.25)$$

$$\text{Phasenreserve : } \gamma_r = \arg\{G_0(j\omega_1)\} + \pi \approx 1.193 \text{ rad} \approx 68.4^\circ. \quad (9.26)$$

- h) Die Übertragungsfunktion zwischen Führungsgröße $W(s)$ und Ausgangsgröße $Y(s)$ ist durch die komplementäre Sensitivität $T(s)$ folgendermaßen gegeben:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = T(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (9.27)$$

Setzt man Gleichung (9.18) in Gleichung (9.27) ein, so erhält man

$$Y(s) = T(s)W(s) = \frac{8(s+1)}{s(s+2)(s+4)} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+2} - \frac{3}{s+4}. \quad (9.28)$$

Nach Laplace-Rücktransformation ergibt sich der Zeitverlauf des Ausgangssignals zu (siehe Abbildung 10)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 1 + 2e^{-2t} - 3e^{-4t} \quad (9.29)$$

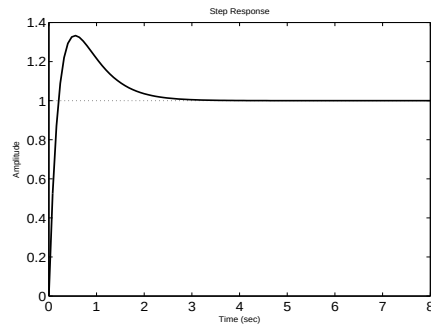


Abbildung 10:

- i) Die Teilaufgaben d) und h) behandeln die Systemantwort $y(t)$ auf einen Einheitssprung als Führungsgröße $w(t)$ für zwei unterschiedliche Regler. Regler $K_1(s) = \frac{k(s+1)}{s+2}$ erreicht den stationären Wert 2 für den Ausgang y und führt damit zu einer stationären Regelabweichung von 1. Verwendet man jedoch den Regler $K_2(s) = \frac{k(s+1)}{s}$ aus Teilaufgabe h) so stellt man fest, daß dieser tatsächlich zu einem stationären Wert von $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$ führt und damit **keine** bleibende Regelabweichung auftritt. Begründen läßt sich dies durch den I-Anteil des Reglers $K_2(s)$. Dieser ermöglicht das Ausregeln eines sprungförmigen Eingangssignals ohne bleibende Regelabweichung (vergleiche Vorlesung).

Aufgabe 10 (Fundamentales Dilemma der Regelungstechnik)

- a) Die Sensitivität (S) und die komplementäre Sensitivität (T) eines Regelkreises sind gegeben.

- 1) Sind die Verläufe von S und T aus Abbildung 11 möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

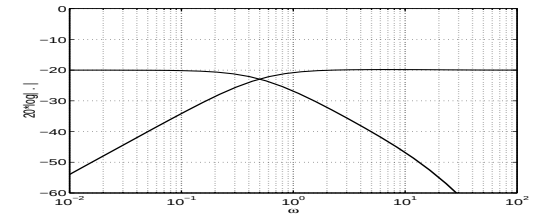


Abbildung 11: Verläufe von S und T .

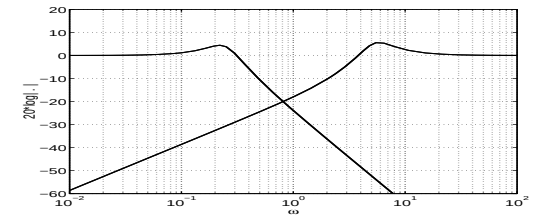


Abbildung 12: Verläufe von S und T .

- 2) Sind die Verläufe von S und T aus Abbildung 12 möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

- b) Gegeben ist der Regelkreis aus Abbildung 7, mit $G(s) = 5$.

- 1) Die Eingangsstörung z , die auf das System wirkt ist $z(t) = 2 \sin t$. Welches Ausgangssignal $y(t)$ stellt sich ein (unter Voraussetzung $w(t) = 0$)? Ziehen Sie zur Beantwortung dieser Frage die Verläufe der Sensitivität S und der komplementären Sensitivität T aus Abbildung 13 heran ($20 \log 0.2138 \approx -13.4$, $20 \log 0.9259 \approx -0.669$).

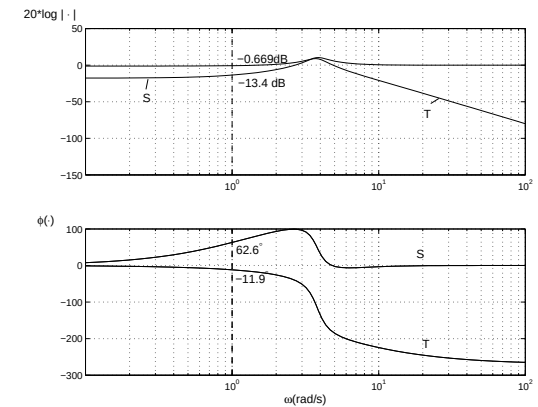


Abbildung 13:

- 2) Die Führungsgröße sei $w(t) = h(t)$. Es soll keine Eingangsstörung vorhanden sein ($z(t) = 0$). Ergibt sich für den Regelkreis eine bleibende Regelabweichung? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe von Abbildung 13.

Lösung

- a) Für die Sensitivität S und die komplementäre Sensitivität T gilt folgender Zusammenhang:

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1 \quad \forall \omega. \quad (10.1)$$

Daraus ergibt sich

$$\underbrace{|S(j\omega) + T(j\omega)|}_{1} \leq |S(j\omega)| + |T(j\omega)|, \quad (10.2)$$

und damit

$$|S(j\omega)| + |T(j\omega)| \geq 1 \quad (10.3)$$

Die Summe der Amplituden der Sensitivität S und der komplementären Sensitivität T muß also immer (für alle Frequenzen ω) größer oder gleich eins sein.

- 1) Aus dem Bode-Diagramm liest man ab

$$20 \log |S(j\omega)| \leq -20 \quad \forall \omega \Rightarrow |S(j\omega)| \leq 0.1 \quad (10.4)$$

$$20 \log |T(j\omega)| \leq -20 \quad \forall \omega \Rightarrow |T(j\omega)| \leq 0.1. \quad (10.5)$$

Damit ergibt sich:

$$|S(j\omega)| + |T(j\omega)| \leq 0.2 \quad \forall \omega \quad (10.6)$$

Dies widerspricht Forderung (10.3). Solch ein System kann also nicht existieren.

- 2) Am Schnittpunkt der Kurven für die Sensitivität S und die komplementäre Sensitivität T im Bode-Diagramm läßt sich ablesen (ω^* : Kreisfrequenz am Schnittpunkt):

$$20 \log |S(j\omega^*)| = -20 \Rightarrow |S(j\omega^*)| = 0.1 \quad (10.7)$$

$$20 \log |T(j\omega^*)| = -20 \Rightarrow |T(j\omega^*)| = 0.1 \quad (10.8)$$

$$|S(j\omega^*)| + |T(j\omega^*)| = 0.2 \quad (10.9)$$

Dies widerspricht wiederum Forderung (10.3), die ja für alle Frequenzen ω (also auch für ω^*) erfüllt sein soll. Dieses System existiert damit ebenfalls nicht.

- b) 1) Formt man das System wie in Abbildung 14 um, so ergibt sich die Übertragungsfunktion von $Z(s)$ nach $Y(s)$ mit Hilfe der Sensitivität $S(s)$ zu

$$Y(s) = G(s)S(s)Z(s). \quad (10.10)$$

Mit $z(t) = A \sin \omega^* t$ folgt (siehe Vorlesung)

$$y(t) = |G(j\omega^*)S(j\omega^*)| A \sin(\omega^* t + \arg\{S(j\omega^*)G(j\omega^*)\}) \quad (10.11)$$

$$= |G(j\omega^*)| |S(j\omega^*)| A \sin(\omega^* t + \arg\{S(j\omega^*)\} + \arg\{G(j\omega^*)\}). \quad (10.12)$$

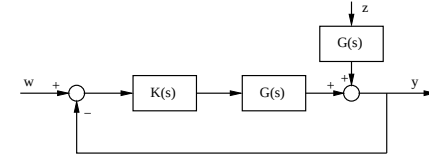


Abbildung 14:

Mit $G(s) = 5$ (und damit $\arg\{G(j\omega)\} = 0$), $A = 2$ und $\omega^* = 1$ resultiert

$$y(t) = 10 |S(j1)| \sin(t + \arg\{S(j1)\}). \quad (10.13)$$

Die Werte $|S(j1)|$ und $\arg\{S(j1)\}$ lassen sich leicht aus dem Bode-Diagramm ablesen und ergeben sich zu

$$20 \log |S(j1)| \approx -13.4 \text{ dB} \quad \text{und} \quad \arg\{S(j1)\} \approx 62.6^\circ \approx 1.0926 \text{ rad}. \quad (10.14)$$

Mit $|S(j1)| \approx 0.2138$ und Gleichung (10.13) ergibt sich schließlich das gesuchte Ergebnis

$$y(t) = 2.138 \sin(t + 1.0926) \quad (10.15)$$

- 2) Der Regelfehler ist $e(t) = w(t) - y(t)$. Die Auswirkung der Führungsgröße $W(s)$ auf den Regelfehler $E(s)$ ergibt sich über die Sensitivität $S(s)$ zu

$$E(s) = S(s)W(s). \quad (10.16)$$

Die bleibende Regelabweichung e_b auf einen Einheitssprung der Führungsgröße $w(t)$ läßt sich damit durch

$$e_b = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \quad (10.17)$$

berechnen. Die Sensitivität auf eine konstante Anregung ($S(0)$, Kreisfrequenz $\omega = 0$) gibt damit direkt die bleibende Regelabweichung auf einen Einheitssprung der Führungsgröße $w(t)$ an. Man liest für kleine Frequenzen aus dem Bode-Diagramm näherungsweise $|S(j\omega)| \approx -17.6 \text{ dB}$ ab. Dieser Wert ist offensichtlich ungleich null: Der geschlossene Regelkreis wird eine bleibende Regelabweichung aufweisen.

Aufgabe 11 (Fundamentales Dilemma der Regelungstechnik)

Gegeben sei der Regelkreis in Abbildung 9.

- a) Stellen Sie die Übertragungsfunktionen

$$G_{e\eta}(s) = \left. \frac{e(s)}{\eta(s)} \right|_{w=0, z=0}$$

$$G_{ez}(s) = \left. \frac{e(s)}{z(s)} \right|_{w=0, \eta=0}$$

mit $e = w - y$ (Regelfehler) allgemein in Abhängigkeit von $G(s)$ und $K(s)$ auf.

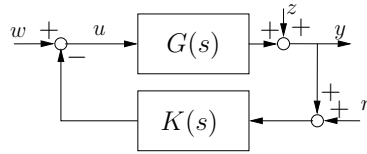


Abbildung 15: Regelkreis.

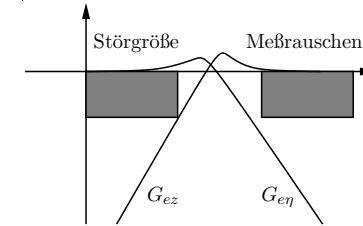


Abbildung 16: Typische Verläufe von $20 \log(|G_{ey}(j\omega)|)$ und $20 \log(|G_{ez}(j\omega)|)$.

- b) Bestimmen Sie formal die Differenz $G_{ey}(s) - G_{ez}(s)$. Können Sie hieraus etwas bezüglich den erreichbaren Regelgüten zur Störunterdrückung und Rauschunterdrückung schließen?

Lösung

- Bestimmung der Übertragungsfunktionen $G_{ey}(s)$ und $G_{ez}(s)$:

$$y(s) = (-K(s)(\eta(s) + y(s)))G(s) + z(s)$$

$$\rightarrow y(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} (-G(s)K(s)\eta(s) + z(s))$$

$$\rightarrow e(s) = w(s) - y(s) = w(s) - \frac{1}{1 + G(s)K(s)} (G(s)K(s)\eta(s) - z(s))$$

$$\rightarrow G_{ey}(s) = \left. \frac{e(s)}{\eta(s)} \right|_{w=0, z=0} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{Komplementäre Sensitivität})$$

$$\rightarrow G_{ez}(s) = \left. \frac{e(s)}{z(s)} \right|_{w=0, \eta=0} = -\frac{1}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{Sensitivität})$$

- Differenz $G_{ey}(s) - G_{ez}(s)$:

$$\rightarrow G_{ey}(s) - G_{ez}(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} (G(s)K(s) + 1) = 1$$

→ Wegen $G_{ey}(s) - G_{ez}(s) = 1 = |G_{ey}(s) - G_{ez}(s)| \leq |G_{ey}(s)| + |G_{ez}(s)|$ können $G_{ey}(s)$ und $G_{ez}(s)$ nicht gleichzeitig klein sein.

