



3. Hausübung – Spannung und Bilanzgleichungen

Name:	Vorname:	Matr.-Nr.:
Abgabe: 21. Januar		Anerkannt:
Grundvoraussetzungen für die Anerkennung der Hausübung sind eine ordentliche äußere Form (z.B. keine lose Blatt-Sammlung, lesbare Schrift) und die vollständige, nachvollziehbare und größtenteils korrekte Bearbeitung aller Aufgabenteile.		

Aufgabe 3.1:

Der Spannungstensor $\sigma = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ soll die folgenden Koeffizienten haben:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix}.$$

- Berechnen Sie den Spannungsvektor $\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$ zum Normalenvektor $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.
- Wie müssen die Konstanten a , b und c gewählt werden, damit der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ aus Teil a) verschwindet?

Aufgabe 3.2:

Gegeben ist die Bewegung

$$\mathbf{x} = (X_1 + \alpha t X_3) \mathbf{e}_1 + (X_2 + \alpha t X_3) \mathbf{e}_2 + (X_3 - \alpha t (X_1 + X_2)) \mathbf{e}_3$$

- Berechnen Sie mit der Massenbilanz in Eulerscher Form,

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0,$$

die Dichte ρ in der aktuellen Konfiguration. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich der Körper in der Referenzlage mit der bekannten Dichte ρ_0 befinden haben. Gehen Sie bei der Berechnung wie folgt vor und beachten Sie folgende Lösungshinweise:

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ in Eulerscher Darstellung.
- Berechnen Sie den skalaren Divergenzterm $\operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}$.
- Die Massenbilanz stellt eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit dar. Um die aktuelle Dichte ρ zu berechnen, muss die Massenbilanz daher integriert werden. Zur Lösung bietet sich hierbei das **Prinzip der Trennung der Veränderlichen** an. Durch geeignete Umstellungen und das Einsetzen der Integrationsgrenzen sollten Sie folgenden Ausdruck erhalten:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\bar{\rho}} d\bar{\rho} = - \int_{t=0}^t \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} d\bar{t}.$$

Berechnen Sie die Integrale und beachten Sie hierbei den Zusammenhang

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(b)| - \ln |f(a)|.$$



3. Hausübung

Aufgabe 3.1

a)

Spannungstensor $\sigma = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix}$$

Normalenvektor $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{e}_i$

In der EKMBB verwendete
Notation ohne Punkt

Spannungsvektor $\underline{t} = \sigma \cdot \underline{n}$

$$\underline{t} = \sigma \cdot \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sigma \underline{e}_1 + a\sigma \underline{e}_2 + b\sigma \underline{e}_3 \\ a\sigma \underline{e}_1 + \sigma \underline{e}_2 + c\sigma \underline{e}_3 \\ b\sigma \underline{e}_1 + c\sigma \underline{e}_2 + \sigma \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

e.. werden hinten ran gestellt,
so wie auf der nächsten Seite

b) Voraussetzung $\underline{t} = 0$

I $0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma \underline{e}_1 + a\sigma \underline{e}_2 + b\sigma \underline{e}_3)$

$$0 = 1 + a + b$$

$$a = -b - 1$$

II $0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (a\sigma \underline{e}_1 + \sigma \underline{e}_2 + c\sigma \underline{e}_3)$

$$0 = a + 1 + c$$

a in II $0 = (-b - 1) + 1 + c$

$$b = c$$

III $0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (b\sigma \underline{e}_1 + c\sigma \underline{e}_2 + \sigma \underline{e}_3)$

$$0 = b + c + 1$$

b in III $0 = c + c + 1$

$$-1/2 = c$$

$$-1/2 = b$$

I $-1/2 = a$

Für die Werte der Konstanten a, b, c
verschwindet der Spannungstensor.

