



Name:	Vorname:	Matr.-Nr.:
Abgabe: 4. Februar		Anerkannt:
Grundvoraussetzungen für die Anerkennung der Hausübung sind eine ordentliche äußere Form (z. B. keine lose Blatt-Sammlung, lesbare Schrift) und die vollständige, nachvollziehbare und größtenteils korrekte Bearbeitung aller Aufgabenteile.		

Aufgabe 4.1:

Die mechanische Beschreibung eines thermoelastischen Festkörpers erfordert vier skalare Konstitutivgleichungen: Eine für die skalare freie Energie, $\psi(\mathbf{F}, \Theta, \text{Grad } \Theta)$, und drei weitere für den vektoriellen Wärmefluss, $\mathbf{Q}(\mathbf{F}, \Theta, \text{Grad } \Theta)$. In einem *starren* Wärmeleiter existiert keine Deformation und es gilt $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, wodurch der Deformationsgradient als Argument von ψ und $\mathbf{Q}$ entfällt.

Geeignete konstitutive Gleichungen für die freie Energie ψ und den Wärmefluss $\mathbf{Q}$ in starren Wärmeleitern sind die gradientenunabhängige Energiefunktion

$$\psi(\Theta) = c \left[(\Theta - \Theta_0) - \Theta \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right] \quad (1)$$

sowie die Fourier-Gleichung

$$\mathbf{Q}(\text{Grad } \Theta) = -k \text{ Grad } \Theta, \quad (2)$$

mit

- c : spezifische Wärmekapazität,
- Θ : absolute (thermodynamische) Temperatur,
- Θ_0 : konstante Referenztemperatur,
- $k \geq 0$: isotrope, konstante Wärmeleitungskonstante.

(a) Bestimmen Sie die Entropiedichte η_0 .

(b) Bestimmen Sie aus der Energiebilanz

$$\rho_0 \frac{d\varepsilon_0}{dt} = \rho_0 R + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} - \text{Div } \mathbf{Q} \quad (3)$$

die den starren Wärmeleiter beschreibende Differentialgleichung für die Temperatur Θ .

- (c) Wievielter Ordnung sind die Zeit- sowie die räumlichen Ableitungsterme der Temperatur in der in (c) bestimmten Differentialgleichung?
- (d) Überprüfen Sie die thermodynamische Konsistenz mit Hilfe der CLAUSIUS-DUHEM-(Dissipations-)Ungleichung.

Hinweis zu (a): Die freie Helmholtzenergie $\psi = \varepsilon_0 - \Theta \eta_0$ ist das negative Komplementärpotential zur inneren Energie ε_0 . Die freie Energie stellt hierbei eine Legendretransformation der inneren Energie in Bezug auf das Variablenpaar $\{\Theta, \eta_0\}$ dar. Während die innere Energie ε_0 eine Funktion der (nicht-messbaren) Entropiedichte η_0 und daher in realen Anwendungen nicht praktikabel ist, ist die freie Helmholtzenergie eine Funktion der messbaren Temperatur. Der Variablentausch durch die Legendretransformation geht mit folgenden Stationaritätsbedingungen einher:

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \eta_0} = \Theta \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} = -\eta_0.$$

Hinweise zu (b):

- Was bedeutet $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ für $\dot{\mathbf{F}}$?
- Beachten Sie, dass temperaturabhängige Größen, $f(\Theta)$, durch $\Theta = \Theta(t)$ eine implizite Zeitabhängigkeit aufweisen und die Zeitableitung $\dot{f}$ somit die Anwendung der Kettenregel erfordert: $\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{df}{d\Theta} \dot{\Theta}$.