→ Stör- und Rauschunterdrückung sind nicht gleichzeitig erreichbar. Vorgehen beim Reglerentwurf: Die Anforderungen an $G_{ey}(s)$ und $G_{ez}(s)$ gelten für unterschiedliche Frequenzbereiche, da Störgrößen in der Regel im niederfrequenten und Meßrauschen im hochfrequenten Frequenzbereich liegen.

Aufgabe 12 (Bleibende Regelabweichung)

Gegeben sei der Regelkreis aus Abbildung 9. Die Übertragungsfunktion der Regelstrecke ist

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)(s+5)}.$$

Diese Regelstrecke soll mit einem Regler der Form

$$K(s) = a \frac{s+1}{s}, \quad a \in \mathbb{R}$$

und mit Hilfe der oben dargestellten Regelkreisstruktur geregelt werden.

- Welchen Reglertyp ist $K(s)$?
- Für welche Werte von a ist der geschlossene Regelkreis stabil?
- Wie groß ist die bleibende Regelabweichung $e(t) = w(t) - y(t)$ für eine sprunghafte Störung $z(t) = h(t)$ (und $w(t) \equiv \eta(t) \equiv 0$) im Fall $a = 20$?
- Wie groß ist die bleibende Regelabweichung $e(t) = w(t) - y(t)$ für eine rampenförmige Störung $z(t) = t \cdot h(t)$ (und $w(t) \equiv \eta(t) \equiv 0$) im Fall $a = 20$?

Lösung

- $K(s) = a \frac{s+1}{s} = a \left(1 + \frac{1}{s}\right) \rightarrow PI\text{-Regler}$

- Stabilität des geschlossenen Kreises:

$$\rightarrow \text{Charakteristisches Polynom: } 1 + G(s)K(s) = s^3 + 3s^2 + (a-10)s + a = 0$$

→ Hurwitzkriterium:

- Koeffizienten des charakteristischen Polynoms müssen positiv sein $\rightarrow a > 10$

- Die Hauptabschnittsdeterminanten der Matrix $\begin{vmatrix} a-10 & 1 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & a-10 & 1 \end{vmatrix}$ müssen positiv

sein:

$$\Delta_1 = a - 10 > 0,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{vmatrix} a-10 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 2a - 30 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det \begin{vmatrix} a-10 & 1 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & a-10 & 1 \end{vmatrix} = (2a - 30) > 0$$

$$\rightarrow a > 15$$

→ Der geschlossene Kreis ist für $a > 15$ stabil.

c) Bleibende Regelabweichung für sprungförmige Störung ($h(t) \circ - \bullet \frac{1}{s}$):

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \left(G_{ez}(s) \frac{1}{s} \right) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{1}{s} \frac{-s(s-2)(s+5)}{s(s-2)(s+5) + a(s+1)} \right) = 0 \end{aligned}$$

→ Keine bleibende Regelabweichung.

d) Bleibende Regelabweichung für rampenförmige Störung ($t \cdot h(t) \circ - \bullet \frac{1}{s^2}$):

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \left(G_{ez}(s) \frac{1}{s^2} \right) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{1}{s^2} \frac{-s(s-2)(s+5)}{s(s-2)(s+5) + a(s+1)} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

→ Bleibende Regelabweichung von $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 13 (Algebraischer Reglerentwurf, Hurwitz- und Nyquist-Kriterium)

Gegeben sind ein Streckenmodell $G(s)$ und ein Regler $K(s)$:

$$G(s) = \frac{k_s}{(1+2s)(1+3s)}, \quad k_s > 0 \quad (13.a)$$

$$K(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right), \quad k_p > 0, \quad T_I > 0. \quad (13.b)$$

a) Welche Bedingung müssen die Zeitkonstante T_I und die Kreisverstärkung $k_0 = k_s k_p$ erfüllen, damit der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist? Untersuchen Sie die Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums.

Skizzieren Sie das Ergebnis in einem Stabilitätsdiagramm $T_I = T_I(k_0)$ und geben Sie dort den stabilen Bereich an.

b) Wie müssen k_p und T_I gewählt werden, damit der geschlossene Regelkreis einen doppelten Pol $s_{1,2} = -\frac{1}{3}$ besitzt? Wie lautet in diesem Fall der dritte Pol s_3 .

Im folgenden sei $T_I = 3$.

- c) Welche Bedingungen muß k_0 erfüllen, damit der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist? Benutzen Sie dazu das Nyquist-Kriterium.
- d) Der Regelkreis wird gemäß Abbildung 17 verändert: Wie ändert sich die Ortskurve des offenen Regelkreises? Welche Bedingung muss k^* erfüllen, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist?

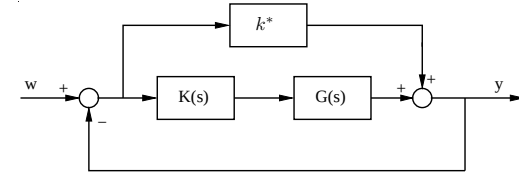


Abbildung 17: Neue Regelkreisstruktur.

Im folgenden sei $k^* = 0$, $T_I = 3$ und $k_0 = \frac{9}{32}$.

- e) Berechnen Sie die Amplituden- und Phasenreserve.
- f) Berechnen Sie die Sprungantwort $y(t)$ des geschlossenen Regelkreises für $w(t) = h(t)$.
- g) Die Rauschunterdrückung soll $|T(j\omega)| < 0.01$ für $\omega \geq 10 \text{ rad/s}$ sein. Erfüllt der Regler diese Anforderung?

Lösung

a) Bedingung für k_0 und T_I

Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises ist

$$G_0(s) = G(s)K(s) = \frac{\overbrace{k_p k_s}^{k_0} (T_I s + 1)}{T_I s(1+2s)(1+3s)}. \quad (13.1)$$

Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung zu

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{k_0(T_I s + 1)}{T_I s(1+2s)(1+3s)} = 0 \quad (13.2)$$

$$\Rightarrow s^3 + \frac{5}{6}s^2 + \frac{1+k_0}{6}s + \frac{k_0}{6T_I} = 0. \quad (13.3)$$

Das Übertragungssystem mit der charakteristischen Gleichung (13.3) ist nach Hurwitz genau dann asymptotisch stabil, wenn die Determinante

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & \frac{k_0}{6T_I} & 0 \\ 1 & \frac{1+k_0}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{k_0}{6T_I} \end{vmatrix} \quad (13.4)$$

sowie ihre Hauptabschnittsdeterminanten

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & \frac{k_0}{6T_I} \\ 1 & \frac{1+k_0}{6} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta_1 = \frac{5}{6} \quad (13.5)$$

positiv sind, und damit auf

$$T_I > \frac{6}{5} \cdot \frac{k_0}{1+k_0}. \quad (13.6)$$

Eine grafische Veranschaulichung des Stabilitätsbereichs zeigt Abbildung 18.

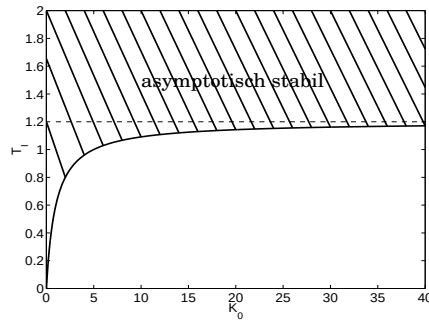


Abbildung 18:

b) Wahl von k_p und T_I für doppelten Pol:

Gewünscht ist ein Doppelpol bei $s_{1,2} = -\frac{1}{3}$. Der dritte Pol s_3 ist nicht weiter spezifiziert und soll bestimmt werden. Das Wunschpolynom für die charakteristische Gleichung ist somit

$$(s + \frac{1}{3})^2(s - s_3) = 0 \quad (13.7)$$

$$\Rightarrow s^3 + (\frac{2}{3} - s_3)s^2 + (\frac{1}{9} - \frac{2}{3}s_3)s - \frac{1}{9}s_3 = 0. \quad (13.8)$$

Das Wunschpolynom (13.8) soll mit dem charakteristischen Polynom (13.3) übereinstimmen. Es muß also gelten:

$$s^3 + \frac{5}{6}s^2 + \frac{1+k_0}{6}s + \frac{k_0}{6T_I} = s^3 + (\frac{2}{3} - s_3)s^2 + (\frac{1}{9} - \frac{2}{3}s_3)s - \frac{1}{9}s_3. \quad (13.9)$$

Koeffizientenvergleich führt schließlich auf:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} - s_3 = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{9} - \frac{2}{3}s_3 = \frac{1+k_0}{6} \\ -\frac{1}{9}s_3 = \frac{k_0}{6T_I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_I = 3 \\ k_0 = k_p k_s = \frac{1}{3} \\ s_3 = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad (13.10)$$

$$\text{Die Reglerparameter sind damit } T_I = 3 \quad \text{und} \quad k_p = \frac{1}{3k_s}. \quad (13.11)$$

$$\text{Der gesuchte dritte Pol liegt in der linken Halbebene und ist } s_3 = -\frac{1}{6}. \quad (13.12)$$

c) Ortskurve und Bedingung für k_0 :

Einsetzen von $T_I = 3$ in Gleichung (13.1) ergibt für die Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$G_0(s) = \frac{k_0(1+3s)}{3s(1+2s)(1+3s)} = \frac{k_0}{3s(1+2s)}. \quad (13.13)$$

Ortskurve:

Frequenzgang:

$$G_0(j\omega) = \frac{k_0}{3\omega j(1+2\omega j)} = -\frac{2k_0}{12\omega^2+3} - j\frac{k_0}{12\omega^3+3\omega} \quad (13.14)$$

Grenzwerte:

$$\text{Re}\{G_0(0)\} = -\frac{2k_0}{3} \quad \text{Im}\{G_0(0)\} = -\infty \quad (13.15)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Re}\{G_0(j\omega)\} = 0_- \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}\{G_0(j\omega)\} = 0_- \quad (13.16)$$

Abbildung 19 zeigt das resultierende Nyquist-Diagramm. Der offene Regelkreis (13.13)

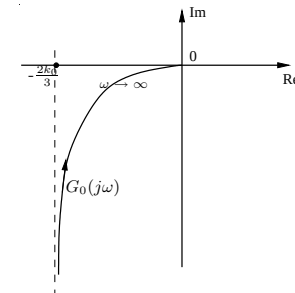


Abbildung 19:

besitzt einen Pol auf der imaginären Achse und keine Pole in der rechten Halbebene. Die Phasendrehung des Nyquist-Diagramms relativ zum Referenzpunkt $(-1, 0)$ muß folglich $\frac{\pi}{2}$ betragen. Für $k_0 > 0$ ist diese Bedingung immer erfüllt und der geschlossene Regelkreis damit immer stabil.

d) Die Übertragungsfunktion des veränderten offenen Regelkreises ist

$$G_0^*(s) = G_0(s) + k^*. \quad (13.17)$$

Der Frequenzgang damit

$$G_0^*(j\omega) = G_0(j\omega) + k^* = (\operatorname{Re}\{G_0(j\omega)\} + k^*) + j\operatorname{Im}\{G_0(j\omega)\}. \quad (13.18)$$

Man sieht, daß das Nyquist-Diagramm unter dem Einfluß von k^* parallel zur reellen Achse verschoben wird, und zwar um genau k^* Einheiten. Für Stabilität muß der "verschobene Ursprung" immer rechts des Referenzpunktes $(-1, 0)$ liegen. Daraus ergibt sich sofort die Stabilitätsbedingung

$$\boxed{k^* > -1} \quad (13.19)$$

für den neuen Regelkreis.

e) Amplitudenreserve:

Für große Frequenzen ω nähert sich die Nyquist-Kurve dem Ursprung ($\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0$; siehe Abbildung 19). Es existieren keine Schnittpunkte mit den Achsen. Daraus ergibt sich die Amplitudenreserve zu $a_r = \infty$.

