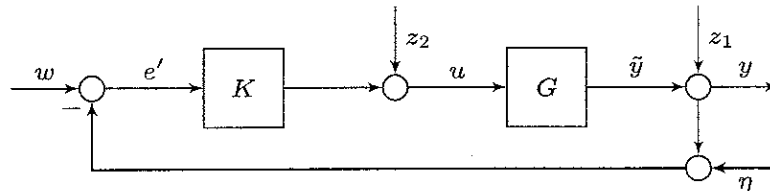


1 Anforderungen an den geschlossenen Kreis

1.1 Der geschlossene Regelkreis

Der Regelkreis besteht aus einer Regelstrecke, einem Regler und einer Rückführung. Er ist mit sämtlichen Ein- und Ausgängen in Abbildung (1) dargestellt.



y Regelgröße (Istwert)	z_1 Ausgangsstörung	$e' = w - y - \eta$ Reglereingang
u Stellgröße	z_2 Eingangsstörung	$e = w - y$ Regelfehler
w Führungsgröße (Sollwert)	η Messrauschen	
K Regler	G Regelstrecke	

Abbildung 1: Der Regelkreis im Signalflussdiagramm.

1.1.1 Kenngrößen des Regelkreises im Frequenzbereich

Übertragungsfunktion des offenen Kreises: $G_0 = GK$ (1)

Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises: $G_c = \frac{GK}{1 + GK}$ (2)

Sensitivität: $S = \frac{1}{1 + GK}$ (3)

Komplementäre Sensitivität: $T = \frac{GK}{1 + GK}$ (4)

Fundamentales Dilemma der Regelungstechnik: $1 = T + S$ (5)

Ausgangsgleichung: $y = T \cdot w + S \cdot z_1 - T \cdot \eta + GS \cdot z_2$ (6)

Regelfehler-Gleichung: $e = S \cdot w - S \cdot z_1 + T \cdot \eta - GS \cdot z_2$ (7)

1.1.2 Kenngrößen des Regelkreises im Zustandsraum

Regelstrecke: $\dot{x} = Ax + Bu$ (8)

Regler: $u = -k^T x$ (9)

Geschlossener Kreis: $\dot{x} = (A - Bk^T)x$ (10)

1.2 Stabilität des geschlossenen Kreises

- Der geschlossene Kreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von $(A - bk^T)$ negativen Realteil haben.
- Der geschlossene Kreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Wurzeln (Nullstellen) von $1 + G_0 = Z_0 + N_0$ mit $G_0 = \frac{Z_0}{N_0}$ negativen Realteil haben, also in der offenen linken Halbebene liegen.
- Nyquist Kriterium:** Sei m_0 die Anzahl der instabilen Pole von G_0 und a_0 die Anzahl der Pole auf der

imaginären Achse von G_0 . Dann ist der geschlossene Kreis genau dann asymptotisch stabil, wenn

$$\Delta\varphi(G_0(j\omega)) = m_0 \cdot \pi + a_0 + \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

gilt. Wobei $\Delta\varphi(G_0(j\omega))$ die Phasendrehung von $G_0(j\omega)$ um den kritischen Punkt $-1 = (-1, 0) = e^{i\pi}$ ist, wenn ω von 0 bis ∞ variiert.

- Die Pole des offenen Kreises G_0 sind die Wurzeln von N_0 . Die Pole des geschlossenen Kreises G_c sind die Wurzeln von $N_0 + Z_0$. Für kausale G_0 ist $\deg(Z_0) \leq \deg(N_0)$ und damit die Anzahl an Polen identisch.
- Instabilitätskriterium:

$$\Delta\varphi(G_0(j\omega)) < 0 \implies \text{Der geschlossene Kreis ist nicht asymptotisch stabil.} \quad (12)$$

- Small Gain Theorem:** Sei der offene Kreis $G_0(s)$ asymptotisch stabil, also $m_0 = a_0 = 0$, dann gilt

$$|G_0(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \in [0, \infty] \implies \text{Der geschlossene Kreis ist asymptotisch stabil.} \quad (13)$$

- Sei der offene Kreis $G_0(s)$ asymptotisch stabil, dann gilt: Der geschlossene Kreis $G_c(s)$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Amplitude von $G_0(j\omega_{-180})$ kleiner als 1 ist. Dabei ist ω_{-180} diejenige Frequenz, bei der die Phase von $G_0(s)$ gleich -180° beträgt.

1.2.1 Interne Stabilität:

Ein geschlossener Kreis heißt genau dann *intern stabil*, wenn die Übertragungsfunktion in jedem Eingang auf jede andere Größe des Regelkreises stabil ist. Ist die Übertragung vom Regler auf die Regelstrecke mit Störungen behaftet, so muss die Untersuchung der Stabilität wie folgt angepasst werden:

Gibt es eine Pol- Nullstellenkürzung instabiler Pole (Realteil ≥ 0) bei der Multiplikation $G_0 = G \cdot K$?

→ JA: Das System ist intern nicht stabil.

→ NEIN: Die Stabilität des Systems wie bisher untersuchen und daraus entscheiden ob intern stabil.

Im Zeitbereich reicht es die Dynamikmatrix $\underline{A}$ auf Stabilität zu prüfen, interne Stabilität ist damit abgedeckt.

1.2.2 Robuste Stabilität:

Ein System heißt *robust stabil*, wenn die Stabilität des geschlossenen Kreises erhalten bleibt, obwohl die reale Strecke nicht exakt dem Modell entspricht.

Die robuste Stabilität des geschlossenen Kreises wird durch den minimalen Abstand der Übertragungsfunktion des offenen Kreises zum kritischen Punkt charakterisiert. Da diese Charakterisierung schwer zu bestimmen und daher unpraktisch ist, werden folgende Größen definiert.