Aufgabe 3.2

i) a) Bewegung:

$$\underline{x}(\underline{X}, t) = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 + \alpha t \underline{X}_3 \\ \underline{X}_2 + \alpha t \underline{X}_3 \\ \underline{X}_3 - \alpha t (\underline{X}_1 + \underline{X}_2) \end{bmatrix} \underline{e}_i$$

$$x_1 = \underline{X}_1 + \alpha t \underline{X}_3$$

$$x_2 = \underline{X}_2 + \alpha t \underline{X}_3$$

$$x_3 = \underline{X}_3 - \alpha t (\underline{X}_1 + \underline{X}_2)$$

$$v(\underline{x}, t) = \dot{\underline{x}}(\underline{X}, t) = \frac{d \underline{x}(\underline{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t}$$

$$\dot{x}_1 = \alpha \underline{X}_3$$

$$\dot{x}_2 = \alpha \underline{X}_3$$

$$\dot{x}_3 = -\alpha (\underline{X}_1 + \underline{X}_2)$$

In Euler'sche Beschreibung umformen

$$\underline{X} = \underline{x}^{-1}(\underline{x}, t)$$

$$\text{I} \quad \underline{X}_1 = x_1 - \alpha t \underline{X}_3$$

$$\text{II} \quad \underline{X}_2 = x_2 - \alpha t \underline{X}_3$$

$$\text{III} \quad \underline{X}_3 = x_3 + \alpha t (\underline{X}_1 + \underline{X}_2)$$

$$\begin{aligned} \text{I und II in III} &= x_3 + \alpha t (x_1 - \alpha t \underline{X}_3 + x_2 - \alpha t \underline{X}_3) \\ &= x_3 + \alpha t (x_1 + x_2) - 2 \alpha^2 t^2 \underline{X}_3 \end{aligned}$$

$$(1 + 2(\alpha t)^2) \underline{X}_3 = x_3 + \alpha t (x_1 + x_2)$$

$$\underline{X}_3 = \frac{x_3 + \alpha t (x_1 + x_2)}{1 + 2(\alpha t)^2} //$$

$\underline{X}_3$ in $\underline{X}_1$ einsetzen

$$\underline{X}_1 = x_1 - \alpha t \left(\frac{x_3 + \alpha t (x_1 + x_2)}{1 + 2(\alpha t)^2} \right)$$

$$\underline{X}_1 = x_1 + \frac{-x_3 \alpha t - \alpha^2 t^2 (x_1 + x_2)}{1 + 2\alpha^2 t^2}$$

$$= \frac{x_1 (1 + 2\alpha^2 t^2) - x_3 \alpha t - \alpha^2 t^2 (x_1 + x_2)}{1 + 2\alpha^2 t^2}$$

$$= \frac{x_1 + 2x_1 \alpha^2 t^2 - x_3 \alpha t - \alpha^2 t^2 (x_1 + x_2)}{1 + 2\alpha^2 t^2}$$

$$= \frac{x_1 (1 + \alpha^2 t^2) - x_2 (\alpha t)^2 - x_3 (\alpha t)}{1 + 2\alpha^2 t^2}$$

//

$$\underline{X}_2 = x_2 - \alpha t \left(\frac{x_3 + \alpha t (x_1 + x_2)}{1 + 2\alpha^2 t^2} \right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{1 + 2\alpha^2 t^2}} \left(x_2 + 2x_2 \alpha^2 t^2 - \alpha t x_3 - \alpha^2 t^2 (x_1 + x_2) \right)$$

$$= \frac{1}{1 + 2\alpha^2 t^2} \left(-x_1 (\alpha t)^2 + x_2 (1 + \alpha^2 t^2) - x_3 (\alpha t) \right)$$

//

X in ẋ einsetzen

$$\dot{\underline{X}}_1 = + \frac{1}{1 + 2(\alpha t)^2} \left(\alpha x_3 + \alpha^2 t (x_1 + x_2) \right)$$

$$\dot{\underline{X}}_1 = + \frac{1}{1 + 2(\alpha t)^2} \left(\alpha^2 t x_1 + \alpha^2 t x_2 + \alpha x_3 \right)$$