Phasenreserve:

Aus Abbildung 19 ist ersichtlich, daß die Nyquist-Kurve nur ein einziges mal den Einheitskreis um den Ursprung schneidet. Zu bestimmen ist der zu diesem Schnittpunkt gehörige Phasenwinkel. Daraus ergibt sich dann sofort die Phasenreserve. Zuerst bestimmt man diejenige Frequenz ω_1 , bei welcher die Amplitude von $G_0(j\omega)$ genau eins beträgt:

$$|G_0(j\omega_1)| = \left| \frac{3/32}{j\omega_1(j2\omega_1 + 1)} \right| = \frac{3/32}{|j2\omega_1 + 1||j\omega_1|} = \frac{3/32}{\omega_1 \sqrt{4\omega_1^2 + 1}} \stackrel{!}{=} 1 \quad (13.20)$$

$$4\omega_1^4 + \omega_1^2 - (3/32)^2 = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16(3/32)^2}}{8} \approx 0.0085 \quad (13.21)$$

$$\text{(nur } \omega_1^2 > 0 \text{ macht Sinn)} \quad (13.22)$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.0922. \quad (13.23)$$

Damit läßt sich der Phasenwinkel des offenen Regelkreises für ω_1 leicht ausrechnen. Es ergibt sich:

$$\operatorname{arc}\{G_0(j\omega_1)\} = -\operatorname{arc}\{j\omega_1\} - \operatorname{arc}\{j2\omega_1 + 1\} \quad (13.24)$$

$$= -\pi/2 - \arctan 2\omega_1 \approx -1.7531 \text{ rad}. \quad (13.25)$$

$$\boxed{\text{Phasenreserve : } \gamma_r = \operatorname{arc}\{G_0(j\omega_1)\} + \pi \approx 1.3884 \text{ rad} \approx 79.55^\circ.} \quad (13.26)$$

f) Einsetzen von $k_0 = \frac{3}{32}$ in Gleichung (13.13) ergibt für die Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$G_0(s) = \frac{3/32}{3s(1 + 2s)}. \quad (13.27)$$

Die Übertragungsfunktion von Führungsgröße $W(s)$ auf Ausgangsgröße $Y(s)$ entspricht der komplementären Sensitivität $T(s)$ und läßt sich durch

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = T(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{3}{64s^2 + 32s + 3} \quad (13.28)$$

ausdrücken. Mit $W(s) = \frac{1}{s}$ und Partialbruchzerlegung folgt

$$Y(s) = T(s)W(s) = \frac{3}{s(8s + 3)(8s + 1)} \quad (13.29)$$

$$= \frac{3/64}{s(s + \frac{3}{8})(s + \frac{1}{8})} \quad (13.30)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1.5}{s + \frac{1}{8}} + \frac{0.5}{s + \frac{3}{8}}. \quad (13.31)$$

Laplace-Rücktransformation von (13.31) ergibt dann

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 1 - 1.5e^{-0.125t} + 0.5e^{-0.375t}} \quad (13.32)$$

g) Der Zusammenhang zwischen Rauschen $\eta(s)$ und Ausgang $Y(s)$ ergibt sich über die komplementäre Sensitivität T zu

$$Y(s) = -T(s)\eta(s). \quad (13.33)$$

Mit Gleichung (13.28) der ist Amplitudengang der komplementären Sensitivität

$$|T(j\omega)| = \frac{3}{|j8\omega + 3||j8\omega + 1|} = \frac{3}{\sqrt{64\omega^2 + 9} \sqrt{64\omega^2 + 1}}. \quad (13.34)$$

Für $\omega = 10$ rad/s ergibt sich sofort

$$|T(j10)| = 4.68 \times 10^{-4} < 0.01. \quad (13.35)$$

Der geschlossene Regelkreis weist also die geforderte Rauschunterdrückung für $\omega \geq 10$ rad/s auf.

Aufgabe 14 (Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols)

Abbildung 20 zeigt die Sprungantworten von unterschiedlichen Systemen. Im Folgenden sollen basierend auf den Einstellregeln von Ziegler-Nichols bzw. Åström/Hägglund Regler für diese Systeme entworfen werden.

- Abbildung 20(a) zeigt die Sprungantwort eines Systems. Würden Sie für dieses System Reglerparameter mit Hilfe der Sprungmethode von Ziegler/Nichols bestimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Abbildung 20(b) zeigt die Sprungantwort eines zweiten Systems. Bestimmen Sie mit Hilfe der Sprungmethode von Ziegler/Nichols einen geeigneten PID-Regler.
- Abbildung 20(c) zeigt die Sprungantworten eines geschlossenen Regelkreises mit drei verschiedenen P-Reglern. Bestimmen Sie einen geeigneten PI-Regler unter Verwendung der Schwungmethode von Ziegler-Nichols.
- Abbildung 20(d) zeigt die Sprungantwort eines geschlossenen Regelkreises. Der verwendete Regler ist ein Zweipunktglied mit Verstärkung $d = 1$. Entwerfen Sie mit Hilfe der Methode von Åström/Hägglund einen PID-Regler.

Lösung

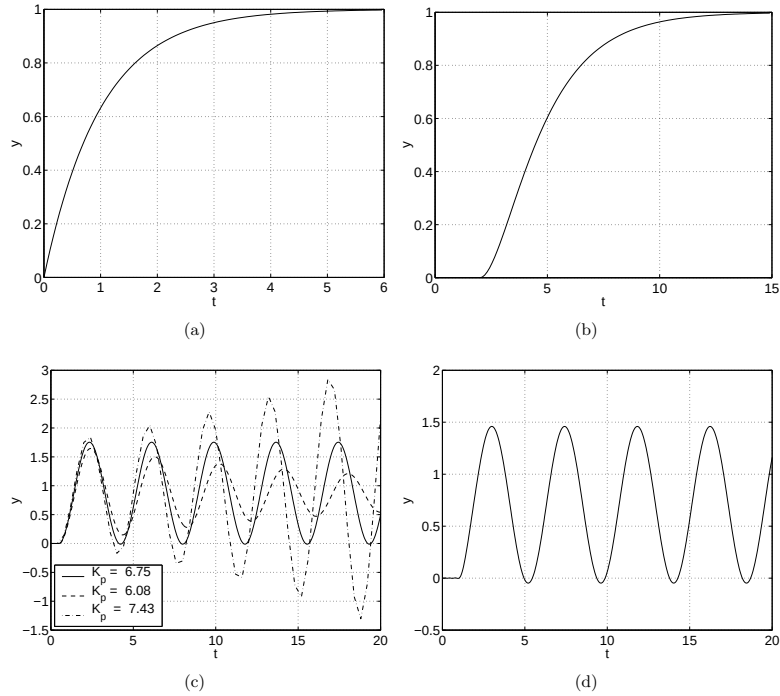


Abbildung 20: Sprungantworten verschiedener Beispielsysteme.

a) Eine Reglerauslegung nach Ziegler/Nichols empfiehlt sich für dieses System nicht, da es zwar PT_1 -Verhalten aber keinerlei Totzeit aufweist. Dies ist jedoch die Klasse von Systemen für die die Einstellregeln von Ziegler/Nichols ausgelegt wurden.

b) Aus Abbildung 21(b) liest man ab

$$L \approx 2.3 \quad \tau \approx 4.2 \quad K_s \approx 1. \quad (14.1)$$

Der PID-Regler ist gegeben durch

$$K(s) = K \left(1 + T_D s + \frac{1}{T_I s} \right). \quad (14.2)$$

Die Parameter ergeben sich nach Ziegler/Nichols zu

$$K = \frac{1.2}{LR} = \frac{1.2\tau}{LK_s} \approx 2.2 \quad T_D = 0.5L \approx 1.2 \quad T_I = 2L \approx 4.6. \quad (14.3)$$

c) Entscheidend für die Bestimmung der Reglerparameter nach der Schwingmethode von Ziegler/Nichols ist die Kenntnis des kritischen Verstärkungsfaktors K_{rk} und der Periodendauer T_k der sich einstellenden Dauerschwingung. Aus Abbildung 21(c) der Aufgabenstellung liest man leicht $K_{rk} \approx 6.75$ für den kritischen Verstärkungsfaktor ab (Werte darüber

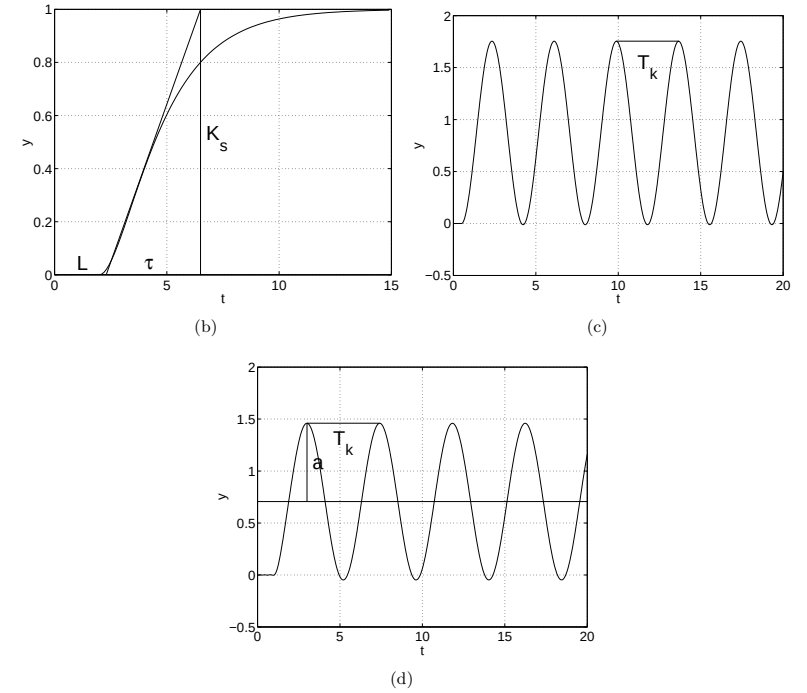


Abbildung 21: Sprungantworten

führen zu aufklingenden Schwingungen, Werte darunter zu abklingenden Schwingungen). Die Periodendauer ist $T_k \approx 3.8$. Die Parameter des PI-Reglers

$$K(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (14.4)$$

berechnen sich damit zu

$$K = 0.45K_{rk} \approx 3.0 \quad T_I = 0.85T_k \approx 3.2. \quad (14.5)$$

d) Aus Abbildung 21(d) liest man ab

$$a \approx 0.75 \quad T_k \approx 4.4. \quad (14.6)$$

Damit ergibt sich

$$K_{rk} = \frac{4d}{\pi a} \approx 1.7. \quad (14.7)$$

Die Reglerparameter des PID-Reglers lassen sich mit Hilfe der Einstellregeln nach Ziegler/Nichols berechnen:

$$K = 0.6K_{rk} \approx 1 \quad T_D = 0.12T_k \approx 0.5 \quad T_I = 0.5T_k \approx 2.2. \quad (14.8)$$

Aufgabe 15 (Reglerentwurf mittels Loopshaping)

Im Folgenden wird von der Standardkonfiguration (Abbildung 12) eines Regelkreises ausgegangen: Gegeben ist das in Abbildung ?? dargestellte Bodediagramm einer linearen Regelstrecke

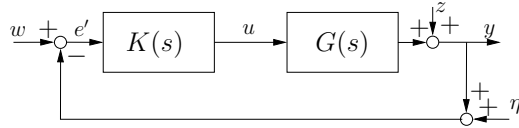


Abbildung 22: Standardregelkreis.

$G(s)$.

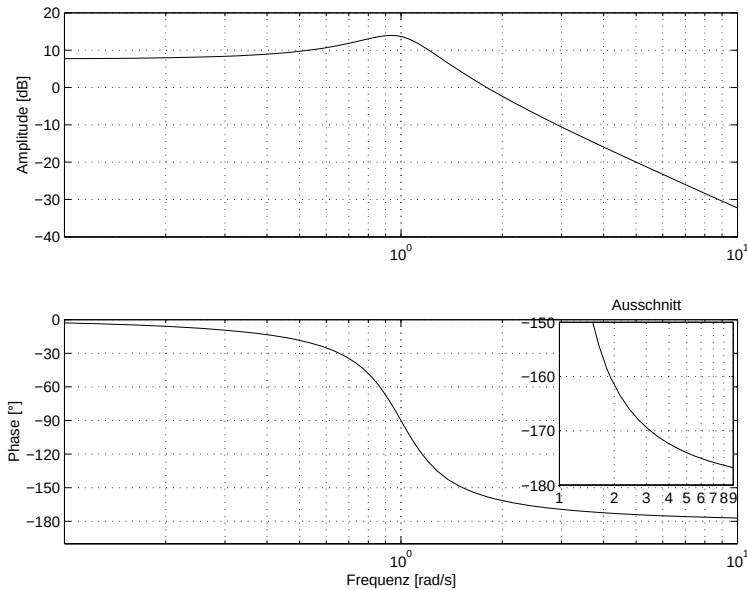


Abbildung 23: Bodediagramm der Regelstrecke.

