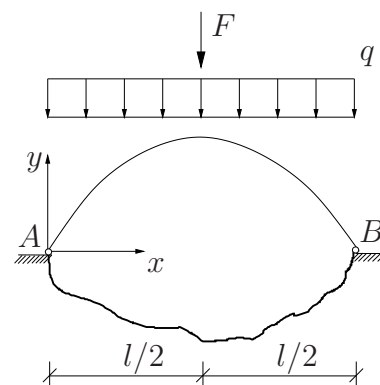


Aufgabe 2

Eine Schlucht der Breite l soll mit einem Bogenträger überspannt werden. Der Träger wird wie dargestellt durch eine Streckenlast q und eine Einzellast F belastet.

1. Bestimmen Sie die Funktion der Stützlinie, wenn die horizontale Auflagerkraft in den Lagern A und B nicht größer als H_{max} sein darf.
2. Stellen Sie die Stützlinie graphisch dar und geben Sie die markanten Höhen und Steigungen an.
3. Bestimmen Sie den Normalkraftverlauf im Träger als Funktion $N(x)$.

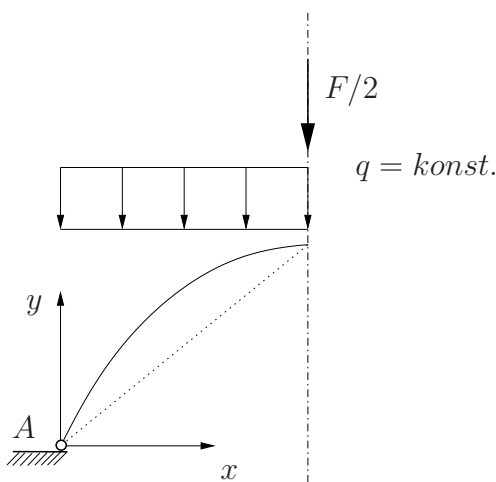


Geg.: $q, l, F = \frac{ql}{8}, H_{max} = \frac{5}{16}ql$.

Lösung**1. Stützlinie**

- Die Form eines Bogenträgers ist so ausgebildet, dass keine Biegemomente auftreten und die gesamte Belastung über Druck abgetragen wird.
- Die Lösung gleicht dem Vorgehen der Seiltheorie. Anstelle des Horizontalzuges tritt Horizontaldruck auf, anstelle der Seilkraft (Zug) wird Normalkraft übertragen (Druck).

Das System wird unterteilt in zwei stetige Teilbereiche: $x \in [0, \frac{l}{2}]$ und $x \in [\frac{l}{2}, l]$. Wegen Symmetrie genügt die Betrachtung des halben Systems $x \in [0, \frac{l}{2}]$.

**1.1 Integration der Differentialgleichung der Stützlinie**

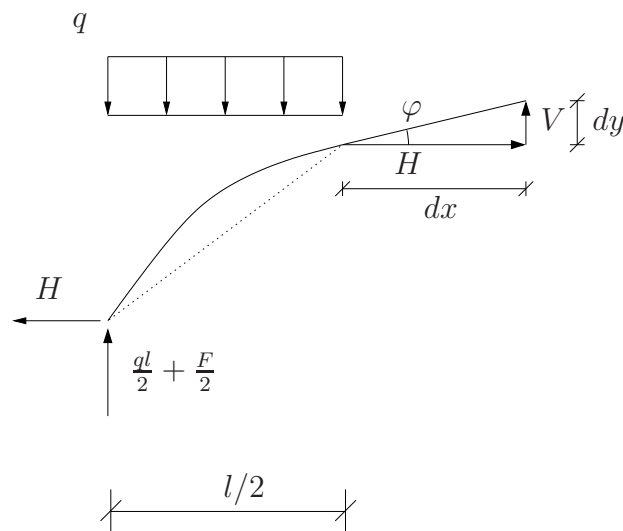
$$\begin{aligned}
 y''(x) &= \frac{1}{H}q(x) = \frac{q}{H} \\
 y'(x) &= \frac{q}{H}x + C_1 \\
 y(x) &= \frac{q}{2H}x^2 + C_1x + C_2
 \end{aligned}$$