Hausübung 4

- starrer Wärmeleiter $F = \underline{I}$

$$\Psi(\Theta) = c \left[(\Theta - \Theta_0) - \Theta \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right] \quad (1)$$

$$Q(\text{Grad } \Theta) = -k \text{ Grad } \Theta$$

a) Entropiedichte:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = \frac{\partial}{\partial \Theta} c \left[(\Theta - \Theta_0) - \Theta \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right] \\ &= c \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} (\Theta - \Theta_0) - \frac{\partial}{\partial \Theta} \Theta \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right] \\ &= c \left[1 - \left(\ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) + \Theta \cdot \frac{1}{\Theta} \right) \right] \\ &= c \left(-\ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right) = -c \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \\ &= -\eta_0 = -c \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\eta_0 = c \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right)} \quad (2)$$

b) Energiebilanz: $\rho_0 \frac{d\varepsilon_0}{dt} = \rho_0 R + \underline{P} \cdot \underline{\dot{F}} - \text{Div } \underline{Q}$

$\underline{F} = \underline{I} \rightarrow \underline{\dot{F}} = 0 \rightarrow$ Körper ist starr
 $\rightarrow$ Deformation ändert sich nicht über die Zeit

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{d\varepsilon_0}{dt} = \rho_0 R - \text{Div } \underline{Q}$$

Für $\frac{d\varepsilon_0}{dt}$
Vom Abelsatz:

$$\Psi = \varepsilon_0 - \Theta \eta_0 \rightarrow \varepsilon_0 = \Psi + \Theta \eta_0$$

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{d}{dt} \Psi + \Theta \eta_0$$

$$\left[\text{Nutz: } \dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{df}{d\Theta} \dot{\Theta} \right]$$

(1) & (2) einsetzen

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left(c \left[(\Theta - \Theta_0) - \Theta \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) + \Theta \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right] \right) \quad \text{Das } c \text{ wurde ausgeklammert}$$

$$= \frac{d}{dt} c(\theta - \theta_0) = \frac{dc(\theta - \theta_0)}{dt} = c \dot{\theta}$$

Für Div Q

$$\underline{Q} = -k \text{ Grad } \theta$$

$$\Rightarrow \text{Grad } \theta = \begin{pmatrix} \partial \theta / \partial x_1 \\ \partial \theta / \partial x_2 \\ \partial \theta / \partial x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Div } \underline{Q} = \text{Div} (-k \text{ Grad } \theta) = -k \text{Div} (\text{Grad } \theta)$$

$$= -k \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \right]$$

$$= -k \Delta_{\underline{x}} \theta$$

$\Delta_{\underline{x}}$ = Laplace-Operator in Bezug auf die Referenzkonfigurationen

Einsetzen:

$$\rho_0 c \dot{\theta} = \rho_0 R + k \Delta_{\underline{x}} \theta$$

c)

Die zeitlichen Ableitungsterme sind 1. Ordnung
Die räumlichen Ableitungsterme sind 2. Ordnung

d)

$$\text{Du: } \underline{\Phi} \cdot \underline{\dot{F}} - \rho_0 (\dot{\Psi} + \theta \eta_0) - \frac{1}{\theta} \underline{Q} \cdot \text{Grad } \theta \geq 0$$

$$\underline{\dot{F}} = 0$$

$$-\rho_0 (\dot{\Psi} + \theta \eta_0) - \frac{1}{\theta} \underline{Q} \cdot \text{Grad } \theta \geq 0$$

$$\eta_0 = c \ln \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)$$

$$\underline{Q} = -k \text{ Grad } \theta$$

$$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} c \left[(\theta - \theta_0) - \theta \ln \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) \right]$$

$$= c \left[\dot{\theta} - \frac{d}{dt} \theta \ln \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) \right]$$

$$= c \left[\dot{\theta} - \left(\dot{\theta} \ln \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) + \theta \cdot \frac{\dot{\theta}}{\theta} \right) \right]$$

$$= c \left[\dot{\theta} - \theta \ln \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) - \dot{\theta} \right]$$

$$= -c \dot{\theta} \ln \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) = -\dot{\theta} c \ln \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)$$

Einsetzen in Du :

$$\underbrace{-p_0 \left(-\dot{\Theta} \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) + \dot{\Theta} \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\Theta}}_{\geq 0} \underbrace{k \text{ Grad } \Theta \cdot \text{Grad } \Theta}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\Theta} k \text{ Grad } \Theta \cdot \text{Grad } \Theta}_{\geq 0} \geq 0$$

Die Ungleichung ist erfüllt und das System ist thermodynamisch konsistent. //