- Ist die Regelstrecke stabil? Geben Sie eine kurze Begründung an.
- Um welchen Streckentyp handelt es sich?
- Entwerfen Sie einen Regler $K(s) = K_1(s)$, so dass der geschlossene Kreis
 - keine bleibende Regelabweichung (d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$) bei sprunghaften Störungen aufweist.

– eine Bandbreite von $\omega_B \approx 5 \text{ rad/s}$ besitzt.

- Der Regler soll durch ein Lead-Element $K_2(s) = v \frac{s+w}{s+vw}$ mit $v, w > 0$ zu $K(s) = K_1(s)K_2(s)$ erweitert werden, um die Phasenreserve zu erhöhen. Bestimmen Sie die Parameter v und w mit Hilfe der Bodediagramme in Abbildungen 24-26 so, dass die Phasenreserve des neuen Systems $G_1(s) = G(s)K_1(s)K_2(s)$ mindestens 50° beträgt.
- Welche Eigenschaft des geschlossenen Kreises wird durch hinzufügen von $K_2(s)$ ungewollt beeinflusst und muss durch eine Änderung in $K_1(s)$ korrigiert werden?

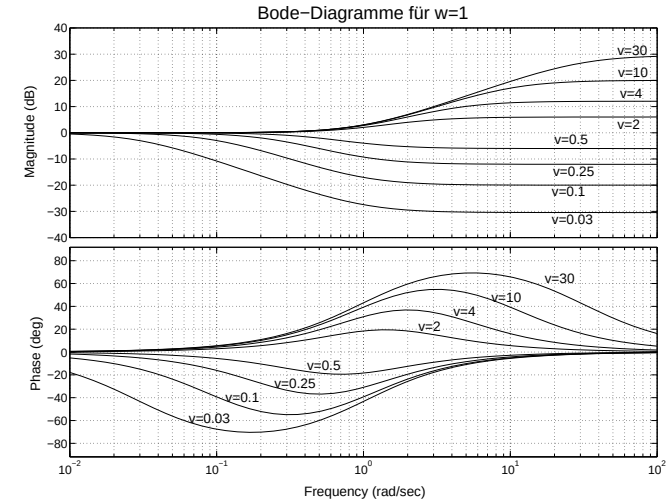


Abbildung 24: Bodediagramm von $K_2(s)$ für $w = 1$ und verschiedene Werte von v .

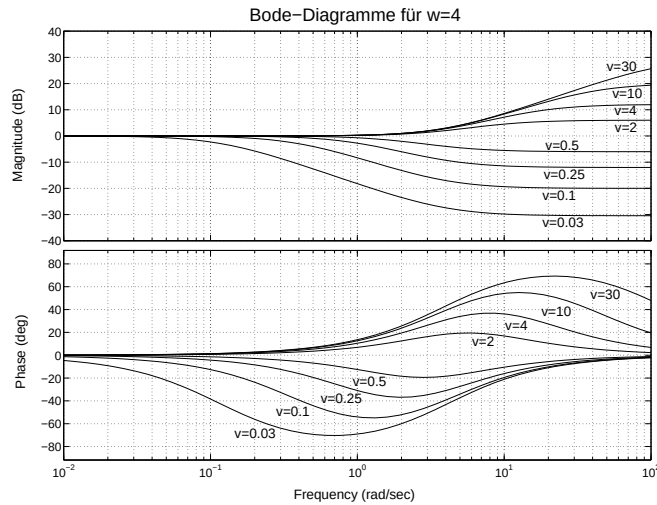


Abbildung 25: Bodediagramm von $K_2(s)$ für $w = 4$ und verschiedene Werte von v .

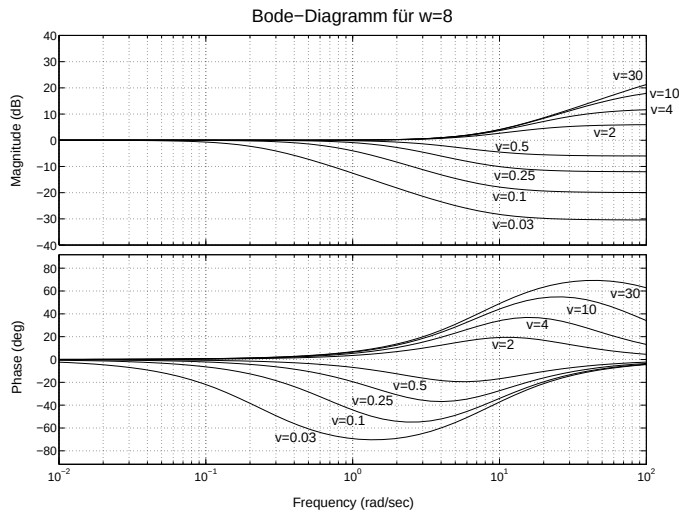


Abbildung 26: Bodediagramm von $K_2(s)$ für $w = 8$ und verschiedene Werte von v .

Lösung

- Die Regelstrecke ist stabil, da die Phase und die Amplitude gleichzeitig abnehmen. Dies ist nur für Pole in der linken Halbebene möglich. Ein Pol in der rechten Halbebene hätte abnehmende Amplitude und zunehmende Phase.
- Regelstreckentyp: PT_2 -Übertragungsglied, da
 - der Amplitudengang eine Resonanzüberhöhung hat.
 - die Steigung des Amplitudengangs -40dB/Dekade beträgt.
 - die Phase für große Frequenzen -180° beträgt.
- Reglerentwurf mittels Loopshaping. Mögliche Regler aus Vorlesung:
 - P -Regler
 - PI -Regler
 - PI -Regler mit Lead-Element

Anforderungen an den Kreis:

- Stabilität
- Keine bleibende Regelabweichung bei sprunghöhen Störungen
- Bandbreite $\omega_B \approx 5\text{rad/s}$

Anforderungen mit einem P -Regler nicht erfüllbar, wegen bleibender Regelabweichung bei sprunghöhen Störungen

$$\rightarrow PI\text{-Regler } K_1(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

Wahl der Parameter k_p und T_I nach den Regeln aus der Vorlesung:

- Parameter K_p : Wahl, so dass gewünschte Durchtrittsfrequenz erreicht wird. Man geht von der Faustformel aus, dass die Durchtrittsfrequenz ungefähr gleich der Bandbreite ist: $\omega_D \approx \omega_B$.
- Parameter T_I : Legt Eckfrequenz des PI -Reglers fest. Legt man die Eckfrequenz genügend weit unterhalb (z.B. Faktor 10) der Durchtrittsfrequenz fest, so wird die Regelgüte verbessert, ohne die Stabilitätsreserve nachteilig zu beeinflussen. Liegt die Eckfrequenz des PI -Reglers näher an der Durchtrittsfrequenz, muss die zusätzliche Phase beim Auslegen des Lead-Elements berücksichtigt werden.

$\rightarrow$ Mögliche Parameter:

- $k_p = 20\text{dB} = 10$ (aus Abbildung 2 Aufgabe 3 bei $\omega_D \approx 5\text{rad/s}$ ablesbar)
- $T_I = 2$ (Eckfrequenz $\frac{1}{T_I} \approx \frac{\omega_D}{10}$)

- Wahl des Lead-Elements:

- Aus dem Bodediagramm der Strecke lässt sich ablesen $\arg G(j\omega_{B,soll}) \approx -174^\circ$ bei $\omega_{B,soll} = 5 \text{ rad/s}$. Geht man davon aus, dass der PI-Regler die Phase nur unwesentlich beeinflusst, so hat der aus Strecke und PI-Regler bestehende offene Kreis bereits eine Phasenreserve von $\phi_R = \arg(G_0(j\omega_D)) - (-180^\circ) = 6^\circ$. Die gewünschte Phasenreserve beträgt $\phi_{R,soll} = 50^\circ$. Daraus ergibt sich die Forderung, dass die Phase durch das Lead-Element um wenigstens $\phi_{R,soll} - \phi_R = 44^\circ$ weiter angehoben werden muss. Die Parameter v und w müssen aus den Abbildungen also so bestimmt werden, dass die Phase des Lead-Elements bei $\omega = 5 \text{ rad/s}$ mindestens 44° beträgt.
 - Mögliche Parameter: $w = 1, v = 30$ oder $w = 4, v = 30$, ... (siehe Abbildung 3)
- e) Die Verstärkung wird durch das Lead-Element beeinflusst. Die Änderung kann aus dem Bodediagramm abgelesen werden. Beispiel: Für $w = 1, v = 30$ liest man aus Abbildung ab: Verstärkung von 13 dB bei $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Um diese ungewollte Änderung der Verstärkung zu verhindern, muss $K_1(s)$ um einen zusätzlichen Proportionalteil mit dem Kehrwert der Verstärkungsänderung ergänzt werden.

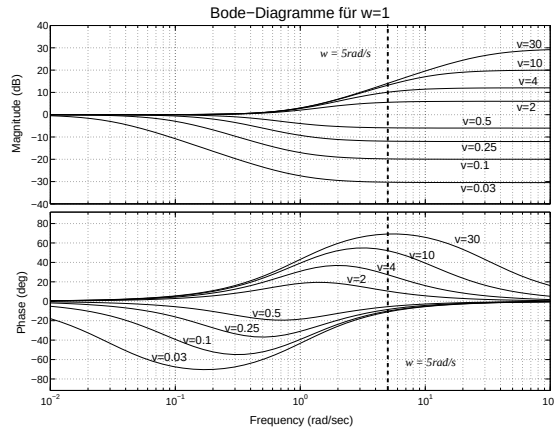


Abbildung 27: Bodediagramm für $w = 1$.

Aufgabe 16 (Reglerentwurf mittels Loopshaping)

Für die Regelstrecke

$$G(s) = 7 \frac{7.5 - s}{(1 + 10s)(1 + s)(10 + s)} \quad (16.a)$$

soll ein Regler nach dem loop-shaping Verfahren entworfen werden. Ziel der Regelung ist es die Durchtrittsfrequenz ω_D des Regelkreises auf $\omega_D = 1 \text{ [rad/s]}$ zu erhöhen, und dabei eine Phasenreserve von $\gamma_r = 45^\circ$ und eine Amplitudenreserve von $a_r \geq 3$ zu garantieren. Die Systemantwort des geschlossenen Kreises auf einen Sollwertsprung soll keine bleibende Regelabweichung aufweisen.

- a) Welche Eigenschaft muss der Regler auf jeden Fall aufweisen, damit die Systemantwort des geschlossenen Regelkreises auf einen Sollwertsprung keine bleibende Regelabweichung

aufweist? Wie äußert sich diese Eigenschaft im Bode-Diagramm des offenen Kreises? Wie in der Sensitivität des geschlossenen Kreises?

Im Folgenden soll der Regler durch die Reihenschaltung eines PI-Reglers und eines lead-Elementes realisiert werden. Also:

$$K(s) = K_{pi}(s) \cdot K_{lead}(s) \quad (16.b)$$

mit

$$K_{pi}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \quad \text{und} \quad (16.c)$$

$$K_{lead}(s) = v \frac{s + w}{s + vw} \quad \text{mit} \quad v > 1. \quad (16.d)$$

Die Zeitkonstante T_I des PI-Reglers wird zu $T_I = 10$ festgelegt. Die Phase des PI-Reglers als Funktion der Frequenz ω beträgt

$$\phi_{pi} = -\arctan\left(\frac{1}{T_I \omega}\right). \quad (16.e)$$

- b) Abbildung 28 zeigt drei verschiedene lead-Elemente. Welches lead-Element würden Sie auswählen um die Phasenreserve $\gamma_r = 45^\circ$ zu garantieren? Begründen Sie Ihre Antwort und berücksichtigen Sie sowohl Gleichung (16.e) als auch Abbildung 29. (Hinweis: $\text{atan}(-0.1) \approx -5.71^\circ$.)

Im folgenden wird das lead-Element 1 aus Abbildung 28 verwendet.