- Amplitudenreserve:** Das maximale Intervall $(a_1, a_2) \ni 1$ um die 1 mit der Eigenschaft

$$\forall a \in (a_1, a_2) : \Delta\varphi(a \cdot G_0) = \Delta\varphi(G_0) \quad (14)$$

heißt für asymptotisch stabile Systeme *Amplitudenreserve*. Es gibt an wieviel zusätzliche Verstärkung toleriert werden kann, ohne den geschlossenen Regelkreis zu destabilisieren. Meist ist das Intervall von der Form $(0, a_r)$ oder (a_r, ∞) , dann wird auch verkürzt von der Amplitudenreserve a_r gesprochen, korrekterweise muss aber immer das gesamte Intervall angegeben werden. Typische Werte bei $(0, a_r)$ sind $2.5 \leq a_r \leq 10$ bzw. bei (a_r, ∞) sind $0.1 \leq a_r \leq 0.4$ typische Werte.

- Phasenreserve:** Die Phase $\varphi_r = \arg(G_0(j\omega_D)) + 180^\circ$ wird *Phasenreserve* genannt. Dabei ist die *Durchtrittsfrequenz* ω_D gerade die Frequenz, bei der G_0 den Einheitskreis schneidet, d.h. $|G_0(j\omega_D)| = 1$ gilt. Die Phasenreserve gibt an, wieviel zusätzliche Phasenverschiebung toleriert werden kann, ohne den geschlossenen Kreis zu destabilisieren. Typischerweise soll $\varphi_r > 30^\circ$ erreicht werden.

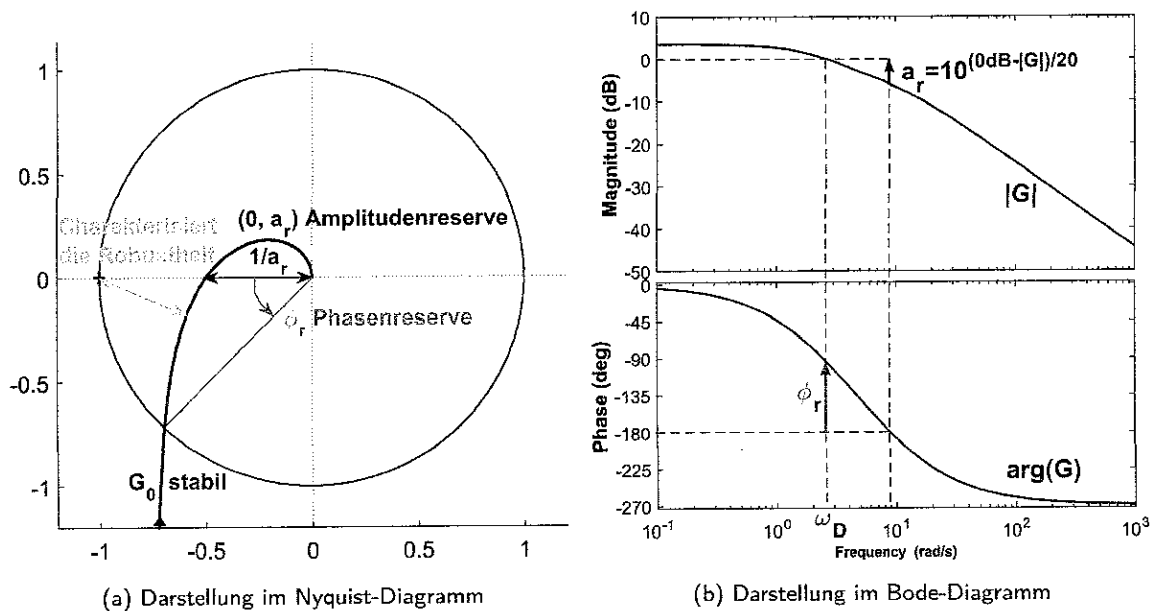


Abbildung 2: Charakterisierung der Robustheit durch Amplituden- und Phasenreserve.

1.3 Regelgüte

1.3.1 Gutes Regelverhalten

Definition gutes Regelverhalten: Die externen Eingangsgrößen w, z_1, z_2, η sollen möglichst kleinen Einfluss auf e haben.

- Um gutes *Führungsverhalten* zu erlangen, muss $|S(j\omega)| \ll 1$ gelten.
- Um gutes *Störverhalten* zu erlangen, muss $|S(j\omega)| \ll 1$ gelten.
- Um gute *Unterdrückung des Messrauschens* zu erlangen, muss $|T(j\omega)| \ll 1$ gelten.

Ideal wäre also $S = T = 0$, aber beides ist wegen des fundamentalen Dilemmas der Regelungstechnik $S(j\omega) + T(j\omega) = 1$ nicht für gleiche Frequenzen ω zu erfüllen. Da das Messrauschen hochfrequent ist und Änderungen in der Führungsgröße niederfrequent sind, genügen für gutes Regelverhalten die Bedingungen

- $|S(j\omega)| \ll 1$ für kleine $\omega \iff |G_0(j\omega)| \gg 1$ für kleine ω ,
- $|T(j\omega)| \ll 1$ für große $\omega \iff |G_0(j\omega)| \ll 1$ für große ω .

Die Frequenz ω_B mit $T(j\omega_B) = -3 \text{ dB}$ für die der geschlossene Kreis eine Verstärkung von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hat, heißt **Bandbreite**. Je größer ω_B umso schneller antwortet das System, ist ω_B jedoch zu groß wird das Messrauschen verstärkt. Ist $T(0) = 1$, so ist ω_B der kleinste Pol von T , sofern es keine kleineren Nullstellen gibt und $|T(j\omega)|$ für $\omega > \omega_B$ nicht mehr entscheiden nach oben knickt. Liegt $G_0(j\omega_D)$ nicht zu nah am kritischen Punkt, gilt die Faustregel $\omega_D \approx \omega_B$.

