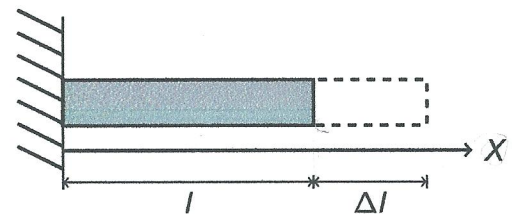


Name:	Vorname:	Matr.-Nr.:
Abgabe: 23. Dezember		Anerkannt:
Grundvoraussetzungen für die Anerkennung der Hausübung sind eine ordentliche äußere Form (z.B. keine lose Blatt-Sammlung, lesbare Schrift) und die vollständige, nachvollziehbare und größtenteils korrekte Bearbeitung aller Aufgabenteile.		

Aufgabe 1.1:

Der abgebildete Zugstab der Länge l wird **gleichmäßig um Δl verlängert.**

- Bestimmen Sie die Bewegung des Stabs in materieller Beschreibung (LAGRANGE) und in räumlicher Beschreibung (EULER).
- Berechnen Sie den Deformationsgradienten F .
- Berechnen Sie die GREEN-LAGRANGE Verzerrung E .



Tipps:

- Nutzen Sie die Verschiebung, um die Bewegungsfunktion aufzustellen.
- Das System hängt **nicht von der Zeit ab.**

Aufgabe 1.2:

Sei $y(x, t)$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion und B ein eindimensionaler Kontinuumskörper, d.h. $x \in [x_0(X_0, t), x_1(X_1, t)]$. Zeigen Sie, dass folgende Relation gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0(X_0, t)}^{x_1(X_1, t)} y(x, t) dx = \int_{x_0(X_0, t)}^{x_1(X_1, t)} \left(\frac{dy(x, t)}{dt} + y(x, t)L \right) dx$$

Tipp:

- Was muss gewährleistet sein, damit Differentiation und Integration vertauscht werden können?

Einführung in die Kontinuumsbiomechanik

2. Hausübung - EULER und LAGRANGE Darstellung

AUFGABE: 1.1

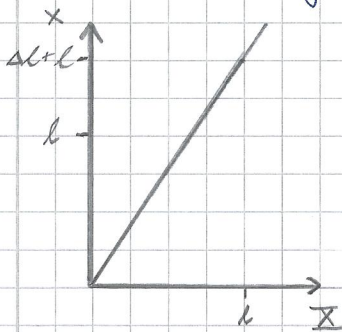
a) $\rightarrow$ gleichmäßige Verlängerung $\Rightarrow$ linearer Ansatz

$\rightarrow$ gesuchte Bewegungsfunktion $x = x(X) \rightarrow$ System hängt nicht von Zeit ab

$\hookrightarrow$ nutze Verschiebung um Bewegungsfunktion zu ermitteln
 $\Rightarrow$ Betrachtung der Randbedingungen

1. Randbedingung: $x(X=0) = 0$

2. Randbedingung: $x(X=l) = l + \Delta l$



allgemeine lineare Gleichung:

$$y = m \cdot x + b \rightarrow x = m \cdot X + b$$

1. RB $\rightarrow x(X=0) = 0 = m \cdot 0 + b$

$\hookrightarrow b = 0$

2. RB $\rightarrow x(X=l) = l + \Delta l = m \cdot l$

$$\hookrightarrow m = \frac{l + \Delta l}{l} = 1 + \frac{\Delta l}{l}$$

Bewegungsgleichungen:

$$x(X) = \left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right) X \Rightarrow \text{LAGRANGE}$$

$\hookrightarrow$ materielle Beschreibung

$$X(x) = X^{-1}(x) = \left(\frac{l}{l + \Delta l}\right) x \Rightarrow \text{EULER}$$

$\hookrightarrow$ räumliche Beschreibung

b) Deformationsgradient F

$$F = \frac{dx}{dX} = \frac{d}{dX} \left[\left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right) X \right] = 1 + \frac{\Delta l}{l} =$$

c) GREEN - LAGRANGE VERZERRUNG $E; C = F^2$

$$E = \frac{1}{2} (C - 1) = \frac{1}{2} (F^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right)^2 - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta l^2}{l^2} \right) = \frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta l^2}{l^2} =$$

AUFGABE 1.2

Beweis für folgende Relation:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0(x_0, t)}^{x_1(x_1, t)} y(x, t) dx = \int_{x_0(x_0, t)}^{x_1(x_1, t)} \left(\frac{dy(x, t)}{dt} + y(x, t) L \right) dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0(x_0, t)}^{x_1(x_1, t)} y(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} y(x, t) \cdot F d\bar{x} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ersetze} \\ dx = F d\bar{x} \end{array} \right.$$

$$= \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \frac{d}{dt} [y(x, t) \cdot F d\bar{x}] = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \left[\frac{dy(x, t)}{dt} \cdot F d\bar{x} + \frac{dF d\bar{x}}{dt} \cdot y(x, t) \dots \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{Produktregel} \\ \text{anwenden} \end{array} \right.$$

$$\dots y(x, t) \cdot F \frac{d d\bar{x}}{dt}]$$

$$= \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \left[\frac{dy(x, t)}{dt} \cdot F d\bar{x} + y(x, t) \cdot \frac{dF}{dt} d\bar{x} \right] \quad \left| \dot{F} = LF \right.$$

$$= \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \left[\frac{dy(x, t)}{dt} \cdot F d\bar{x} + y(x, t) \cdot \overset{\tau}{LF} d\bar{x} \right]$$

$$= \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \left[\frac{dy(x, t)}{dt} \cdot F d\bar{x} + L y(x, t) \cdot F d\bar{x} \right]$$

$$= \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \left[\left(\frac{dy(x, t)}{dt} + L y(x, t) \right) F d\bar{x} \right] \quad \left| F d\bar{x} = dx \right.$$

$$= \int_{x_0(x_0, t)}^{x_1(x_1, t)} \left(\frac{dy(x, t)}{dt} + y(x, t) L \right) dx$$

$\Rightarrow$ Tausch von Integration und Ableitung möglich, da Grenzen nicht von der Zeit abhängen.