- c) Abbildung 30 zeigt das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises mit PI-Glied ($K_p = 1, T_I = 10$) und lead-Element. Bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor K_p so, dass die gewünschte Durchtrittsfrequenz ω_D erreicht wird.
- d) Abbildung 31 zeigt das Bode-Diagramm des entworfenen offenen Regelkreises. Bestimmen Sie die Phasen- und die Amplitudenreserve. Werden die Spezifikationen eingehalten?
- e) Abbildung 32 zeigt das Bode-Diagramm der Sensitivität S und der komplementären Sensitivität T des entworfenen Regelkreises. Beurteilen Sie qualitativ den Verlauf von S und T . Anhand welcher Eigenschaften bewerten Sie die Güte des entworfenen Regelkreises?
- f) Folgende Eigenschaften seien bekannt:

Die maximale positive Phase ϕ^* des lead-Elementes stellt sich bei der Frequenz ω^* ein, mit

$$\omega^* = w\sqrt{v} \quad (16.f)$$

und beträgt

$$\tan \phi^* = \frac{v - 1}{2\sqrt{v}}. \quad (16.g)$$

Bei gegebenem ϕ^* muss mit (16.g) gelten:

$$v = (1 + 2 \tan^2 \phi^*) + \sqrt{(1 + 2 \tan^2 \phi^*)^2 - 1}. \quad (16.h)$$

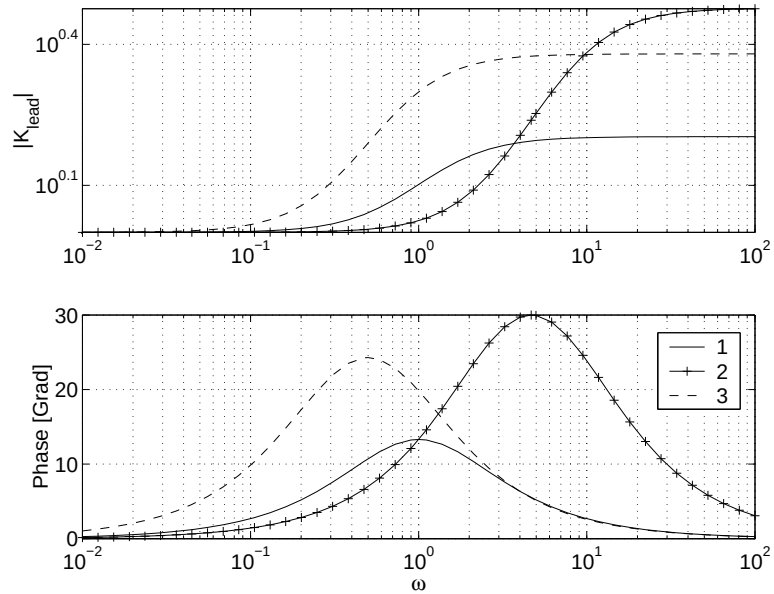


Abbildung 28: Bode-Diagramme verschiedener lead-Elemente.

Berechnen Sie die Parameter w , v des lead-Elementes so, dass sich für $\omega_D = 1$ [rad/s] genau $\gamma_r = 45^\circ$ Phasenreserve ergibt und das lead-Element dort seine maximale Phase aufweist. Hinweis: Berücksichtigen Sie zur Lösung dieser Teilaufgabe den Einfluss der Phase des PI-Regler Anteils und verwenden Sie das Bode-Diagramm der Regelstrecke $G(s)$ aus Abbildung 29.

- g) Leiten Sie die Beziehungen (16.f), (16.g) und (16.h) des lead-Elementes, sowie die Phasendrehung (16.e) des PI-Reglers her.

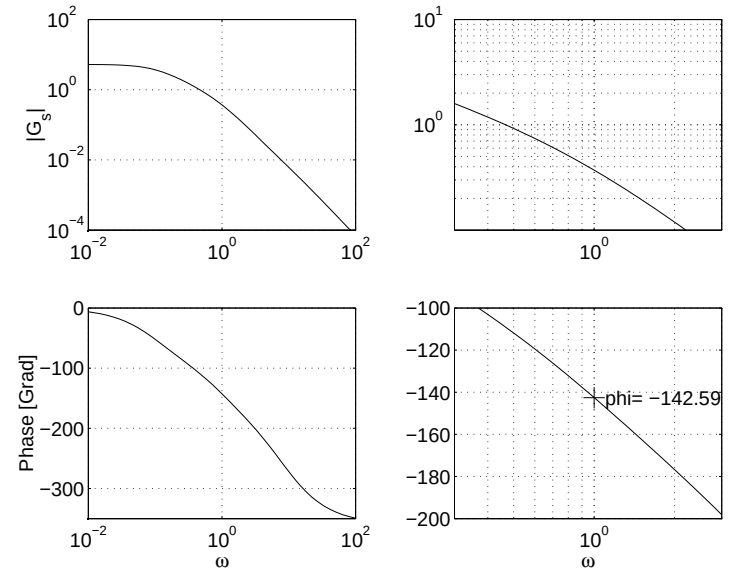


Abbildung 29: Bode-Diagramm der Regelstrecke $G(s)$ und Detailansicht um $w = 1$ [rad/s].

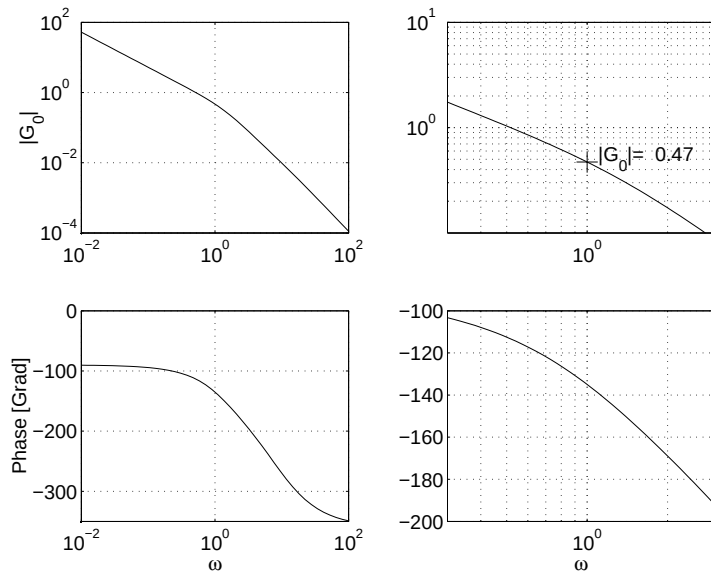


Abbildung 30: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises mit PI-Glied ($K_p = 1$) und lead-Element.

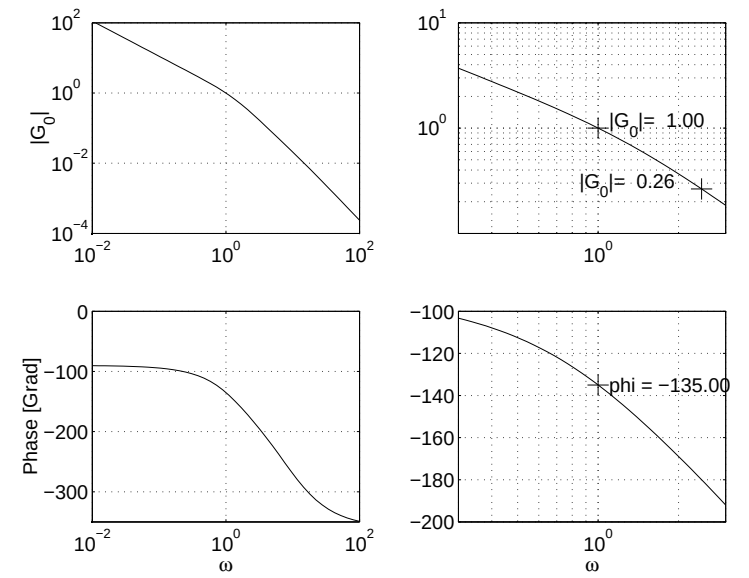


Abbildung 31: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises, mit vollständig entworfenem Regler.

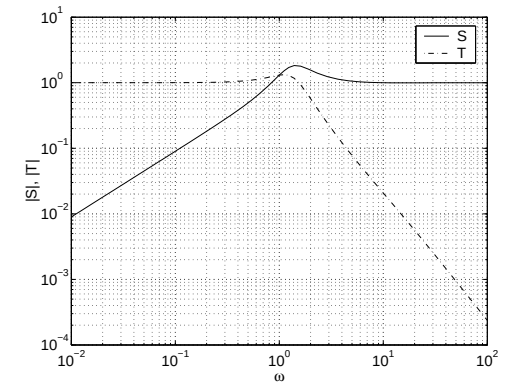


Abbildung 32: Verläufe der Sensitivität S und der komplementären Sensitivität T .

Lösung

- a) Da die Regelstrecke keinen I-Anteil enthält muss der Regler einen I-Anteil enthalten, damit es zu keiner bleibenden Regelabweichung auf einen Eingangssprung kommt. Im Bode-Diagramm des offenen Kreises äussert sich der Integratoranteil durch einen Abfall von 20 dB/Dekade für kleine Frequenzen ($|G(j\omega)| \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow 0$). Die Sensitivität strebt gegen 0 für kleine Frequenzen ($\lim_{\omega \rightarrow 0} |S(j\omega)| = 0$).
- b) Gesucht ist eine Phasenreserve von $\gamma_r = 45^\circ$ bei der Durchtrittsfrequenz $\omega_D = 1$ [rad/s]. Aus dem Bode-Diagramm der Regelstrecke liest man $\phi_D = -142.59^\circ$ bei $\omega_D = 1$ [rad/s] ab. Die Einführung des I-Anteils wird die Phase an dieser Stelle weiter absenken, und zwar um folgenden Betrag:

$$\tan \phi_{pi} = -\frac{1}{T_I \omega} = -0.1 \quad \Rightarrow \quad \phi_{pi} \approx -5.71^\circ. \quad (16.1)$$

Es gilt

$$\phi_D + \phi_{pi} + \phi^* = -180^\circ + \gamma_r \quad (16.2)$$

und damit

$$\phi^* = -180^\circ + \gamma_r - \phi_{pi} - \phi_D = -180^\circ + 45^\circ + 5.71^\circ + 142.59^\circ = 13.3^\circ. \quad (16.3)$$

Das gesuchte lead-Element muss also eine Phase von $\phi = 13.3^\circ$ bei $\omega_D = 1$ [rad/s] aufweisen. Alle dargestellten Lead-Elemente erfüllen diese Forderung. Lead-Element 3 verursacht an dieser Kreisfrequenz jedoch eine erhebliche Verstärkung, die eine *Anhebung der Durchtrittsfrequenz* bewirkt. Wegen der bereits fallenden Phase wird bei der *neuen* Durchtrittsfrequenz die nötige Phasenreserve jedoch nicht gegeben sein.

Sowohl lead-Element 2 als auch lead-Element 1 weisen die gewünschte Phase auf, bei vergleichsweise geringer Verstärkung. Lead-Element 1 weist die minimal mögliche Verstärkung für *grosse Frequenzen* auf. Das entspricht einer kleinen komplementären Sensitivität für hohe Frequenzen, also einer guten Unterdrückung von Messrauschen.

Lead-Element 2 zeigt hingegen eine kleinere Verstärkung *bei der gewünschten Durchtrittsfrequenz* ω_D und eine grössere Phasendrehung oberhalb dieser Frequenz. Die grössere Phase führt zu einer Vergrösserung der Amplitudenreserve – bei gleichzeitiger Verschlechterung der Rauschunterdrückung durch die grössere komplementären Sensitivität für grosse Frequenzen.

Die Wahl zwischen den Elementen 1 und 2 entscheidet sich also aufgrund der Frage, welches der Regelziele Amplitudenreserve und Rauschunterdrückung Priorität hat. In der Praxis erfolgt der Reglerentwurf üblicherweise iterativ mit Computerunterstützung.

- c) Den benötigten Verstärkungsfaktor K_p bestimmt man, indem man die Verstärkung des offenen Regelkreises bei der gewünschten Durchtrittsfrequenz $\omega_D = 1$ [rad/s] abliest. Dieser ergibt sich aus der Abbildung zu $|G_0|_{\omega_D} \approx 0.47$. Damit die Durchtrittsfrequenz tatsächlich durch den Regler zu ω_D verschoben wird, muss dort die Verstärkung genau 1 betragen. Damit ergibt sich

$$K_p = \frac{1}{|G_0|_{\omega_D}} \approx \frac{1}{0.47} \approx 2.13. \quad (16.4)$$

Der Phasenverlauf ändert sich **nicht** mit K_p .

- d) Aus der Abbildung kann man sofort die Phasenreserve ablesen. Diese beträgt exakt

$$\gamma_r = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ. \quad (16.5)$$

Dies ist nicht weiter verwunderlich, da der Regelkreis dementsprechend ausgelegt wurde. Die Amplitudenreserve liest man als Kehrwert der Amplitude des Bode-Diagramms für $\phi = -180^\circ$ ab:

$$a_r = \frac{1}{|G_0|_{\phi=-180^\circ}} \approx \frac{1}{0.26} \approx 3.85. \quad (16.6)$$

Die Spezifikationen werden also eingehalten.