//

$$\dot{\underline{X}}_2 = \frac{1}{1 + 2(\alpha t)^2} \left(\alpha^2 t x_1 + \alpha^2 t x_2 + \alpha x_3 \right)$$

//

$$\dot{\underline{X}}_3 = \frac{1}{1 + 2(\alpha t)^2} \left[x_1 (-\alpha - \cancel{\alpha^3 t^2} + \cancel{\alpha^3 t^2}) + x_2 (\cancel{\alpha^3 t^2} - \alpha - \cancel{\alpha^3 t^2}) + x_3 (2\alpha^2 t) \right]$$

$$= \frac{1}{1 + 2(\alpha t)^2} \left[-\alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\alpha^2 t x_3 \right]$$

//

Geschwindigkeit in EULER'scher Form:

$$\dot{\underline{X}}(x, t) = \frac{1}{1 + 2(\alpha t)^2} \begin{bmatrix} \alpha^2 t x_1 + \alpha^2 t x_2 + \alpha x_3 \\ \alpha^2 t x_1 + \alpha^2 t x_2 + \alpha x_3 \\ -\alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\alpha^2 t x_3 \end{bmatrix} \leq i$$

//

ii) Skalarer Divergenzterm $\text{div } \dot{x}$

$$\text{div } \dot{x} = (\text{grad } \dot{x}) \underline{I}$$

INFO: Divergenz eines Vektorfelds
ist die Spur des Gradienten

$$= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3}$$

$$= \frac{1}{1+2(\alpha t)^2} \left(\alpha^2 t + \alpha^2 t + 2\alpha^2 t \right)$$

$$= \frac{4\alpha^2 t}{1+2(\alpha t)^2}$$

iii) Prinzip der Trennung der Veränderlichen

$$y' = f(y) g(x)$$

Ausgangspunkt der Bilanzgleichung

$$0 = \dot{\rho} + \rho \text{div } \dot{x}$$

$$\dot{\rho} = -\rho \text{div } \dot{x}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div } \dot{x} \quad | \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\rho}{dt} \frac{1}{\rho} = -\text{div } \dot{x}$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} d\rho = \int_{t=0}^t -\text{div } \dot{x} dt$$

HINWEIS:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = (\ln |f(b)| - \ln |f(a)|)$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} d\rho = \int_{t=0}^t -\frac{4\alpha^2 t}{1+2(\alpha t)^2} dt$$

Nachrechnung: $f(t) = 1 + 2\alpha^2 t^2$
 $f'(t) = 4\alpha^2 t$ ✓

$$= \ln |p| - \ln |p_0| = -\ln |1 + 2\alpha^2 t^2| + \underbrace{\ln |1 + 2\alpha^2 t_0|}_{=0}$$

$$\ln |p| = \ln |p_0| - \ln |1 + 2\alpha^2 t^2|$$

$$\ln |p| = \ln \left(\frac{p_0}{1 + 2(\alpha t)^2} \right) \quad | e^x$$

$$\underline{\underline{p = \frac{p_0}{1 + 2(\alpha t)^2}}}$$

HINWEIS:

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad \wedge \quad -\ln(a) = \ln(a^{-1})$$

b) Alternative Lösung

$$\int_{\Omega} p \, dV = \int_{\Omega_0} p_0 \, dV = \text{const.} \quad \mapsto \quad p = \frac{p_0}{\det F}$$

$$\text{Deformationsgradient } F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad x = x(X, t)$$

$$\underline{F} = \frac{\partial x(X, t)}{\partial X}$$

$$x_1 = X_1 + \alpha t X_3 \quad x_2 = X_2 + \alpha t X_3 \quad x_3 = X_3 - \alpha t (X_1 + X_2)$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha t \\ 0 & 1 & \alpha t \\ -\alpha t & -\alpha t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F = 1 + 2(\alpha t)^2$$

Einsetzen

$$p = \frac{p_0}{\det F} = \underline{\underline{\frac{p_0}{1 + 2(\alpha t)^2}}}$$

=> PASST!