1.3.2 Bleibende Regelabweichung

Die bleibende Regelabweichung e_∞ bezeichnet die Abweichung der Systemantwort des geschlossenen Kreises bei einer *sprunghaften* Störung oder Führungsgröße vom Systemeingang für $t \rightarrow \infty$. Folgende Aussagen sind äquivalent für die Betrachtung der Führungsgröße und der Störung z_1 :

- Es gibt keine bleibende Regelabweichung.
- Es gilt $S(0) = 0$.
- Es gilt $G_0(0) = \infty$.
- G_0 hat einen Integrator Anteil (d.h. r von $G_0 = c \cdot s^r \cdot G_0^*$ ist negativ).

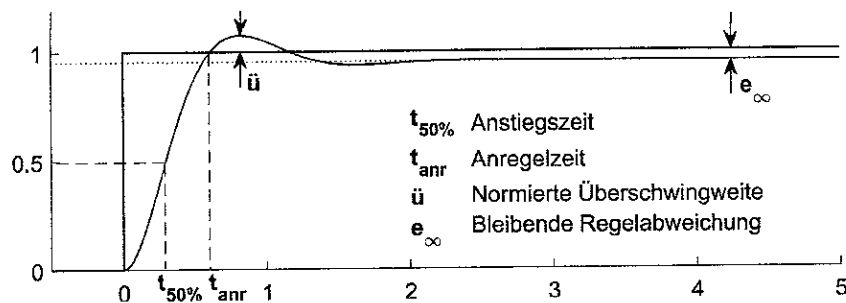


Abbildung 3: Die bleibende Regelabweichung.

Für die Störung z_2 sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Es gibt keine bleibende Regelabweichung.
- (ii) Es gilt $(G \cdot S)(0) = 0$.

Eine hinreichende Bedingung für (i) und (ii) ist

- (iii) Es gilt $K(0) = \infty$ und $G_0(0) = \infty$, d.h. K hat einen Integrator Anteil, der sich nicht vollständig mit G kürzt.

Der Integrator Anteil von $G_0 = G \cdot K$ muss also im Regler K realisiert sein, damit alle bleibenden Regelabweichungen verschwinden.

1.3.3 Zusammenhänge Frequenz und Zeitkenngrößen

Im Spezialfall eines PT₂-Gliedes $G_0(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$ gelten folgende Faustformeln für $0.5 < d < 0.8$:

- Schnelligkeit $\omega_D \cdot t_{50\%} \approx 1.5$
- Überschwingen: $\varphi_r [^\circ] \approx 70 - \ddot{u} [\%]$
- Bandbreite: $\omega_B > \omega_D$

1.3.4 Internal Model Principle

Die Führungsgröße ist im Allgemeinen nicht sprunghaft. Das Internal Model Principle erweitert die Bedingung für eine verschwindende Regelabweichung aus Kapitel 1.3.2 auf allgemeine Führungsgrößen. Aus der Führungsgröße $R(s) = \frac{Z_R(s)}{N_R(s)}$, dem Regler $K(s) = \frac{Z_K(s)}{N_K(s)}$ und der Strecke $G(s) = \frac{Z_G(s)}{N_G(s)}$ ergibt sich für den Regelfehler

$$E = SR = \frac{1}{1 + GK} \cdot R = \frac{N_G N_K}{N_G N_K + Z_G Z_K} \cdot \frac{Z_R}{N_R} \quad (15)$$

Unter der Annahme, dass die Pole von $R(s)$ in der geschlossenen rechten Halbebene liegen, d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) \neq 0$, sind folgende Aussagen äquivalent

- (i) Die bleibende Regelabweichung verschwindet $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$
- (ii) Der geschlossene Kreis ist asymptotisch stabil und $N_R(s)$ ist ein Faktor des charakteristischen Polynoms des offenen Kreises, d.h. es existiert ein Polynom $Q(s)$ so, dass $N_G(s)N_K(s) = Q(s)N_R(s)$ gilt.

Für gutes Führungsverhalten muss der Regler also ein Modell des Referenzsignals besitzen.

2 Reglerentwurf im Frequenzbereich

2.1 Einfache Reglertypen

2.1.1 P-Regler

Der einfachste Regler ist ein P(roportional)-Regler, welcher die Übertragungsfunktion

$$K_P(s) = K_P \quad (16)$$

besitzt. Er beeinflusst lediglich die Amplitude des offenen Kreises $G_0(s) = K_P G(s)$ als konstante Verstärkung und hat auf die Phase keinen Einfluss.

2.1.2 PI-Regler

Der P(roportional)I(ntegral)-Regler hat die Übertragungsfunktion

$$K_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \cdot \frac{s + \frac{1}{T_I}}{s} \quad \text{mit } T_I = \frac{K_P}{K_I}. \quad (17)$$

Der P-Anteil wirkt wie im P-Regler beschrieben, der I-Anteil bewirkt für $\omega < \frac{1}{T_I}$ eine Phasendrehung um $-\frac{\pi}{2}$, für größere Frequenzen hingegen bleibt die Phase unverändert. Außerdem knickt der Amplitudenverlauf bei $\omega = \frac{1}{T_I}$ ab. Für größere Frequenzen ist die Amplitude konstant bei K_P , für kleinere Frequenzen steigt der Amplitudenverlauf mit 20 dB/Dekade ins Unendliche.