- e) Die Sensitivität strebt für kleine Frequenzen gegen null (Es befindet sich also ein I-Anteil im Regelkreis.). Der Regelkreis wird für kleine Frequenzen gutes Führ- und Störverhalten aufweisen. Der steile Abfall der komplementären Sensitivität für Frequenzen oberhalb der Durchtrittsfrequenz lässt auf gute Unterdrückung von Meßrauschen schliessen. Amplitudenwerte der Sensitivität S und der komplementären Sensitivität T oberhalb von eins (im Frequenzbereich um $\omega = 10^0$ [rad/s]) sind nicht wünschenswert (**Störverstärkung**), lassen sich aber nicht immer vermeiden. Negativ wirkt sich in diesem Beispiel die Nullstelle (Allpassanteil) in der rechten Halbebene ($s_n = 7.5$) aus.
- f) Laut Aufgabenstellung soll sich die Phase ϕ^* des lead-Elementes bei $\omega_D = 1$ [rad/s] einstellen. Damit ergibt sich

$$w = \frac{1}{\sqrt{v}} \quad (16.7)$$

$$\tan \phi^* = \frac{v-1}{2\sqrt{v}} \quad (16.8)$$

und schliesslich (über die in der Aufgabenstellung angegebene Formel zur Berechnung von v bei gegebenem ϕ^*)

$$v = 1.60 \quad w = 0.79. \quad (16.9)$$

Das lead-Element ist damit vollständig spezifiziert.

- g) Gesucht ist zunächst die Frequenz ω bei der die Phase des lead-Elementes

$$K_{lead} = v \frac{s+w}{s+vw} \quad (16.10)$$

ihr Maximum erreicht. Der Frequenzgang von (16.10) ergibt sich zu

$$K_{lead}(j\omega) = v \frac{j\omega + w}{j\omega + vw} = \frac{v}{\omega^2 + v^2 w^2} (\omega^2 + vw^2 + j\omega w(v-1)). \quad (16.11)$$

Den zugehörigen Phasenwinkel erhält man damit über

$$\tan \phi = \frac{\omega w(v-1)}{\omega^2 + vw^2}. \quad (16.12)$$

Der maximale Winkel ϕ^* stellt sich ein für

$$\frac{d \tan \phi}{d\omega} = \frac{w(v-1)(\omega^2 + vw^2) - \omega w(v-1)2\omega}{(\omega^2 + vw^2)^2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (16.13)$$

Aus (16.13) resultiert

$$\omega = w\sqrt{v} \quad (16.14)$$

und damit

$$\tan \phi^* = \frac{v-1}{2\sqrt{v}}. \quad (16.15)$$

Gleichung (16.15) formt man auf die quadratische Gleichung

$$v^2 - 2v(1 + 2 \tan^2 \phi^*) + 1 = 0 \quad (16.16)$$

um. Lösung von (16.16) nach v ergibt

$$v_{1,2} = (1 + 2 \tan^2 \phi^*) \pm \sqrt{(1 + 2 \tan^2 \phi^*)^2 - 1}. \quad (16.17)$$

Nur die "positive" Lösung macht Sinn, da es ansonsten zu negativen Phasenwinkeln für positive Verstärkungsfaktoren v kommen könnte. Damit ist die Gesamtlösung

$$v = (1 + 2 \tan^2 \phi^*) + \sqrt{(1 + 2 \tan^2 \phi^*)^2 - 1}. \quad (16.18)$$

Der Phasenwinkel ϕ_i des PI-Reglers berechnet sich leicht über dessen Frequenzgang

$$K_{pi}(j\omega) = K_p(1 + \frac{1}{T_I j\omega}) = K_p(1 - j \frac{1}{T_I \omega}) \quad (16.19)$$

zu

$$\tan \phi_i = -\frac{1}{T_I \omega}. \quad (16.20)$$

Aufgabe 17 (Robustheit)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s)K(s) = k_1 \frac{s+1}{(s+a)(s+b)}$$

des offenen Kreises eines Standardregelkreises, wobei $a, b < 0$ und $k_1 > 0$. Abb. 22 zeigt die zugehörige Ortskurve für $k_1 = 1$.

- Ist der geschlossene Kreis mit $k_1 = 1$ stabil? Geben Sie eine Begründung an.
- In welchem Bereich kann man k_1 variieren, so dass der geschlossene Kreis stabil ist?
- Geben Sie die Amplitudenreserve des geschlossenen Kreises an.

Lösung

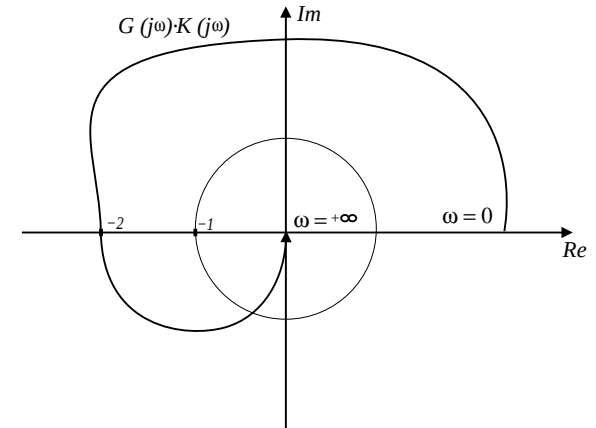


Abbildung 33: Ortskurve von $G(s)K(s)$ für $k_1 = 1$.

- Wegen $a, b < 0$ sind beide Pole des offenen Kreises instabil. Da $m_0 = 2$ und $a_0 = 0$, ist die Bedingung für Stabilität nach dem Nyquistkriterium eine Phasendrehung von $\Delta\varphi = 360^\circ$ um den kritischen Punkt $(-1, j0)$. Dies ist nach Abbildung 1 Aufgabe 2c) erfüllt, d.h. der geschlossene Kreis ist stabil.
- Eine Erhöhung oder Verkleinerung der Regelverstärkung k_1 bewirkt eine Streckung der Ortskurve des offenen Kreises $G(s)K(s)$. Abbildung 2 zeigt die Ortskurve des offenen Kreises für $k_1 = 0.5, 1, 1.5$. Aus Abbildung 12 ist zu erkennen, dass die Ortskurve des offenen Kreises nicht durch den Punkt $(-1, j0)$ geht, wenn die Regelverstärkung k_1 im Bereich $\frac{1}{2} < k_1 < \infty$ variiert.

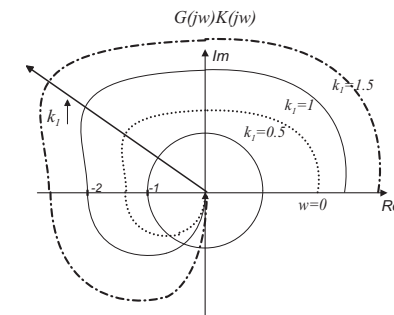


Abbildung 34: Ortskurve für $k_1 = 0.5, 1, 1.5$.

- Die Amplitudenreserve des Kreises für $k_1 = 1$ ist: $a_r = 0.5$

Aufgabe 18 (Zustandsrückführung)

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}_0 = 0$$

$$\mathbf{y} = [0 \ 1 \ 1] \mathbf{x}$$

Berechnen Sie einen Zustandsregler $u = \mathbf{k}^T \mathbf{x} + r$, so daß gilt:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+s+1)} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

Lösung

Das System kann durch einfaches Umsortieren der Zustände ($z_1 = x_3$, $z_2 = x_2$ und $z_3 = x_1$) in Regelungsnormform geschrieben werden. Mit der Zustandsrückführung $u = [k_1 \ k_2 \ k_3] \mathbf{x} + r = [k_3 \ k_2 \ k_1] \mathbf{z} + r$ lautet die Zustandsraumdarstellung des geschlossenen Kreises in $\mathbf{z}$ -Koordinaten

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2+k_3 & 1+k_2 & -2+k_1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\mathbf{y} = [1 \ 1 \ 0] \mathbf{z}.$$

Da das System in Regelungsnormform vorliegt, kann die Übertragungsfunktion direkt bestimmt werden

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 - (k_1-2)s^2 - (k_2+1)s - k_3 - 2}.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$\mathbf{k}^T = [-1 \ -4 \ -4].$$

Aufgabe 19 (Zustandsrückführung, Beobachter)

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [1 \ 2] \mathbf{x}$$

Entwerfen Sie für das System eine Zustandsrückführung und einen Beobachter.

- Ist das System stabil?
- Zeigen Sie, dass das System steuerbar ist.
- Entwerfen Sie für das System eine Zustandsrückführung, so dass die Pole des geschlossenen Kreises bei -5 und -6 liegen.

- Zeigen Sie, dass das System beobachtbar ist.
- Berechnen Sie die Pole der Fehlerdynamik, wenn der Beobachter

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \begin{bmatrix} -18 \\ 30 \end{bmatrix} (y - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}})$$

verwendet wird, wobei A , $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}^T$ die Zustandsraumdarstellung des Systems beschreiben.

- Wo liegen die Pole des geschlossenen Kreises, der aus Regelstrecke, Beobachter und Polvorgaberegung besteht?

Lösung

- Die Dynamikmatrix des Systems hat eine untere Dreiecksform, die Eigenwerte des Systems können daher direkt von der Diagonalen abgelesen werden und lauten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 10$. Beide Eigenwerte haben positiven Realteil, d.h. das System ist *instabil*.
- Steuerbarkeitsmatrix des linearisierten Systems:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 0 & -30 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \det(P) = -180 \neq 0 \rightarrow$ Linearisiertes System ist steuerbar

- Bestimmung der Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ (direkte Methode):

Mit der Reglermatrix $\mathbf{k}^T = [k_1 \ k_2]$ ergibt sich die Zustandstaumdarstellung des geschlossenen Kreises zu

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3-6k_1 & -6k_2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Hieraus kann das charakteristische Polynom bestimmt werden:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 3 + 6k_1 & 6k_2 \\ 5 & \lambda - 10 \end{bmatrix} = \lambda^2 + (6k_1 - 13)\lambda + 30 - 60k_1 - 30k_2.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit dem Wunschpolynom $(\lambda + 5)(\lambda + 6) = \lambda^2 + 11\lambda + 30$ ergibt sich $k_1 = 4$ und $k_2 = -8$ und damit die Zustandsrückführung

$$\mathbf{k}^T = [4, -8].$$

- Beobachtbarkeitsmatrix des linearisierten Systems:

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \det(Q) = 34 \neq 0 \rightarrow$ Linearisiertes System ist beobachtbar

- Fehlerdynamik $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$ des linearisierten Systems mit $l^T = [-18, 30]$:

$$\dot{e} = (A - l\mathbf{c}^T) e = \begin{bmatrix} 21 & 36 \\ -35 & -50 \end{bmatrix} e$$

$\rightarrow$ Eigenwerte der Fehlerdynamik: $\lambda_3 = -14$, $\lambda_4 = -15$

- f) Separationsprinzip: Die Pole des geschlossenen Kreises sind die Vereinigungsmenge der Pole des Kreises mit Zustandsrückführung ($A - bk^T$) und den Polen des Beobachterfehlers ($A - lc^T$) → Pole des geschlossenen Kreises: $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = -14$, $\lambda_4 = -15$.

Aufgabe 20 (Zustandsrückführung, Beobachter)

In einem Nährmedium befinden sich ein Stamm von Bakterien und eine antibiotisch wirkende Substanz. Für die Bakterienmenge x_1 und die Menge des Antibiotikums x_2 gelten näherungsweise folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - bx_2(t) & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= -bx_2(t) + u(t) & x_2(0) &= x_{20}, \end{aligned} \quad (20.a)$$

mit den positiven reellen Konstanten a , b und der pro Zeiteinheit zugeführten Menge an Antibiotikum $u(t)$.

- a) Bringen Sie das Differentialgleichungssystem (20.a) auf die Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t). \quad (20.b)$$

- b) Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung und die Eigenwerte des Systems.
- c) Transformieren Sie das System auf Regelungsnormform. Können die Eigenwerte des geschlossenen Kreises durch eine Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T\mathbf{x}$ beliebig verschoben werden? (Begründen Sie Ihre Antwort)
- d) Berechnen Sie die Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T\mathbf{x}$ so, dass beide Pole des geschlossenen Kreises bei -1 liegen:
- 1) Über die Darstellung in Regelungsnormform.
 - 2) Unter Verwendung der Ackermann-Formel.
 - 3) Durch direktes Ausrechnen über den Ansatz (direkten Vergleich von Soll- und Ist-Polynom).

Im Folgenden sei $a = b = 1$.

- e) Nehmen Sie an, Sie können aus Kostengründen nur eine der beiden Zustandsgrößen messen. Also

$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (20.c)$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20.d)$$

Dennoch wollen Sie eine Polvorgabe-Regelung realisieren. Für welche Größe entscheiden Sie sich?