1.2 Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 y(x=0) &= 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\
 y(x=l/2) &= f \\
 \frac{ql^2}{8H} + C_1 \frac{l}{2} &= f \Rightarrow C_1 = \frac{2}{l}f - \frac{ql}{4H}
 \end{aligned}$$

Somit lautet die Stützlinie des Bogentragwerks in Abhängigkeit der Bogenhöhe f :

$$\Rightarrow y(x) = \frac{q}{2H}x^2 + \left(\frac{2}{l}f - \frac{ql}{4H}\right)x$$

1.3 Bestimmung der Bogenhöhe f 

Vertikales Gleichgewicht: $V = -\frac{F}{2}$ (1)

Geometrie: $\frac{dy}{dx} = \tan(\varphi) = \frac{V}{H}$ (2)

Steigung der Stützlinie: $y'(x) = \frac{q}{H}x + \frac{2}{l}f - \frac{ql}{4H} \Rightarrow y'(x=l/2) = \frac{ql}{4H} + \frac{2}{l}f$ (3)

(1) in (2): $\frac{dy}{dx} = -\frac{F}{2H}$ (4)

(4) = (3): $-\frac{F}{2H} = \frac{ql}{4H} + \frac{2}{l}f \Rightarrow f = -\frac{ql^2}{8H} - \frac{Fl}{4H} = -\frac{5ql^2}{32H}$ (5)

gegeben: $F = \frac{1}{8}ql$ (6)

gegeben: $H_{max} = -\frac{5}{16}ql$ (=Druckkraft) (7)

(6), (7) in (5): $f = -\frac{5ql^2}{32(-\frac{5}{16}ql)} = \frac{l}{2}$

Somit lautet die Stützlinie:

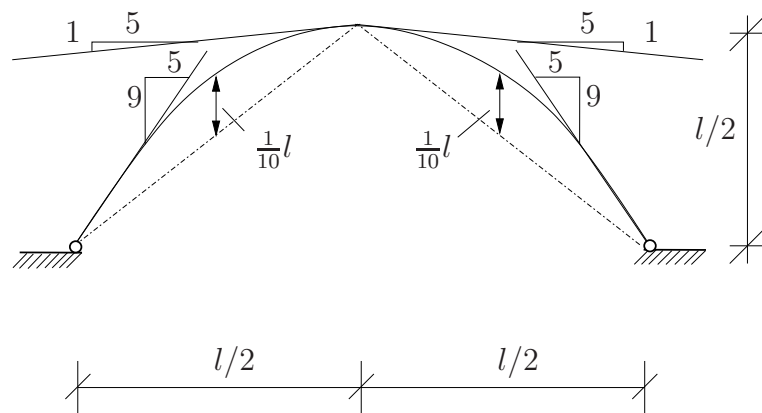
$$\Rightarrow y(x) = -\frac{8}{5}\frac{x^2}{l} + \frac{9}{5}x$$

2. Graphische Darstellung

Randwerte der Stützlinie $y(0) = 0$; $y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l}{2}$

Überhöhung (Druchhang der Seiltheorie): $\eta(x) = y(x) - x = -\frac{8}{5}\frac{x^2}{l} + \frac{4}{5}x$ $\eta_{max} = \eta\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{1}{10}l$

Tangente der Stützlinie $y'(x) = -\frac{16}{5}\frac{x}{l} + \frac{9}{5}$; $y'(0) = \frac{9}{5}$; $y'\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{5}$



3. Normalkraftverlauf im Träger

$$H = konst. = -\frac{5}{16}ql$$

$$N(x) = H\sqrt{1 + (y'(x))^2} \quad (= \text{Druckkraft})$$

$$N(x) = -\frac{5}{16}ql\sqrt{1 + \left(-\frac{16}{5}\frac{x}{l} + \frac{9}{5}\right)^2}$$