2.1.3 PD-Regler

Der P(roportional)D(ifferential)-Regler hat die Übertragungsfunktion

$$K_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P \cdot (1 + T_D s) \quad \text{mit } T_D = \frac{K_D}{K_P} \quad (18)$$

Dieser Regler ist ohne Verzögerung akausal und daher in der Realität nur mit Verzögerung T_1 anwendbar, er wird dann PDT₁-Regler genannt.

$$K_{PDT_1}(s) = K_P + \frac{K_D s}{1 + T_1 s} = K_P \frac{1 + (T_D + T_1)s}{1 + T_1 s} \quad (19)$$

2.1.4 PID-Regler

Der PID-Regler ist schließlich die Kombination aus PI- und PD-Regler, seine Übertragungsfunktion lautet

$$K_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) \quad \text{mit } T_D = \frac{K_D}{K_P} \text{ und } T_I = \frac{K_P}{K_I} \quad (20)$$

Auch dieser Regler ist wegen des Differenzierers akausal und benötigt zur Umsetzung eine Verzögerung T_1

$$K_{PIDT_1}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + T_1 s} \quad (21)$$

2.1.5 Lead-Element

Das Lead-Element ist ein PDT₁-Glieder, das die Phase in einem bestimmten Frequenzbereich anhebt, ohne die Amplitude in diesem Bereich zu beeinflussen. Es ist also ein phasenanhebendes Korrekturglied und besitzt die Übertragungsfunktion

$$Q(s) = v \cdot \frac{s + w}{s + vw} \quad v > 1. \quad (22)$$

Lead-Elemente verwendet man, indem man sie mit dem Regler multipliziert um die Phasenreserve in einem bestimmten Bereich zu vergrößern, ohne die Verstärkung dort zu entscheidend verändern. Meist wird damit also die Phasenreserve verbessert ohne die Durchtrittsfrequenz zu verschieben. Die Phase beginnt vor $\omega = w$

deutlich anzusteigen, erreicht bei $\omega = \sqrt{v} \cdot w$ ihr Maximum $\tan \varphi^* = \frac{v-1}{2\sqrt{v}}$ und ist nach $\omega = v \cdot w$ wieder abgeklungen. Die Amplitude steigt erst ab $\omega = w$ bis $\omega = v \cdot w$ um v an. Mehrere Lead-Elemente können kombiniert werden. Ein Lead-Element wird mit dem bisherigen Regler multipliziert.

2.1.6 Lag-Element

Das Lag-Element ist ein PDT₁-Glieder, das die Amplitude oberhalb gewisser Frequenzen absenkt ohne die Phase für diese Frequenzen zu verändern. Es ist also ein phasenabsenkendes Korrekturglied und besitzt die Übertragungsfunktion

$$Q(s) = \frac{1}{v} \cdot \frac{s + vw}{s + w} \quad v > 1. \quad (23)$$

Lag-Elemente verwendet man, um die Amplitude im Bereich der Durchtrittsfrequenz zu verkleinern, ohne dort die Phase abzusenken. Man kann also auf diese Weise die Verstärkung erhöhen und gleichzeitig die Phasenreserve beibehalten. Ein Lag-Element wird mit dem bisherigen Regler multipliziert.

2.2 Loop Shaping

Loop Shaping ist ein Reglerentwurfsverfahren, bei dem die Übertragungsfunktion des offenen Kreises gezielt verändert wird, um gewünschte Eigenschaften des geschlossenen Kreises zu erzielen. Zu den wesentlichen Anforderungen die durch den Reglerentwurf an dem geschlossenen Kreis realisiert werden müssen, gehören insbesondere

- Stabilität → Nyquist-Kriterium
- gutes Führungsverhalten und Störunterdrückung → $|G_0(j\omega)| > 1$ für $\omega < \omega_D$
- Rauschunterdrückung → $|G_0(j\omega)| < 1$ für $\omega > \omega_D$
- eine gewünschte Bandbreite → Wegen $\omega_B \approx \omega_D$ kann ω_B über ω_D eingestellt werden.
- Robustheit der Stabilität → Phasenreserve φ_r und Amplitudenreserve a_r vorgeben.

2.2.1 Typisches Vorgehen

Je nach Anforderungen kann das Vorgehen variieren, hier ist es beispielhaft mit den Vorgaben ω_D , φ_r und keine bleibende Regelabweichung durchgeführt.

- P-Anteil so einstellen, dass die gewünschte Durchtrittsfrequenz erreicht ist.
- I-Teil einstellen damit keine bleibende Regelabweichung mehr vorliegt. Dabei wird $\frac{1}{T_I} \lesssim 0.1\omega_D$ gewählt, sodass die Durchtrittsfrequenz nicht beeinflusst wird und der Regelfehler trotzdem nicht zu langsam abklingt.
- Lead-Element entwerfen um die Phasenreserve also die Phase in der Nähe der Durchtrittsfrequenz den Vorgaben anzupassen. Dazu wählt man $v > 1$ und $w \approx \omega_D$, sodass bestenfalls $w > \omega_D$ mindestens aber $\sqrt{v} \cdot w > \omega_D$ ist.
- Falls sich die Durchtrittsfrequenz durch das Lead-Element und den I-Teil verschoben hat, ist dies durch eine Korrektur von K_P anzupassen.

Der Loop Shaping Entwurf ist im Allgemeinen ein iteratives Verfahren. Zunächst übersetzt man die Regelziele in einen Sollverlauf der Amplitude und Phase von $G_0(s)$ und wählt geeignete Reglerstrukturen. Mit Computerprogrammen wie Matlab werden dann die exakten Bode-Diagramme graphisch ausgegeben und anschließend die Reglerparameter erneut angepasst, so lange bis der gewünschte Verlauf iterativ angenähert ist. Wichtig ist am Ende des Entwurfs das Überprüfen des Reglers durch die Bode-Diagramme der Sensitivität, der komplementären Sensitivität im Frequenzbereich und durch Zeitbereichssimulation im Zeitbereich.

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

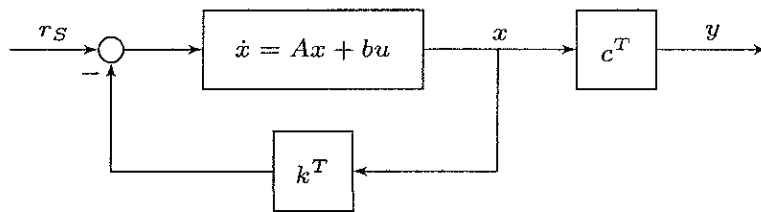


Abbildung 4: Der Regelkreis im Zeitbereich mit Zustandsrückführung.