- f) Nehmen Sie an nur der Zustand x_1 werde gemessen. Entwerfen Sie einen Beobachter für das System (beide Pole des Beobachters bei -2).
- g) Welche Ordnung hat der aus Regelstrecke, Identitätsbeobachter und konstanter Rückführung der Zustandsschätzung

$$u = -\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}} \quad (20.e)$$

bestehende Regelkreis? Geben Sie die Pole des gesamten Regelkreises an.

Lösung

- a) Die gesuchte Darstellung des Systems ergibt sich sofort zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & -b \end{pmatrix}}_A \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_b u. \quad (20.1)$$

- b) Die charakteristische Gleichung des Systems (20.1) ergibt sich bekanntlicherweise aus

$$|sI - A| = 0. \quad (20.2)$$

Mit

$$\begin{vmatrix} a-s & -b \\ 0 & -b-s \end{vmatrix} = -(a-s)(b+s) \quad (20.3)$$

ergeben sich die Eigenwerte zu

$$s_1 = a \quad s_2 = -b. \quad (20.4)$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$s^2 + (b-a)s - ab = 0. \quad (20.5)$$

- c) Gesucht ist die Transformationsmatrix $T = [\mathbf{t}_{(1)} \quad \mathbf{t}_{(2)}]$ ($\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ welche das System (20.1) auf Regelungsnormform transformiert. Mit $a_0 = -ab$ und $a_1 = b - a$ folgt (siehe Vorlesung) für die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix

$$\mathbf{t}_{(2)} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20.6)$$

$$\mathbf{t}_{(1)} = A\mathbf{b} + a_1\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix}. \quad (20.7)$$

Die Transformationsmatrix ist damit

$$T = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \quad (20.8)$$

und deren Inverse

$$T^{-1} = -\frac{1}{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -b \end{pmatrix}. \quad (20.9)$$

Die transformierte Gleichung

$$\dot{\mathbf{z}} = T^{-1}AT\mathbf{z} + T^{-1}\mathbf{b}u \quad (20.10)$$

ist

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ab & a-b \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (20.11)$$

Das System ist steuerbar, da es sich in Regelungsnormform darstellen läßt. Damit können die Pole des geschlossenen Regelkreises durch eine Zustandsrückführung der Form $u = -\mathbf{k}^T\mathbf{x}$ beliebig verschoben werden. Alternativ kann man dies auch durch die in der Vorlesung gegebene Rangbedingung

$$\text{rg}(\mathbf{b} \quad A\mathbf{b}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -b \end{pmatrix} = 2 \quad \text{für } b \neq 0 \quad (20.12)$$

überprüfen.

d) Das Wunschpolynom des geschlossenen Kreises ist

$$(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1. \quad (20.13)$$

1) Berechnung über Regelungsnormform

Das Rückführgesetz in $\mathbf{z}$ -Koordinaten lautet $u = -\mathbf{k}_z^T \mathbf{z}$. Setzt man dieses in Gleichung (20.11) ein, so ergibt sich

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ab - r_{1*} & a - b - r_{2*} \end{pmatrix} \mathbf{z}. \quad (20.14)$$

Bekanntermassen kann man aus der letzten Zeile der Frobeniusmatrix direkt die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ablesen. Diese müssen mit den Koeffizienten des Wunschpolynoms übereinstimmen, damit (unter der Zustandsrückführung) die gewünschte Dynamik des geschlossenen Regelkreises erreicht wird. Koeffizientenvergleich führt auf

$$1 = -ab + r_{1*} \quad (20.15)$$

$$2 = b - a + r_{2*}. \quad (20.16)$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{k}_z = \begin{pmatrix} r_{1*} \\ r_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + 1 \\ 2 + a - b \end{pmatrix}. \quad (20.17)$$

Nun muss nur noch auf die ursprünglichen Koordinaten zurücktransformiert werden. Es gilt

$$u = -\mathbf{k}_z^T \mathbf{z} = -\underbrace{\mathbf{k}_z^T T^{-1}}_{\mathbf{k}^T} \mathbf{x}, \quad (20.18)$$

und damit

$$\mathbf{k}^T = \left(-\frac{1}{b}(a+1)^2 \quad 2 + a - b\right). \quad (20.19)$$

2) Berechnung über Ackermann-Formel

Anwendung der Ackermann Formel für dieses Beispiel führt direkt (unter Zuhilfenahme der Koeffizienten des Wunschpolynoms) auf

$$\mathbf{k}^T = (0 \quad 1) (\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab})^{-1} (A^2 + 2A + I). \quad (20.20)$$

Einsetzen und Ausmultiplizieren führt schliesslich auf

$$\mathbf{k}^T = \left(-\frac{1}{b}(a+1)^2 \quad 2 + a - b\right). \quad (20.21)$$

Wie nicht anders zu erwarten ist dieses Ergebnis identisch mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1).

3) Direkte Berechnung

Für die direkte Berechnung macht man den Ansatz

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & -b \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (r_1 r_2) \mathbf{x}. \quad (20.22)$$

Dies führt auf die Gleichung des geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -r_1 & -b - r_2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (20.23)$$

Die charakteristische Gleichung des Systems (20.23) ergibt sich zu

$$s^2 + s(-a + b + r_2) - ab - r_2 a - br_1 = 0. \quad (20.24)$$

Koeffizientenvergleich mit dem Wunschpolynom führt auf

$$2 = -a + b + r_2 \quad (20.25)$$

$$1 = -ab - r_2 a - br_1 \quad (20.26)$$

und damit wiederum auf die Lösung

$$\mathbf{k}^T = \left(-\frac{1}{b}(a+1)^2 \quad 2 + a - b\right). \quad (20.27)$$

e) Für eine Zustandsrückführung muss entweder der komplette Zustand gemessen werden, oder es muss möglich sein unter Verwendung der vorhandenen Messgrößen den kompletten Zustandsvektor mit Hilfe eines Beobachters zu rekonstruieren. D.h. das System muss beobachtbar sein. Eine genauere Behandlung der Begriffe Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit wird in der Vorlesung Regelungstechnik II erfolgen. Uns genügt hier zunächst die Tatsache (ohne Beweis), dass ein Beobachter für ein SISO System der Ordnung n entworfen werden kann, wenn

$$\text{rg } P^T = \text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \mathbf{c}^T A^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T A^{n-1} \end{pmatrix} = n. \quad (20.28)$$

Für unseren Fall bedeutet dies (mit $\mathbf{c}^T = (c_1 \quad c_2)$)

$$\text{rg } P^T = \text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & -(c_1 + c_2) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 2. \quad (20.29)$$

Für die Messung des ersten Zustandes (x_1 , $\mathbf{c}^T = (1 \quad 0)$) ergibt sich

$$\text{rg } P^T = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2. \quad (20.30)$$

Und für die Messung des zweiten Zustandes (x_2 , $\mathbf{c}^T = (0 \quad 1)$)

$$\text{rg } P^T = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1. \quad (20.31)$$

Aus der Messung von Zustand x_2 kann also x_1 nicht rekonstruiert werden. Aufbauend auf der Messung x_1 kann jedoch ein Beobachter entworfen werden, der den Zustand x_2 rekonstruiert. Daraus ergibt sich, dass für dieses System unbedingt der Zustand x_1 gemessen werden sollte. Die Systembeschreibung ist dann

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (20.32)$$

$$y = (1 \quad 0) \mathbf{x}. \quad (20.33)$$

f) Die Gleichungen des Beobachters lauten

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{e}}(y - \hat{y}) \quad (20.34)$$

$$\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}. \quad (20.35)$$

Mit den Systemgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (20.36)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (20.37)$$

und der Definition des Fehlers $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ ergibt sich für die Fehlerdynamik

$$\dot{\mathbf{e}} = \underbrace{\left(A - \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \mathbf{c}^T \right)}_{A_*} \mathbf{e}. \quad (20.38)$$

Der Beobachter (und damit die Fehlerdynamik) soll einen Doppelpol bei -2 besitzen. Damit sind e_1 und e_2 so zu wählen, dass beide Eigenwerte von

$$A_* = A - \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 1 - e_1 & -1 \\ -e_2 & -1 \end{pmatrix} \quad (20.39)$$

bei -2 liegen. Die charakteristische Gleichung von (20.39) ergibt sich zu

$$s^2 + e_1 s + e_1 - e_2 - 1 = 0. \quad (20.40)$$

Koeffizientenvergleich mit dem Wunschkpolynom

$$(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4 = 0 \quad (20.41)$$

führt auf

$$e_1 = 4 \quad e_2 = e_1 - 1 - 4 = -1. \quad (20.42)$$

Damit ist der Beobachter vollständig bestimmt.

g) Das System ist 2. Ordnung. Der Beobachter ebenfalls. Somit hat das Gesamtsystem Ordnung 4. Nach dem Separationsprinzip ergeben sich die Pole des Regelkreises mit Beobachter aus der Vereinigung der Pole des Regelkreises mit Zustandsrückführung ohne Beobachter ($A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$) und des Beobachterfehlers ($A - \mathbf{e}\mathbf{c}^T$). Das Gesamtsystem hat damit jeweils Doppelpole bei -1 und -2 .

Aufgabe 21 (Steuerbarkeit linearer Systeme)

Die linearisierten Bewegungsgleichungen (kleine Auslenkungen) für zwei gekoppelte Pendel (Abbildung 35) sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta}_1 &= -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu \\ ml^2 \ddot{\theta}_2 &= -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu. \end{aligned}$$

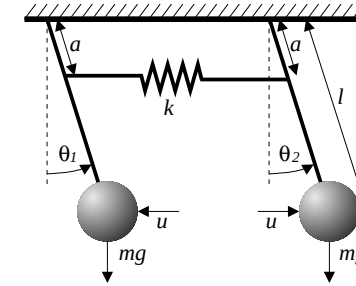


Abbildung 35: Zwei gekoppelte Pendel.

- Bestimmen Sie die dazugehörigen Zustandsgleichungen mit den Zustandsvariablen $x_1 = \theta_1, x_2 = \dot{\theta}_1, x_3 = \theta_2, x_4 = \dot{\theta}_2$.
- Ist das System steuerbar? Geben Sie sowohl eine mathematische als auch eine physikalische Begründung an.
- Durch welche Maßnahmen kann man das Ergebnis von Punkt (b) verändern?

Lösung

- Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{ka^2}{ml^2}(x_1 - x_3) - \frac{g}{l}x_1 - \frac{1}{ml}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{ka^2}{ml^2}(x_3 - x_1) - \frac{g}{l}x_3 + \frac{1}{ml}u \end{aligned}$$

- Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_s = [\mathbf{b} \ A\mathbf{b} \ A^2\mathbf{b} \ A^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{ml} & 0 & \frac{2ka^2}{m^2l^3} + \frac{g}{ml^2} \\ -\frac{1}{ml} & 0 & \frac{2ka^2}{m^2l^3} + \frac{g}{ml^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ml} & 0 & -\frac{2ka^2}{m^2l^3} - \frac{g}{ml^2} \\ \frac{1}{ml} & 0 & -\frac{2ka^2}{m^2l^3} - \frac{g}{ml^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$rg(\mathbf{Q}_s) = 2 \neq 4 \Rightarrow$ nicht steuerbar. Dies sieht man auch daran, daß es nicht möglich ist beide Pendel asymmetrisch auszulenken, d.h. bei symmetrischen Anfangsbedingungen können die Pendel nur symmetrisch zueinander bewegt werden.

- Durch "Brechen" der Symmetrie (verschiedene Massen m , verschiedene Längen l , verschiedene Kräfte u) wird das System steuerbar.

Aufgabe 22 (Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit linearer Systeme)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Konstruieren Sie (nichttriviale) Vektoren $\mathbf{b}, \mathbf{c}^T$ so, daß das gegebene System weder steuerbar noch beobachtbar ist.

Lösung

Ein System mit zwei Zuständen ist genau dann nicht steuerbar, wenn $\mathbf{b}$ ein Rechtseigenvektor von $\mathbf{A}$ ist. Wähle z.B. $\mathbf{b} = [1 \ 1]^T \Rightarrow \mathbf{Q}_s = [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b}] = [\mathbf{b} \ \lambda \mathbf{b}] \Rightarrow \text{rg}(\mathbf{Q}_s) = 1 \neq 2$.

Ein System mit zwei Zuständen ist genau dann nicht beobachtbar, wenn $\mathbf{c}^T$ ein Linkseigenvektor $\mathbf{A}$ ist. Wähle z.B. $\mathbf{c} = [-1 \ 1]^T \Rightarrow \mathbf{Q}_b = [\mathbf{c}^T \ \mathbf{c}^T \mathbf{A}]^T = [\mathbf{c}^T \ \lambda \mathbf{c}^T]^T \Rightarrow \text{rg}(\mathbf{Q}_b) = 1 \neq 2$.