3 Reglerentwurf im Zeitbereich

3.1 Steuerbarkeit

Ein System heißt *steuerbar* genau dann, wenn für jedes $x(0) \in \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $u(\cdot)$ existiert, sodass $x(T) = 0$. Die Matrix $S_0 = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ heißt **Steuerbarkeitsmatrix**. Es gilt

$$(A, B) \text{ steuerbar} \iff \text{rg}(S_0) = n \quad (24)$$

3.1.1 Stabilisierbarkeit

Ein System heißt *stabilisierbar* genau dann, wenn für jedes $x(0) \in \mathbb{R}^n$ ein $u(\cdot)$ existiert, sodass $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Es gilt

$$(A, B) \text{ stabilisierbar} \iff \text{alle instabilen Moden sind steuerbar} \quad (25)$$

Folglich ist Steuerbarkeit hinreichend für Stabilisierbarkeit.

3.2 Polvorgabe

Das Ziel ist es $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so zu bestimmen, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei vorgegebenen Werten liegen. Dazu geht man wie folgt vor

1. Charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises aufstellen

$$P(s) = \det(sI - A + BK^T) = s^n + d_{n-1}(K)s^{n-1} + \dots + d_1(K)s + d_0(K) \quad (26)$$

2. Charakteristisches Sollpolynom der vorgegebenen Pole $s_1, \dots, s_n$ bestimmen

$$p_{\text{soll}}(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0 \quad (27)$$

3. Koeffizientenvergleich

$$d_{n-1}(K) \stackrel{!}{=} p_{n-1} \quad \dots \quad d_0(K) \stackrel{!}{=} p_0 \quad (28)$$

$\Rightarrow n$ Gleichungen für $n \cdot m$ Unbekannte.

Im Spezialfall dass das System in Regelungsnormalform (Kapitel 3.5.1) vorliegt, ist das charakteristische Polynom gegeben durch

$$p(s) = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \dots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1) \quad (29)$$

Die Pole von $(A - bk^T)$ sind genau dann beliebig vorgebbar, wenn das System (A, b) steuerbar ist, also $\text{rg}(S_0) = n$ gilt.

3.2.1 Ackermann-Formel für skalare Steuergrößen

Mit der Steuerbarkeitsmatrix $S_0 = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ muss der Regler k für (A, B) mit dem Wunschpolynom p_{soll} wie folgt gewählt werden

$$k^T = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot S_0^{-1} \cdot p_{\text{soll}}(A) \quad (30)$$

3.2.2 Vorfilter

Um den Regler so zu ergänzen, dass der Ausgang im stationären Zustand gleich der Regelgröße ist, muss ein Vorfilter V wie in Abbildung 5 eingebaut werden. Wobei

$$V = -\frac{1}{c^T(A - bk^T)^{-1}b} \quad (31)$$

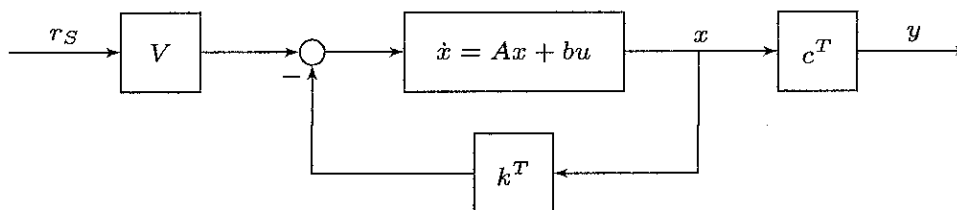


Abbildung 5: Regelkreis mit Vorfilter

3.3 Zustandsrekonstruktion und Beobachter

Bei vielen Reglerentwurfsverfahren wird vorausgesetzt, dass der komplette Zustand zu jedem Zeitpunkt messbar ist. Oft sind jedoch technisch bedingt nicht alle Zustände messbar, dann müssen die fehlenden Zustände aus dem Systemausgang $y = Cx$ und dem Systemeingang u durch ein dynamisches System rekonstruiert werden. Dieses System wird *Beobachter* genannt und besitzt die Eingänge u und y sowie den Zustand $\hat{x}$. Der Regelkreis mit Beobachter ist in Abbildung 6 dargestellt.

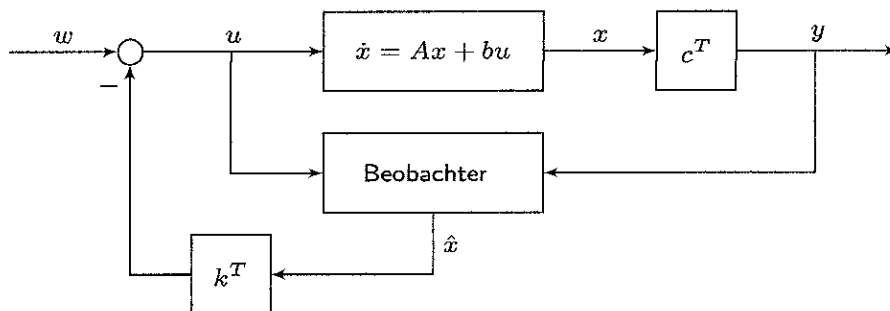


Abbildung 6: Regelkreis mit Zustandsrekonstruktion durch Beobachter.

3.3.1 Luenberger Beobachter

Der *Luenberger* Beobachter basiert auf folgendem Ansatz für das Beobachtersystem.

$$\dot{\hat{x}} = F \cdot \hat{x} + E \cdot y + L \cdot u \quad (32)$$

Damit ergibt sich für den Beobachterfehler $\varepsilon = x - \hat{x}$ die Dynamik

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - F\hat{x} - Ey - L \cdot u \quad (33)$$

$$= (A - EC)x - F\hat{x} + (B - L)u \quad (34)$$

Nun wählt man

$$(i) \quad L = B \quad (35)$$

$$(ii) \quad F = A - EC \quad (36)$$

$$(iii) \quad E \text{ so, dass } A - EC \text{ stabil ist.} \quad (37)$$

so ergibt sich die Fehlerdynamik zu

$$\dot{\varepsilon} = (A - EC) \cdot \varepsilon \quad (38)$$

und das Beobachtersystem mit $\hat{y} = C \cdot \hat{x}$ zu

$$\hat{x} = \underbrace{A \cdot \hat{x} + B \cdot u}_{\text{Simulator}} + \underbrace{E \cdot (y - \hat{y})}_{\text{Korrekturterm}} \quad (39)$$

3.3.2 Beobachtbarkeit

Ein System heißt *beobachtbar* genau dann, wenn für jedes t_0 und jedes $t > t_0$ durch Kenntnis von $y(\tau)$ und $u(\tau)$ für $\tau \in [t_0, t]$ der Zustand $x(t)$ exakt bestimmt werden kann.

Die **Beobachtbarkeitsmatrix** ist gegeben durch $P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$. Es gilt

$$(A, C) \text{ beobachtbar} \iff \text{rg}(P_0) = n \quad (40)$$

Die Pole der Fehlerdynamik-Matrix $(A - EC)$ des Luenberger Beobachters können über geeignete Wahl von E genau dann beliebig festgelegt werden, wenn (A, C) beobachtbar ist.

3.3.3 Bemerkungen

- Ob der Endzustand $x(t)$ des Intervalls $[t_0, t]$, der Anfangszustand $x(t_0)$ oder irgendein Zustand $x(\tau)$ mit $\tau \in (t_0, t)$ durch Kenntnis von u und y in diesem Intervall exakt bestimmt werden kann, ist äquivalent.
- Falls stets $\hat{x}(0) = x(0)$ gewählt werden könnte und keine Störungen oder Modellunsicherheiten vorhanden wären, würde der Simulatorteil ohne Korrekturterm zur Rekonstruktion der Zustände genügen. Da diese stark idealisierten Annahmen in der Praxis jedoch nie zutreffen, kann auf den Korrekturterm nicht verzichtet werden.
- Die Pole des Beobachters sollten prinzipiell so gelegt werden, dass der Beobachterfehler so schnell wie möglich gegen Null geht. Dazu müssten die Pole der Matrix $(A - EC)$ sehr weit in die linke Halbebene gelegt werden. Dies führt jedoch zu nahezu differenzierendem Verhalten des Beobachters damit zu einer Verstärkung des Messrauschens. Die Pole der Fehlerdynamik dürfen also nicht zu weit in die linke Halbebene gelegt werden. Jedoch sollten sie immer links von allen Polen der zu regelnden Strecke liegen, damit die Fehlerdynamik schneller einschwingen kann, als die Dynamik des zu beobachtenden Systems (geschlossener Kreis!). Die beste Lage der Pole des Beobachterfehlers muss im allgemeinen iterativ unter Zuhilfenahme von Simulationen bestimmt werden.
- Im Fall einer skalaren Ausgangsgröße $y(t) \in \mathbb{R}$ wird die Korrekturmatrix $E \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ eindeutig durch die Vorgabe der Pole des Beobachterfehlers bestimmt. Im multi-output Fall, d.h. $y(t) \in \mathbb{R}^p$ (mit $p > 1$), ist die Korrekturmatrix $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$ nicht mehr eindeutig über die Lage der Pole bestimmt. Die dann zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade können zum Erzielen sekundärer Anforderungen, wie beispielsweise der Rauschunterdrückung genutzt werden.

3.4 Separationsprinzip

Das Separationsprinzip besagt, dass in Linearen Systemen Zustandsrückführung und Beobachter unabhängig voneinander entworfen werden können. Es folgt sofort, wenn der Gesamtregelkreis bestehend aus Strecke,

statischer Zustandsrückführung und Beobachter

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ EC & A - BK - EC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (41)$$

durch die nichtsinguläre Transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (42)$$

auf Block-Dreiecksgestalt

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - EC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (43)$$

transformiert wird. Offensichtlich sind die Pole dieses Systems die Pole der echten Zustandsrückführung $A - BK$ und des Beobachterfehlers $A - EC$.

3.5 Kanonische Normalformen

3.5.1 Regelungsnormalform

Die Regelungsnormalform ist besonders geeignet für den Reglerentwurf mit dem Polvorgabe-Verfahren. Gegeben sei die Eingangs-Ausgangs-Differentialgleichung

$$\frac{d^n}{dt^n} y + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y + a_0 y = b_n \frac{d^n}{dt^n} u + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u + b_0 u \quad (44)$$

beziehungsweise die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (45)$$

dann ist die Regelungsnormalform dieses Systems gegeben durch

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u \quad (46)$$

$$y = (b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \cdot x + b_n \cdot u \quad (47)$$

Bei gegebener Regelungsnormalform A^* der Systemmatrix A ergibt sich die Transformationsmatrix $T = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$ mit $T^{-1} \cdot A \cdot T = A^*$ aus der rekursiven Berechnungsvorschrift

$$t_n = b, \quad t_{n-1} = A t_n + a_{n-1} t_n, \quad t_{n-2} = A t_{n-1} + a_{n-2} t_n, \quad \dots \quad t_1 = A t_2 + a_1 t_n \quad (48)$$

Die Koeffizienten a_i sind dabei die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von A :

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (49)$$

Alternativ lässt sich die Transformationsmatrix auch über die letzte Zeile der inverse Steuerbarkeitsmatrix berechnen

$$T = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_0 A \\ \vdots \\ s_0 A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}, \quad \text{wobei } s_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} S_0^{-1}. \quad (50)$$