Aufgabe 23 (Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit linearer Systeme)

Gegeben seien zwei Kreise (Abbildung 36) mit gleichem Übertragungsverhalten.

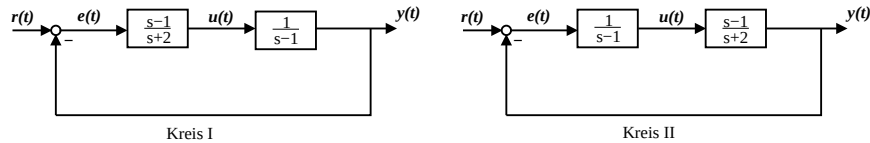


Abbildung 36: Zwei Kreise mit gleichem Übertragungsverhalten.

- Überprüfen Sie Kreis I auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.
- Überprüfen Sie Kreis II auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Zustandsraumdarstellung der einzelnen Teilsysteme und berechnen Sie dann die Zustandsraumdarstellung für den gesamten Kreis.

Lösung

- Kreis I: Erster Schritt ist die Berechnung der Zustandsraumdarstellung (ZRD) der einzelnen Teilsysteme. Es bietet sich an, Normalformen für die ZRD zu wählen, da dann die ZRD direkt aus der Übertragungsfunktion abgelesen werden kann (hier wurde die Regelungsnormalform gewählt).

$$\begin{aligned}u(s) &= \frac{s-1}{s+2} e(s) = \left[1 - \frac{3}{s+2} \right] e(s) \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\xi} &= -2\xi + e \\ u &= -3\xi + e \end{aligned} \\ y(s) &= \frac{1}{s-1} u(s) \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\eta} &= \eta + u \\ y &= \eta \end{aligned}\end{aligned}$$

Als nächstes müssen die einzelnen ZRD "zusammengeschaltet" werden. Mit $e = r - y$ erhalten wir folgende ZRD des gesamten Kreises:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Kreis I ist *nicht steuerbar aber beobachtbar* (Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix berechnen!).

- Kreis II: Analoges Vorgehen wie in Punkt (a).

$$\begin{aligned}u(s) &= \frac{1}{s-1} e(s) \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\xi} &= \xi + e \\ u &= \xi \end{aligned} \\ y(s) &= \frac{s-1}{s+2} u(s) = \left[1 - \frac{3}{s+2} \right] u(s) \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\eta} &= -2\eta + u \\ y &= -3\eta + u \end{aligned}\end{aligned}$$

ZRD des gesamten Kreises:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= [1 \ -3] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Kreis II ist *steuerbar aber nicht beobachtbar* (Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix berechnen!).

Man sieht also, daß hier mit Hilfe der Zustandsraumdarstellung mehr Aussagen über das System gemacht werden kann, als mit der Gesamtübertragungsfunktion des Kreises. Anhand der Übertragungsfunktionen der einzelnen Regelkreisglieder und der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises erkennt man nur die Pol-Nullstellen-Kürzung (weil die Ordnung der Gesamtübertragungsfunktion geringer ist als die Summe der Ordnungen der einzelnen Regelkreisglieder). Es lässt sich so jedoch nicht feststellen ob es sich um einen Steuerbarkeitsverlust oder einen Beobachtbarkeitsverlust (oder beides) handelt.

Aufgabe 24 (Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [c_1 \ c_2 \ c_3] \mathbf{x}.\end{aligned}$$

- (a) Welche Bedingungen müssen $\lambda \in \mathcal{R}$ und $c_i \in \mathcal{R}$ erfüllen, damit das System steuerbar ist.
- (b) Welche Bedingungen müssen $\lambda \in \mathcal{R}$ und $c_i \in \mathcal{R}$ erfüllen, damit das System beobachtbar ist.
- (c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems für $\lambda = 0$. Was passiert falls das System nicht beobachtbar ist?

Lösung

- (a) System ist für alle $\lambda, c_i \in \mathcal{R}$ steuerbar.
- (b) Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist gleich 3, falls $c_1 \neq 0$.

- (c) Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{c_3 s^2 + c_2 s + c_1}{s^3}$$

Es treten Kürzungen auf, falls das System nicht beobachtbar ist ($c_1 = 0$).

Aufgabe 25 (Kaskadenregelung) Gegeben sei das folgende System:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, d = 0.$$

- (a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s) = \frac{x_1(s)}{x_2(s)}$ und $G_2(s) = \frac{x_2(s)}{u(s)}$ (siehe Abbildung 37).
- (b) Wählen Sie den Regler für den inneren Kreis ($K_2(s)$ oder K_2, V) so, daß der geregelte innere Kreis $T_2(s) = \frac{x_2(s)}{e_2(s)}$ eine Bandbreite von 10 rad/s besitzt und $T_2(0) = 1$ ist.
- (c) Entwerfen Sie den äußeren Regler ($K_1(s)$ oder K_1) so, daß bei einer sprungförmigen Änderung des Sollwertes r der Ausgang x_1 keine bleibende Regelabweichung hat und die Bandbreite 1 rad/s beträgt.

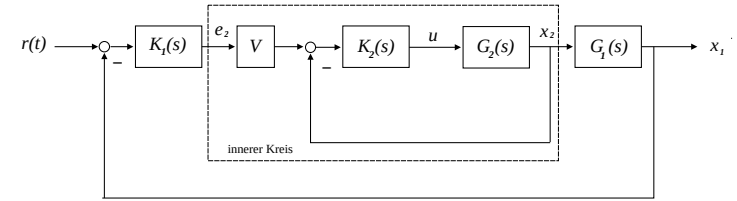


Abbildung 37: Kaskadenregelung.

Lösung

- (a) $G_1(s) = \frac{1}{s}$, $G_2(s) = \frac{1}{s-2}$.
- (b) $K_2(s) = 12$, $V = \frac{10}{12}$.
- (c) Da $G_1(s)$ integrales Verhalten besitzt, benötigt man keinen zusätzlichen I-Anteil im äußeren Regler. Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises lautet somit:

$$T_1(s) = \frac{10K_1}{s(s+10) + 10K_1} \stackrel{!}{=} \frac{\dots}{(s+1)(s+a)}.$$

Mit $K_1 = \frac{9}{10}$ ($a = 9$) erreicht man die gewünschte Bandbreite von 1 rad/s.

Aufgabe 26 (Kaskadenregelung)

Entwerfen Sie für die in Abbildung 38 gezeigte Strecke eine Kaskadenregelung. Der Regler für den inneren bzw. äußeren Kreis soll ein P-Regler bzw. PI-Regler sein.

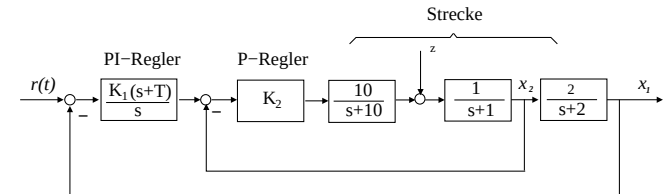


Abbildung 38: Kaskadenregelung mit P-Regler und PI-Regler.

- (a) Der P-Regler soll so gewählt werden, dass der innere geschlossene Kreis möglichst schnell und genügend gedämpft ist. Die stationäre Regelabweichung ist bei dem Entwurf des inneren Kreises weniger wichtig. Eine Übertragungsfunktion, die diese Anforderungen erfüllt ist z.B. $G_{innen}(s) = \frac{55}{s^2+11s+65}$. Bestimmen Sie den P-Regler so, so dass der innere geschlossene Kreis die Übertragungsfunktion $G_{innen}(s) = \frac{55}{s^2+11s+65}$ hat.
- (b) Der PI-Regler soll so gewählt werden, dass die Anforderungen an den geschlossenen Gesamtregelkreis (Keine bleibende Regelabweichung, Schnelligkeit,...) erfüllt sind. Eine Übertragungsfunktion, die diese Anforderungen erfüllt ist z.B. $G_{außen}(s) = \frac{220}{s^3+11s^2+65s+220}$. Bestimmen Sie den PI-Regler so, so dass der Gesamtregelkreis die Übertragungsfunktion $G_{außen}(s) = \frac{220}{s^3+11s^2+65s+220}$ hat.

- (c) Abbildung 39 zeigt eine Simulation (Matlab) zum Führungs- und Störverhalten (Sprungförmige Störung z zum Zeitpunkt $t = 15s$) der Kaskadenregelung und zum Vergleich eine Simulation zum Führungs- und Störverhalten einer Standardregelung mit PI-Regler $K(s) = \frac{1}{4} \frac{s+2}{s}$. Erklären Sie anhand der Regelkreisstruktur (Abbildung 38) weshalb die Kaskadenregelung ein besseres Störverhalten als die Standardregelung hat.

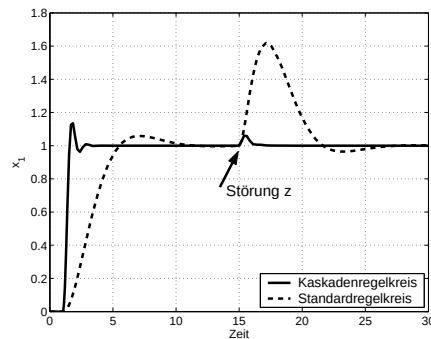


Abbildung 39: Führungs- und Störverhalten der unterschiedlichen Regelkreise.

Lösung

- (a) $K_2 = 5\frac{1}{2}$.
 (b) $K_1 = 2, T = 2$.
 (c) Der Grund für das verbesserte Störverhalten ist, dass die Störung von dem inneren Regelkreis ausgeregelt wird, bevor sie sich in dem äußeren Regelkreis auswirken kann (siehe Abbildung 40). Voraussetzung für eine gute Störunterdrückung ist, dass der geschlossene innere Regelkreis schneller als der geschlossene äußere Regelkreis ist.

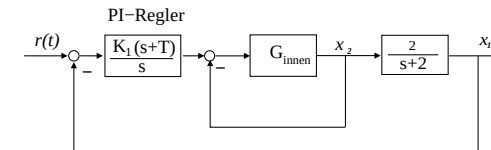


Abbildung 40: Kaskadenregelung mit geschlossenem inneren Regelkreis.

Aufgabe 27 (Anti-windup)

Wo würden Sie bei der in Abbildung 41 gezeigten Regelkreisstruktur¹ das Anti-windup hinzufügen?

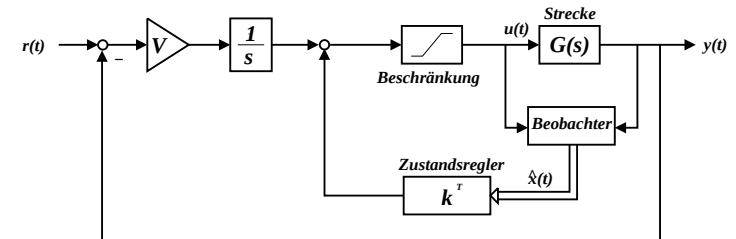


Abbildung 41: Zustandsregler mit I-Anteil.

Lösung

Siehe Abbildung 42. Das Problem bei der gegebenen Regelkreisstruktur ist, daß der Integrator nicht direkt vor der Beschränkung liegt. Die in Abbildung 42 gezeigte Umstrukturierung beseitigt dieses Problem.

¹Bei der gegebenen Regelkreisstruktur handelt sich um einen Zustandsregler mit I-Anteil (Integral Control). Eigenschaften dieser Struktur: Keine bleibende Regelabweichung - ist ohne I-Anteil (Zustandsregler = P-Regler) i.A. nicht der Fall. Zusätzlich werden auch konstante Störungen am Ausgang ausgeregelt.

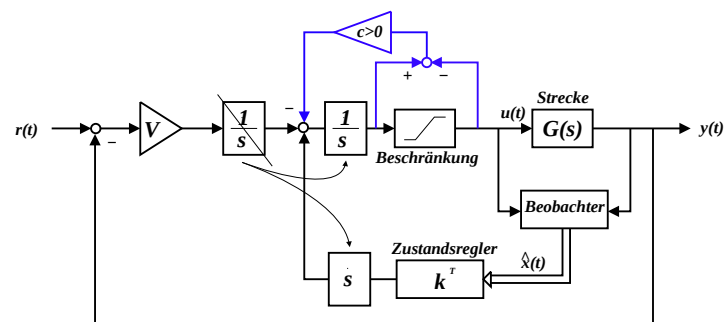


Abbildung 42: Anti-windup für Zustandsregler mit I-Anteil.