3.5.2 Beobachtbarkeitsnormalform

Die Beobachtbarkeitsnormalform ist besonders geeignet zur Überprüfung der Beobachtbarkeit. Be beziehungsweise kann das System nur in Beobachtbarkeitsnormalform gebracht werden, wenn das System beobachtbar ist, daher ist jedes System in Beobachtbarkeitsnormalform beobachtbar. Sie lautet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot x + b \cdot u \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot x + du \quad (51)$$

Die Transformationsmatrix T um das System auf Beobachtbarkeitsnormalform zu bringen ist gerade die inverse Beobachtbarkeitsmatrix

$$T = P_0^{-1} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \quad (52)$$

3.5.3 Steuerbarkeitsnormalform

Die Steuerbarkeitsnormalform ist besonders geeignet zur Überprüfung der Steuerbarkeit. Be beziehungsweise kann das System nur in Steuerbarkeitsnormalform gebracht werden, wenn das System steuerbar ist, daher ist jedes System in Steuerbarkeitsnormalform steuerbar. Sie lautet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u \quad (53)$$

Die Transformationsmatrix T um das System auf Steuerbarkeitsnormalform zu bringen ist gerade die Steuerbarkeitsmatrix

$$T = S_0 = \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \quad (54)$$

3.5.4 Beobachternormalform

Die Beobachternormalform ist besonders geeignet für den Beobachterentwurf mit der Polvorgabe für den Luenberger Beobachter. Sie hat die Form

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot u \quad (55)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + b_n u \quad (56)$$

Bei gegebener Beobachternormalform A^* und der Systemmatrix A ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \text{ mit } T^{-1} \cdot A \cdot T = A^* \text{ aus der rekursiven Berechnungsvorschrift}$$

$$t_n = c^T, \quad t_{n-1} = t_n A + a_{n-1} t_n, \quad t_{n-2} = t_{n-1} A + a_{n-2} t_n, \quad \dots \quad t_1 = t_2 A + a_1 t_n \quad (57)$$

4 Erweiterte Regelkreisstrukturen

4.1 Störgrößenaufschaltung

Der Standardregelkreis kann durch eine Störgrößenaufschaltung, wie in Abbildung 7 dargestellt, erweitert werden. Die Störgröße kann durch Wahl von $K_z = -\frac{G_z}{G}$ kompensiert werden. Dies ist jedoch nur unter folgenden Bedingungen möglich:

- Die Störgröße z sowie ihre Wirkung G_z auf den Ausgang muss überhaupt bekannt bzw. messbar sein.
- K_z muss realisierbar sein (Kausalität muss eingehalten werden). Sei n_G die Anzahl an Pole von G und m_G die Anzahl an Nullstellen von G , dann muss der Relativgrad von G kleinergleich dem von G_z sein: $n_G - m_G \leq n_{G_z} - m_{G_z}$.
Ist dies nicht gegeben, so kann K_z durch Multiplikation mit einem Vorfilter $F(s) = V \prod_i \frac{1}{\lambda_i + s}$, die Kausalität einhalten und realisiert werden. Dabei sollten die Pole des Vorfilters genügend stabil sein und $F(0) = 1$ gelten, damit zumindest im stationären Fall die Störgröße exakt kompensiert werden kann.
- K_z muss stabil sein. Dies ist erfüllt, wenn G_z stabil ist und G minimalphasig (keine Nullstellen in der rechten Halbebene).
Ist G nicht minimalphasig, so kann K_z approximiert werden, indem die nichtstabilen Pole von G an der imaginären Achse gespiegelt werden.

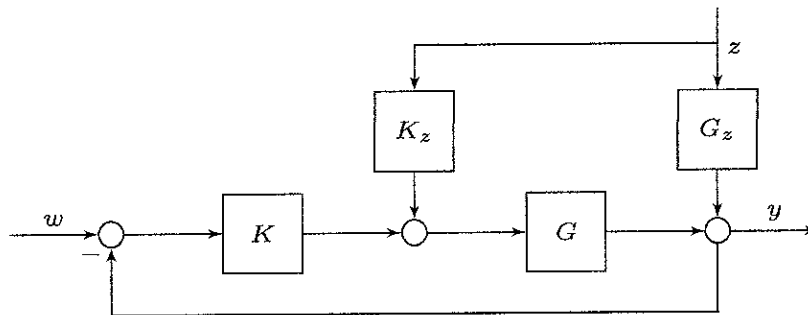


Abbildung 7: Störgrößenaufschaltung

4.2 Kaskadenregelung

In der Kaskadenregelung, wie in Abbildung 8 dargestellt, werden in einem inneren Regelkreis die Störungen z_1 und z_2 ausgeregelt, und in einem äußeren Regelkreis die Störung z_3 und das Führungsverhalten. Beim entwerfen einer Kaskadenregelung wird wie folgt vorgegangen:

1. K_1 so auslegen, dass y_H sich schnell einschwingt, die Störungen z_1 und z_2 also schnell ausgeregelt werden.
2. y_H kann durch u_H angenähert werden, falls der innere Kreis stabil ist und schnell genug ausgeregelt wird $y_H = \frac{G_1 K_1}{1 + G_1 K_1} u_H + \dots \approx u_H$.
3. K_2 auslegen (für $y_H = u_H$) sodass gutes Führungsverhalten erreicht und die Störung z_3 ausgeregelt wird. Der äußere Kreis muss langsamer sein als der innere Kreis, damit die Approximation $y_H = u_H$ gültig ist.

4.3 Struktur mit zwei Freiheitsgraden

Durch die Struktur mit zwei Freiheitsgraden können Führungs- und Störverhalten getrennt voneinander beeinflusst werden, der erweiterte Regelkreis ist in Abbildung 9 dargestellt. Die Stabilität hängt nur von $1 + GK$ ab. Beim Entwerfen einer Struktur mit zwei Freiheitsgraden geht man wie folgt vor:

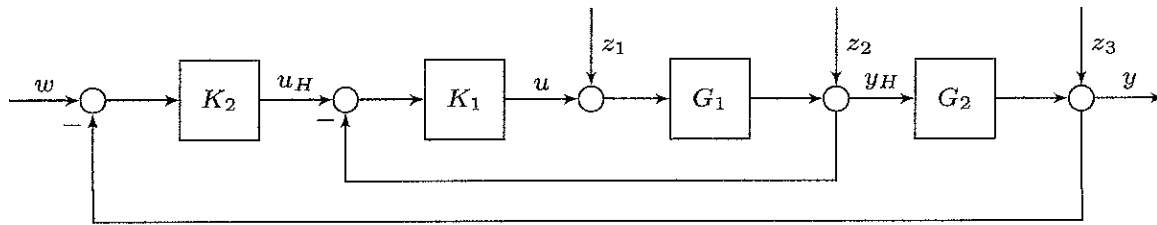


Abbildung 8: Kaskadenregelung

1. Steuerung: Optimal würde man $K_S = G^{-1}$ wählen, dies ist jedoch nur möglich, wenn G minimalphasig ist und einen relativen Grad von 0 hat. Im Allgemeinen wird K_S also so gewählt, dass $G_{wy} = GK_S$ das gewünschte Führungsverhalten zeigt. Dies ist wie bei der Störgrößenaufschaltung durch Unterteilung von G in einen minimalphasigen Anteil und einen Allpass möglich um die Stabilität zu gewährleisten oder durch einen Vorfilter um die Kausalität zu sichern.
2. Vorsteuerung: Wähle $K_V = G_{wy} = GK_S$, damit auch der geschlossene Kreis die Führungsübertragungsfunktion G_{wy} besitzt.
3. Regelung: Bestimme K so, dass der geschlossene Kreis stabil ist und gute Störunterdrückung aufweist.

Damit ergibt sich für die Übertragung

$$y = \underbrace{G_{wy}}_{GK_S} \cdot w + \frac{1}{1 + GK} \cdot z \quad (58)$$

Die Störübertragung hängt nur von K ab, das Führungsverhalten nur von K_S , beides kann also getrennt beeinflusst werden.

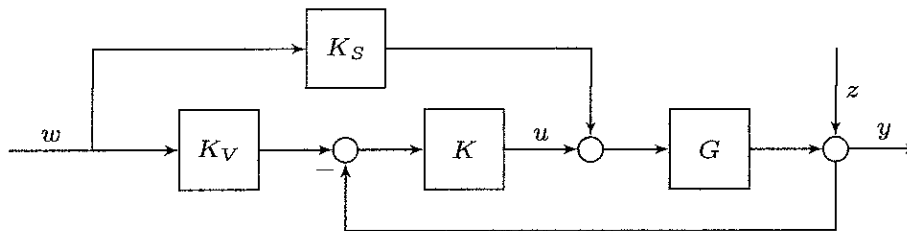


Abbildung 9: Struktur mit zwei Freiheitsgraden

4.4 Anti-Windup

In der Praxis treten häufig nichtlineare Stellgrößenbeschränkungen

$$u = \begin{cases} u_{\max} & u_R > u_{\max} \\ u_{\min} & u_R < u_{\min} \\ u_R & \text{sonst.} \end{cases} \quad (59)$$

auf, die den Reglerausgang u_R beschränken. Dies ist besonders problematisch, wenn der Regler einen Integralanteil besitzt. Denn der Integralanteil summiert sich in der Stellgrößenbeschränkung weiter auf und kann das System damit destabilisieren. Um dieses Verhalten zu verhindern, kann ein Anti-Windup mit Anti-Windup-Zeitkonstante T_R wie in Abbildung 10 eingebaut werden. Im Fall $u = u_R$ dass die Störgrößenbeschränkung nicht greift, gilt $\varepsilon = 0$ und der Regler ist ein normaler PI-Regler. Im Fall $u = u_{\max}$ wird der Integrator allerdings ausgekoppelt

$$u_R = K \frac{T_I s + 1}{T_I s + T_R} \cdot e + \frac{T_R}{T_I s + T_R} \cdot u_{\max} \quad (60)$$

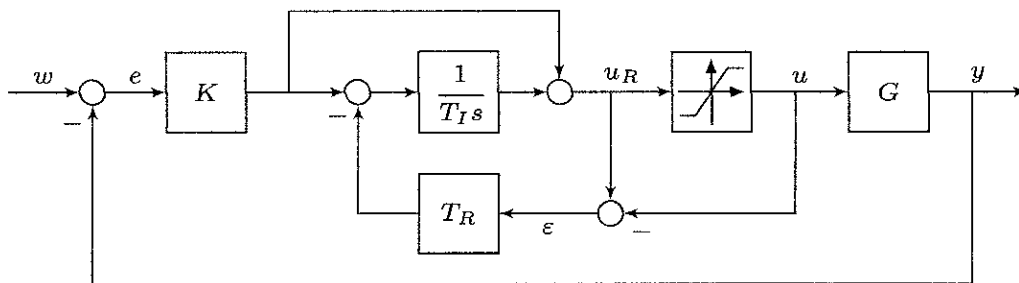


Abbildung 10: Regelkreis mit Stellgrößenbeschränkung und Anti-Windup

Kmrechnung dB in Verstärkung:

$$20 \text{ dB} = 10$$

$$0 \text{ dB} = 1$$

~~ent~~

$$-20 \text{ dB} = 0,1$$

$$-40 \text{ dB} = 0,01$$

$$-6 \text{ dB} = \frac{1}{2}$$

$$6 \text{ dB} = 2$$

$$-3 \text{ dB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$3 \text{ dB} = \sqrt{2}$$

$$\text{Verstärkung } x = 10^{\frac{\dots \text{ dB}}{20}}$$